ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: "МЕХАНИКА КОМПОЗИТОВ"

Для студентов 1 – 3-го курсов отделения механики механико-математического факультета МГУ

Профессор В.И. Горбачев

1 Общие сведения.

Быть студентом отделения механики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова это большая ответственность и большой труд. Для успешного овладения специальностью Вам понадобятся знание многих математических дисциплин. Прежде всего это математический анализ, высшая алгебра, аналитическая геометрия, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, обобщённые дифференциальные уравнения, функциональный анализ, тензорный анализ и ряд других важных разделов математики.

1.1 О механике в бытовом и научном смысле.

Механика это очень широкое понятие. В бытовом плане механик — это человек ремонтирующий машины и механизмы. В научном плане механика подразделяется на механику абсолютно твердых тел и на механику сплошных деформируемых сред (МСС). Движение в пространстве абсолютно твердых тел изучают в курсе теоретической механики.

1.2 Механика сплошных сред (МСС).

В механике сплошных сред основным моментом является понятие сплошности, или гипотеза сплошности, в которой утверждается, что среда заполняет пространство сплошным (непрерывным) образом, то есть в любом бесконечно малом объёме содержится бесконечное число "частиц" среды. На самом деле реальная среда состоит из молекул и атомов. Расстояние между ними существенно меньше их характерных размеров, то есть можно сказать, что физическая среда в основном состоит из пустоты.

1.3 Следствия гипотезы сплошности.

Основываясь на гипотезе сплошности, в МСС

1.) *вводят* различные *локальные характеристики (плотности), как непрерывные (или кусочно-непрерывные) функции координат точки среды.* К таковым, например, относится плотность среды ϱ, температура в точке среды T, вектор перемещений материальных точек среды $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, вектор скорости материальной точки $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и т.д.

2.) **Принятие гипотезы сплошности позволяет описывать процессы в сплошной среде с помощью дифференциальных уравнений.**

1.4 Основные разделы МСС.

Сплошная среда, в свою очередь, подразделяется на механику газа и плазмы, механику жидкостей и механику деформируемых твёрдых тел (МДТТ). К сплошной среде относят также и электромагнитное поле, поле излучений, гравитационное поле и т.п. [1]. На самом деле деление МСС на газ, жидкость и твёрдое тело достаточно условно. В качестве примера приведу обычную воду, которая, в зависимости от температуры, может быть газом, жидкостью или твёрдым телом. Здесь будет рассмотрена механика деформируемых твердых тел и, в частности, один из основных разделов МДТТ — механика композитов.

1.5 Механика деформируемых твердых тел.

Это чрезвычайно важный раздел в МСС. Люди изначально вынуждены были заниматься строительством жилищ, различных культовых сооружений, созданием орудий и приспособлений для добычи пищи, нападения и обороны. Это приводило к накоплению правил выбора материалов (в те далёкие времена это камень, либо дерево) и их размеров. Как отмечает Степан Прокофьевич Тимошенко "Нет сомнения в том, что египтянам были уже известны некоторые эмпирические правила подобного рода" [2]. Далее Тимошенко отмечает вклад греков и римлян в дальнейшее развитие строительного искусства.

1.6 Изотропия и анизотропия. Однородность и неоднородность

Традиционные конструкционные материалы (сталь, медь, алюминий, стекло и т.д.) представляют собой изотропные и однородные материалы.

Изотропия материала означает его одинаковые физико-механические свойства в любом направлении. То есть, если мы из большого тела, в заданном месте, вырежем маленькую полоску (или стержень) в каком либо выбранном направлении, проведем испытание по определению какой либо физико-механической характеристики (например модуля Юнга), то мы получим совершенно одинаковые значения этой характеристики для образцов, вырезанных в одном и том же месте, но в различных направлениях.

Если значения определяемой характеристики зависят от направления вырезания образца для испытания, то изотропии нет и такой материал называется анизотропным [3].

Однородность материала означает, что искомая характеристика не зависит от места в теле где вырезается образец для эксперимента. **Процессы в однородных материалах описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.**

Если, при прочих равных условиях, в разных точках тела получаются разные значения характеристик, то материал является неоднородным. **Процессы в неоднородных материалах описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.**

1.7 Композиционный материал (КМ).

В книге Кристенсена "Введение в механику композитов" [4], да и во многих других книгах, под композиционным материалом (композитом) понимается любой гетерогенный материал, то есть материал разнородный по составу.

Часто композит называют многофазной средой, как в книге [5] Роберта Искандеровича Нигматулина, что, впрочем, является эквивалентом гетерогенной среды.

Виктор Александрович Ломакин рассматривал неоднородные тела, у которых свойства являются непрерывными функциями координат [6]. Если предположить, что между фазами существует переходный слой, в котором физико-механические характеристики материалов непрерывно переходят от одного к другому, тогда и композит можно считать непрерывно неоднородным телом.

Александр Николаевич Полилов под композитом понимает искусственно созданные материалы (материалы-конструкции) [7].

В книге "Механика композиционных материалов" Бориса Ефимовича Победри, основателя кафедры механики композитов на механико-математическом факультете МГУ, композит определяется как "**некая математическая модель, описываемая с помощью**

разрывных по координатам материальных функций определяющих соотношений" [8]. Определение композита, данное Б.Е. Победрей позволяет применить мощный аппарат теории обобщенных функций к исследованию процессов в композитах.

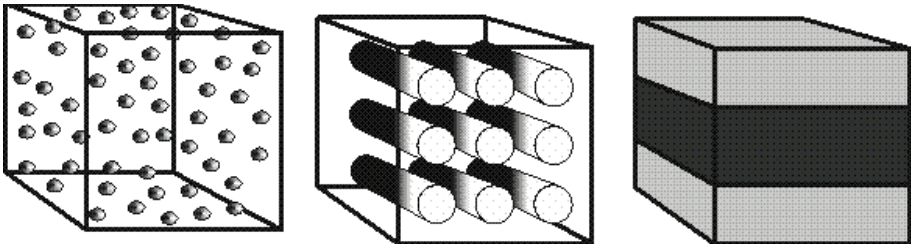
Как правило композит композит создаётся и существует в виде изделия или же конструкции

В настоящее время изделия из композитов можно создавать различными способами: печать на 3D-принтере, намотка нитью, напыление слоёв вещества и т.п. Эти и другие способы принято называть *аддитивными технологиями*, под которыми подразумевается постепенное наращивание тела до требуемых размеров и формы.

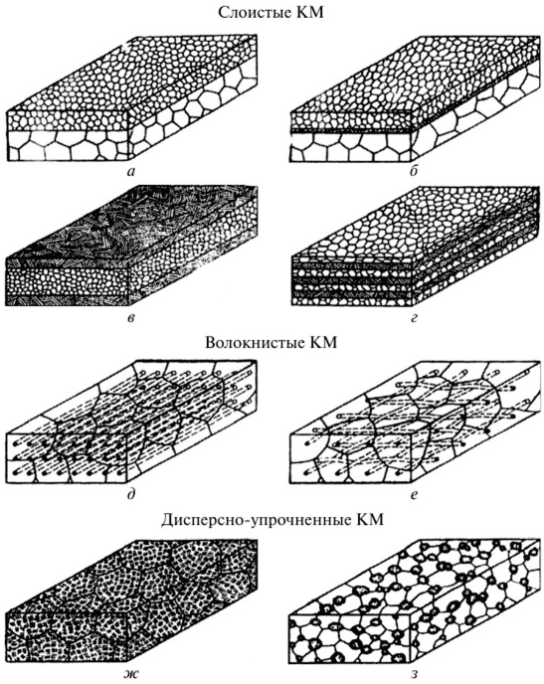
Для композита существенным является то обстоятельство, что объемы различных веществ (компонентов, фаз), составляющих тело обладают характерными размерами много меньшими характерных размеров всего тела и в тоже время они намного больше размеров молекул, так что каждое вещество в своем объеме можно считать сплошной средой.

Таким образом, в единой композиции материалов, образующих тело налицо три характерных уровня: макро, микро и нано уровень. **Поведение материала на макро и микроуровне изучает механика композитов** — один из важнейших разделов механики деформируемых твердых тел (МДТТ), который в свою очередь является разделом механики сплошных сред (МСС).

1.7.1 Дисперсные, волокнистые и слоистые КМ.

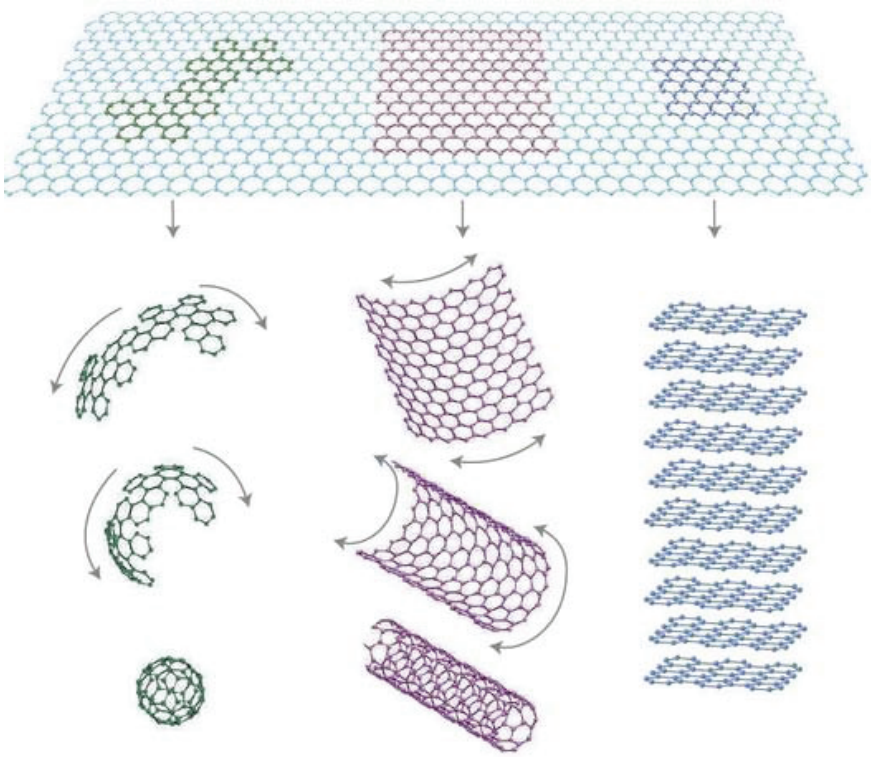


Дисперсный, волокнистый и слоистый композиты.



Дисперсный, волокнистый и слоистый композиты.

1.7.2 Графен, нанотрубка, фулерен.



Графен, нанотрубка, фулерен.

1.8 Представительный объём.

В механике композитов важным является понятие о представительном объёме вещества. В википедии приводится следующее понятие представительного объёма, позаимствованного из курса общей физики Д.В. Сивухина "Представительный объем — минимальный объём материала, в котором содержится достаточное для статистического описания состояния тела число «носителей» рассматриваемых механизмов процесса. Добавление к этому объёму других частей данного материала с аналогичной (в статистическом смысле) конфигурацией «носителей» анализируемых механизмов не должно приводить к изменению эволюционных уравнений для полевых величин, описывающих изменение конфигурации «носителей». *В классической МСС предполагается, что размеры представительного объёма таковы, что градиентами этих полевых величин и других параметров состояния в пределах представительного объёма можно пренебречь, что позволяет считать указанные поля однородными (в статистическом смысле) в масштабах представительного объёма.*"

1.9 Физическое определение эффективных свойств.

Композиционное тело, состоящее из большого количества одинаковых представительных объёмов ведёт себя при внешних воздействиях как некоторое однородное тело, свойства которого отличны от свойств компонентов, составляющих представительный объём. Свойства такого модельного однородного тела называются эффективными свойствами.

1.10 Масштабный эффект.

При экспериментальном подходе к нахождению эффективных физико-механических свойств композитов, выясняется, что результаты существенно зависят от количества элементов, входящих в образец, над которым проводятся все эксперименты. В этом заключается суть масштабного эффекта в композитах. При увеличении числа элементов в образце наступает такой момент, когда добавление элементов в образце практически перестаёт сказываться на измеряемые величины.

Реально экспериментальный образец состоит довольно из большого числа представительных объёмов. Эксперимент над таким образцом должен быть так организован, чтобы в любом представительном объёме реализовывалось в среднем одинаковое напряженно деформированное состояние.

1.11 О необходимости теоретических методов расчета эффективных характеристик.

Эксперименты по определению эффективных физико-механических и прочностных свойств композитов трудоемки и сложны, как при их проведении, так и при подготовке образцов для экспериментов. Многие из эффективных свойства композитов имеют тензорную природу. При экспериментальном подходе, нужно заранее знать, сколько независимых компонентов имеет каждый из эффективных тензоров и соответственно спланировать эксперименты. Поэтому полный набор экспериментов по определению всех компонентов эффективных тензоров довольно длительная и дорогая процедура. При экспериментальном подходе проблематично спроектировать оптимальную процедуру создания композиционного материала с заранее заданными физико-механическими эффективными характеристиками.

Прежде чем проводить эксперимент должна быть построена математическая модель для расчета всех эффективных тензоров. Полученные из математической модели аналитические и численные результаты позволят разработать теорию эксперимента, на котором аттестуется математическая модель.

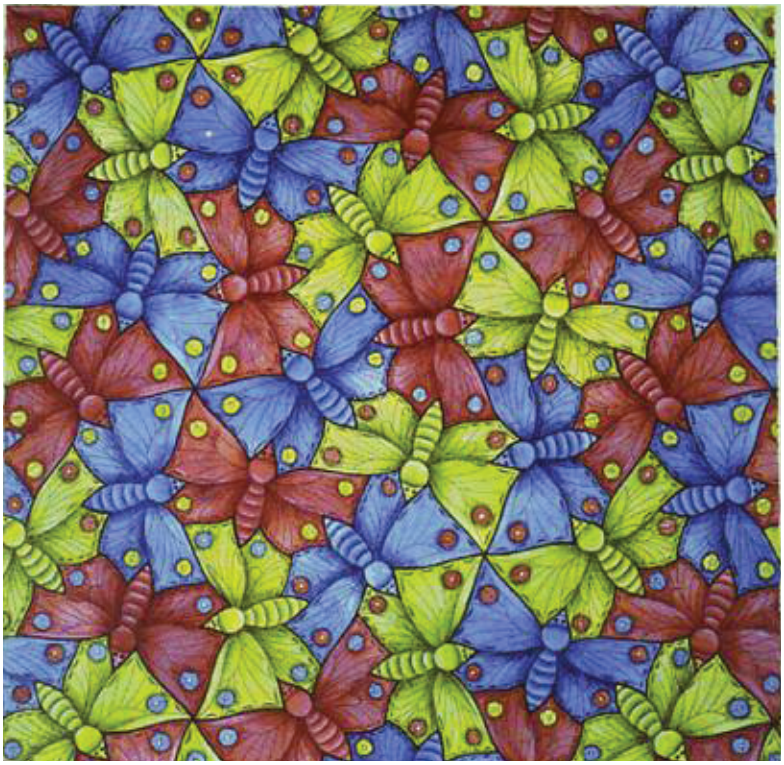
2 Композиты с регулярной структурой.

Характерной особенность композитов с регулярной структурой является наличие, так называемой, ячейки периодичности, или же типичного элемента (объёма). *Типичный элемент - это такой элемент, многократное повторение которого в определенной логической последовательности позволяет построить все тело.* Типичные элементы совершенно одинаковы и пересекаются друг с другом только по границам. Представительный объём состоит из одного или нескольких типичных элементов. В математике образование тела с помощью типичных элементов называется *замощением* [9]. Например плоскость можно замостить прямоугольниками, параллелограммами, правильными шестиугольниками.

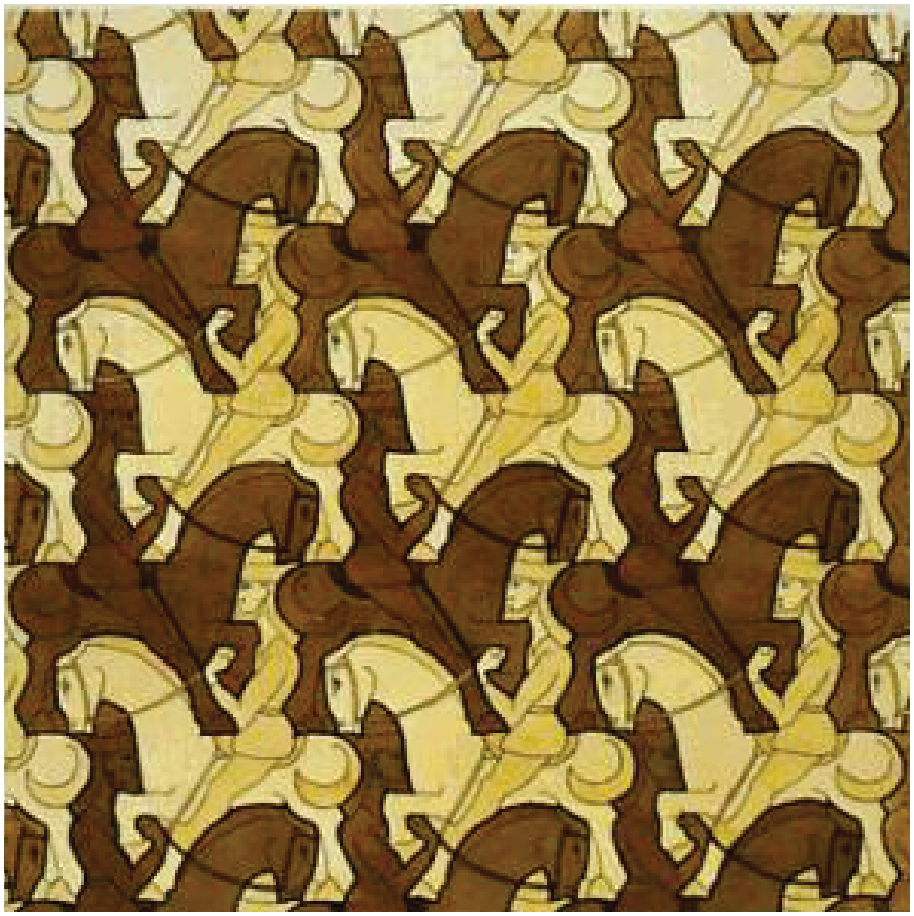
2.1 Рисунки Мориса Эшера.

Можно придумать очень красивые замощения плоскости и пространства. Мориц Корнелиус Эшер – голландский художник второй половины прошлого века рисовал картины, многие из которых основаны на принципах замощения плоскости типичными элементами.

Танцующие люди.



Бабочки.



Лошади со всадниками.

Рыбы.

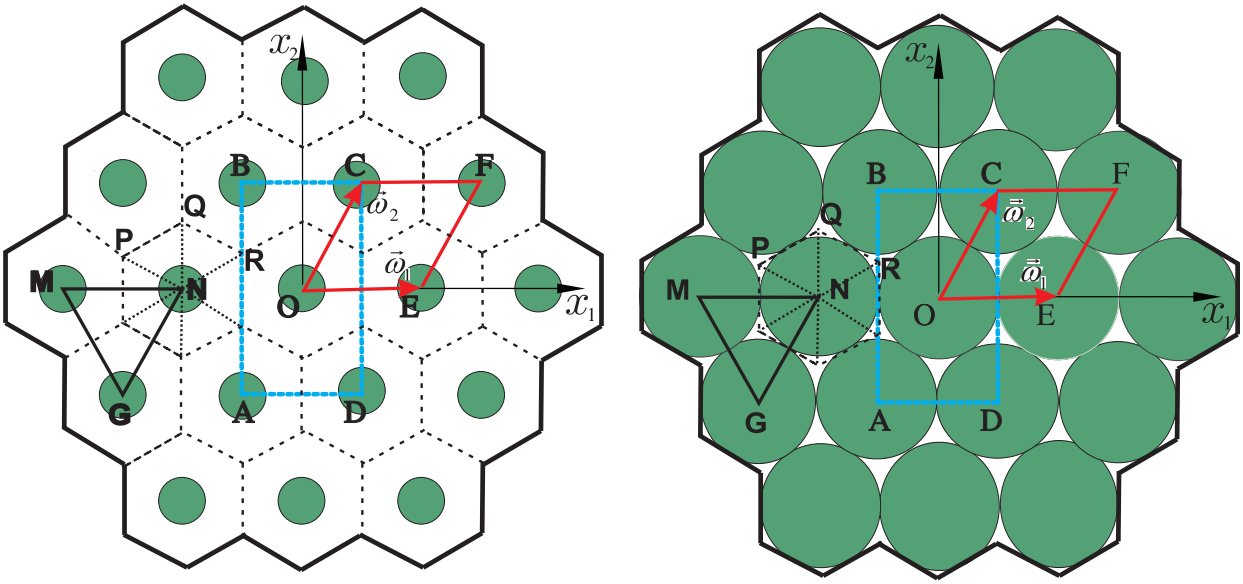
Многократное повторение типичного элемента в определенной логической последовательности позволяет построить всю картину. На правом рисунке "Танцующие люди" показан шестигранник, повторением которого получается вся картина.

На рисунке "Рыбы" ситуация аналогичная, только противоположные стороны шестигранника одинаково искривлены, чтобы повторением искривленного шестигранника возможно было бы построить всю картину. Таким образом, искривленный шестигранник является типичным элементом.

На всех представленных рисунках вместо правильного или же искривлённого шестигранника можно построить прямоугольник, представляющий собой ячейку периодичности.

2.2 Стержень с шестигранной ячейкой.

Покажем сказанное на более простом примере волокнистого композита. На рисунке изображено поперечное сечение стержня созданного из материала (матрицы), упрочнённой круглыми волокнами из другого материала.



Типичные элементы: малый треугольный NPQ, малый ромбовидный NPQR, большой треугольный GMN, большой ромбовидный OCFE, шестиугольный и прямоугольный ABCD

Волокна радиуса r расположены в центрах правильного шестиугольника. Обозначим длину стороны PQ шестиугольника через a. Маленький равносторонний треугольник NPQ является **типичным элементом минимальной площади** $S_{\triangle NPQ} = a^2\sqrt{3}/4$, с помощью которого можно замостить плоскость, соблюдая при этом геометрию круглого волокна.

Следующим по площади типичным элементом является маленький ромб NPQR составленный, из двух маленьких треугольных элементов, с площадью $S_{\Diamond NPQR} = 2S_{\triangle NPQ}$ в два раза большей площади минимального элемента.

Затем идёт большой равносторонний треугольник GMN, в трёх углах которого расположено по 1/6 части армировки, и площадь которого в три раза больше минимальной: $S_{\triangle GMN} = 3S_{\triangle NPQ}$.

Потом идут два разных по форме, но одинаковых по площади типичных элемента — правильный шестиугольник и ромб OCFE. Площадь каждого из этих элементов в 6 раз больше минимального $S_{\Diamond OCFE} = 2S_{\triangle GMN} = 6S_{\triangle NPQ} = a^2 3\sqrt{3}/2$. Повторением ромба вдоль векторов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ можно покрыть все поперечное сечение стержня из волокнистого композита.

И наконец последний типичный элемент, который одновременно является и ячейкой периодичности — это прямоугольник ABCD со сторонами $AD = a\sqrt{3}$ и $AB = 3a$.

$$S_{\triangle NPQ} = a^2\sqrt{3}/4\,, \quad S_{\lozenge NPQR} = 2S_{\triangle NPQ} = a^2\sqrt{3}/2\,, \quad S_{\triangle GMN} = 3S_{\triangle NPQ} = a^2 3\sqrt{3}/4\,,$$
$$S_{\text{шестигр.}} = S_{\lozenge OCFE} = 6S_{\triangle NPQ} = a^2\,3\sqrt{3}/2\,, \quad S_{ABCD} = 12S_{\triangle NPQ} = a^2\,3\sqrt{3} \tag{2.1}$$

Все другие типичные элементы имеют большую чем у прямоугольника ABCD площадь. Относительная объёмная доля армировки во всех типичных элементах вычисляется по следующей формуле

$$v_a = \frac{S_{\text{арм.}}}{S_{\text{тип. эл.}}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,\frac{r^2}{a^2} \tag{2.2}$$

На рисунке справа изображен случай плотной упаковки. В этом случае $r = a\sqrt{3}/2$ и объёмная доля волокон максимальна $v_a = S_{\bigcirc}/S_{\text{шестигр.}} = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0.906$.

2.3 Сведение прямоугольной ячейки периодичности к кубу периодичности.

Прямоугольную ячейку периодичности ABCD, изображенную синим цветом на рисунке, можно путём масштабирования осей координат преобразовать в квадратную ячейку с заданной стороной $l_1 \leqslant l \leqslant l_2 = l_1\sqrt{3}$. Для этого вводим новые глобальные координаты x_1^* и x_2^*, а также новые локальные координаты z_1^* z_2^*, такие, что

$$x_i^* = \frac{l\,x_i}{l_i} \Rightarrow z_i^* = \frac{l\,z_i}{l_i}\,, \qquad 0 \leqslant z_i^* \leqslant l\,, \qquad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

На рисунке 1 показана схема преобразования координат для случая $l = l_1$. В этом случае все линейные размеры в направлении параллельном оси x_1 остаются без изменений, а размеры по оси x_2 сокращаются в отношении $l_1/l_2 = 1/\sqrt{3}$ раз. При этом включение радиуса $0 < r \leqslant l_1/2$ переходит в эллипс с полуосями $a_1 = r$ и $a_2 = rl_1/l_2$.

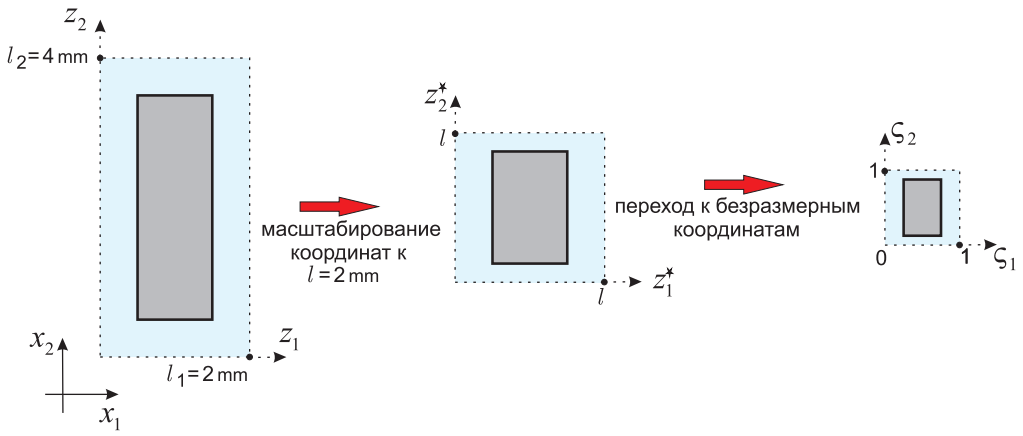


Рис. 1: *Схема преобразования координат при сведении прямоугольной ячейки периодичности $l_1 \times l_2$ к квадратной $l_1 \times l_1$. Переход к безразмерным локальным координатам.*

Переход от трёхмерной ячейки периодичности в виде прямоугольного параллелепипеда к кубу периодичности с ребром l реализуется совершенно аналогично двухмерному.

3 Эффективные физико-механические свойства композитов.

Композит состоит из объёмов вещества (компонентов, фаз) с различными свойствами. При действии внешних факторов он ведёт себя как некий однородный анизотропный материал, свойства которого отличаются от свойств его составляющих компонентов. Однако же свойства такого однородного тела зависят от физико-механических свойств фаз, их объёмных долей, геометрии, расположения, контактных условий. Такие усреднённые свойства называются **эффективными свойствами**.

3.1 Среднее значение функции в объёме.

Под средним значением функции $f(x)$, $x \in V$ распределённой в объёме V понимается интеграл по этому объёму поделённый на сам объём

$$\frac{1}{V}\int\limits_V f(x)dV \equiv \langle f \rangle$$

$$\textbf{IF } V = \bigcup_{i=1}^{i=n} V_i \quad \textbf{AND} \quad f_i(x) = const.\,,\ x \in V_i \quad \textbf{THEN}$$

$$\langle f \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i v_i\,, \quad v_i = \frac{V_i}{V}$$

v_i — относительная объёмная доля i-го компонента, где $f_i = const$.

3.2 Эффективные определяющие соотношения.

Эффективные свойства проявляются в определяющих соотношениях, то есть в соотношениях связывающих между собой причины и следствия в процессах, происходящих в телах.

Под эффективными определяющими соотношениями понимаются соотношения, связывающие между собой средние по представительному объёму значения причин и следствий. Материальные константы и функции, входящие в эти соотношения называются эффективными физико-механическими свойства (характеристиками) композита.

Экспериментальное определение всего комплекса эффективных свойств композита дорого и долго. Поэтому необходимы математические методы вычисления эффективных характеристик, позволяющие более или менее точно вычислять эффективные свойства.

В МДТТ под эффективными определяющими соотношениями понимаются соотношения позволяющие выразить средние напряжения через средние деформации ($<\underset{\sim}{\sigma}> \backsim <\underset{\sim}{\varepsilon}>$), либо наоборот средние деформации через средние напряжения ($<\underset{\sim}{\varepsilon}> \backsim <\underset{\sim}{\sigma}>$).

Материальные константы и функции, входящие в эти соотношения называются эффективными константами и соответственно эффективными функциями композита.

В общем случае эффективные материальные константы и функции, получаемые из прямых и обратных определяющих соотношений не являются взаимно обратными, то есть они не совпадают.

Для примера рассмотрим пока только упругие композиты. В одномерном случае (например в слоистом стержне) в каждом компоненте композита продольные напряжения пропорциональны продольным деформациям

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i$$

Здесь σ_i — напряжение в i-м компоненте, вызванное деформацией ε_i в этом же компоненте. Коэффициент пропорциональности E_i называется модулем Юнга — константа i-го материала, определяющая его упругие свойства при растяжении (сжатии). Находится из эксперимента.

3.3 Эффективные модули Фойхта и Рейсса.

В неоднородном стержне напряжение и деформации определяются по закону Гука

$$\sigma = E(x)\varepsilon\,, \qquad x \in [0, L] \tag{3.1}$$

I.) Пусть $\varepsilon = const.$, тогда можно усреднить выражение (3.1)

$$< \sigma >=< E > \varepsilon =< E >< \varepsilon > \tag{3.2}$$

По определению $< E >$ — эффективный модуль Юнга, который принято называть модулем Фойхта

$$\boxed{\boldsymbol{E^{(F)} \equiv < E >= \frac{1}{L}\int\limits_0^L E(x)dx}} \tag{3.3}$$

В случае, когда $E(x)$ — кусочно-постоянная функция

$$E^{(F)} = \sum_{i=1}^{n} E_i v_i\,, \qquad v_i = \frac{L_i}{L}$$

II.) Пусть теперь $\sigma = const.$, тогда можно усреднить выражение

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(x)}$$

Получим

$$< \varepsilon >=< 1/E > \sigma =< 1/E >< \sigma > \Rightarrow < \sigma >= \frac{1}{< 1/E >} < \varepsilon > \tag{3.4}$$

Следовательно, коэффициент при $< \varepsilon >$ также является эффективным модулем и называется он модулем Рейсса

$$\boxed{\boldsymbol{E^{(R)} \equiv \frac{1}{< 1/E >} = \frac{1}{\frac{1}{L}\int\limits_0^L \frac{1}{E(x)}dx}}} \tag{3.5}$$

В кусочно-постоянном случае

$$E^{(R)} = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{E_i}$$

3.4 Вилка Фойхта–Рейсса.

В механике композитов доказывается, что любой теоретический или же экспериментальный метод определения эффективного модуля упругости должен удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{< 1/E >} \leqslant E^{(\text{эфф})} \leqslant < E > \tag{3.6}$$

Неравенство (3.7) называется вилкой Фойхта–Рейсса.

В общем случае неоднородного анизотропного материала вместо закона Гука используется обобщенный закон Гука, связывающий компоненты тензора напряжений σ_{ij} с компонентами тензора деформаций ε_{ij}

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} \tag{3.7}$$

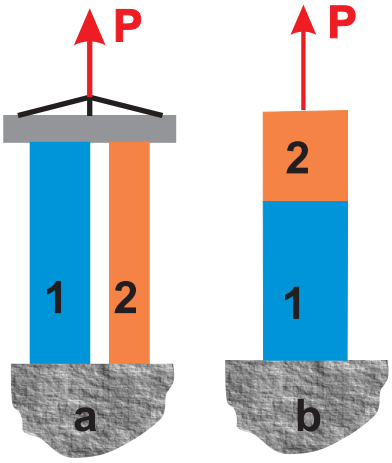
В этом случае вилка Фойхта–Рейсса представляет собой более сложное неравенство

$$\left\langle C^{-1}_{ijkl} \right\rangle^{-1} \gamma_{ij}\gamma_{kl} \leqslant C^{(\text{эфф})}_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} \leqslant \left\langle C_{ijkl} \right\rangle \gamma_{ij}\gamma_{kl}\,, \qquad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = const. \tag{3.8}$$

где γ_{ij} постоянный симметричный тензор, у которого не все компоненты нулевые.

3.5 Схема эксперимента по определению эффективных модулей Фойхта и Рейсса.

Рассмотрим неоднородный стержень, составленный из двух упругих материалов с модулями Юнга E_1 и E_2 и с постоянными по длине поперечными сечениями.



Метод Фойхта и метод Рейсса

I. В примере рис. 3.5a неоднородный в поперечном направлении составной стержень растягивается силой **P**, приложенной в центре жесткой прокладки на верхнем сечении. Прокладка нужна чтобы стержень №1 и стержень №2 получили одинаковое продольное перемещение и, соответственно, одинаковую продольную деформацию ε

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}\,,$$

где l_0 — первоначальная длина стержней, l — длина стержней после приложения нагрузки P. Пусть σ_1 и σ_2 — продольные напряжения в первом и втором стержнях, возникшие в

ответ на их продольную деформацию. Площади поперечных сечений обозначим через F_1 и F_2 соответственно. Предполагается, что продольные напряжения распределены равномерно по поперечному сечению каждого стержня, тогда

$$P = \sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_2 = \langle\sigma\rangle F\,, \qquad F = F_1 + F_2 \tag{3.9}$$

Здесь через $\langle\sigma\rangle$ обозначено среднее продольное напряжение в однородном стержне суммарной площадью $F = F_1 + F_2$. Из равенства (3.9) вытекает формула для среднего напряжения

$$\langle\sigma\rangle = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2\,, \qquad v_1 = \frac{F_1}{F}\,, \quad v_2 = \frac{F_2}{F} \tag{3.10}$$

Через v_1 и v_2 обозначены относительные доли поперечных сечений первого и второго стержней.

С другой стороны, в соответствии с законом Гука

$$\langle\sigma\rangle = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2 = E_1\varepsilon_1 v_1 + E_2\varepsilon_2 v_2 = \big(E_1 v_1 + E_2 v_2\big)\varepsilon = \langle E\rangle\langle\varepsilon\rangle = E^{(F)}\langle\varepsilon\rangle \tag{3.11}$$

В формуле (3.11) средние напряжения пропорциональны средним деформациям, следовательно коэффициент пропорциональности есть эффективный (по Фойхту) модуль Юнга.

II. На рисунке 3.5b представлена схема, по которой можно экспериментально определить эффективный модуль Рейсса. В этом случае $\sigma = P/F = const.$. Следовательно нужно воспользоваться обратным законом Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(x)} \;\Rightarrow < \varepsilon > = < 1/E > \sigma = < 1/E > < \sigma > \Rightarrow\; E^{(R)} = \frac{1}{< 1/E >}$$

3.6 Суть теоретического подхода к вычислению эффективных физико - механических характеристик композитов.

При теоретическом подходе к вычислению эффективных физико-механических характеристик нужно создать такие внешние воздействия, чтобы *средние значения полевых величин в каждом из представительных объёмов были одинаковы и совпадали со средними значениями во всем композиционном теле, состоящем из большого числа представительных объёмов.* Такой общий взгляд на проблему теоретического способа расчёта эффективных физико-механических свойств композиционных материалов изложен в работе [10, стр. 15].

Список литературы

[1] Седов Л.И. *Механика сплошной среды. Том 1.* Наука, Москва, 1970.

[2] Тимошенко С.П. *История науки о сопротивлении материалов: С краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений.* Книжный дом 'Либроком', Москва, 2009.

[3] Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела.* Наука, Москва, 1977.

[4] Кристенсен Р. *Введнение в механику композитов.* Мир, Москва, 1982.

[5] Нигматулин Р.И. *Основы механики гетерогенных сред.* Наука, Москва, 1978.

[6] Ломакин В.А. *Теория упругости неоднородных тел.* МГУ, Москва, 1976.

[7] Полилов А.Н. *Этюды по механике композитов.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2015.

[8] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов.* МГУ, Москва, 1984.

[9] Берже М. *Геометрия. Том первый.* Мир, 1984.

[10] Пагано Н. *Роль эффективных модулей в исследовании упругих свойств слоистых композитов. В кн. Механика композиционных материалов т.2., с.13-37. Пер с англ под ред. А.А Ильюшина и Б.Е. Победри.* Мир, 1978.