МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НИКАБАДЗЕ МИХАИЛ УШАНГИЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЧАСТЬ I

МОСКВА
2007

УДК 593.8

Никабадзе М.У.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. Часть I. – М.: ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова. 2007. – 87 с.

Приведены основные понятия и определения из линейной алгебры и функционального анализа. Рассмотрена задача о нахождении собственных тензоров и собственных значений тензора любого четного ранга. Сформулированы некоторые утверждения и теоремы.

Библиография: 21 названий.

Р е ц е н з е н т Б.Е. Победря, профессор

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Московского университета

Р е к о м е н д о в а н о использование в учебном процессе кафедрой механики композитов механико-математического факультета Московского университета

Издательство ЦПИ при механико-математическом
факультете МГУ, 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ.
Лицензия на издательскую деятельность ИД №04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова
и Франко-русского центра им. А.М. Ляпунова

Введение

Тензорное исчисление располагает хорошими фундаментальными монографиями и учебниками, часть из которых приведены в списке литературы [4, 8, 11, 15, 16, 19]. Автору посчастливилось во время аспирантуры и докторантуры слушать замечательные курсы лекций по тензорному анализу, различным разделам механики деформируемого твердого тела (МДТТ) и механике сплошной среды (МСС) (математическая теория пластин и оболочек, основы МДТТ, основы МСС, механика композитов и др.) в тензорном исчислении, читаемые в течении нескольких десятилетий для студентов механико-математического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова профессором Б.Е.Победрей. Они оказали неоценимую роль при формировании автора, как специалиста по тенорному исчислению и разным разделам МДТТ. В частности, по теории тонких тел.

Уже много лет автор, работая доцентом по кафедре механики композитов механико-математического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова, сам читает следующие спецкурсы для студентов механиков: «Тензорный аппарат механика», «Математическая классическая теория оболочек», «Математическая неклассическая теория оболочек», «Теории тонких тел» и др. Все эти спецкурсы ведутся с использованием тензорного исчисления. При чтении спецкурсов имеются вопросы, которые или недостаточно освещены в имеющейся литературе или изложены в труднодоступных книгах. Поэтому созрела необходимость издания, частично устраняющего вышеуказанную проблему. Таким образом, была написана настоящая книга, которая состоит из двух частей.

Часть I состоит из двух глав. В первой главе приведены основные определения из линейной алгебры и функционального анализа. В частности, даны определения полугруппы, группы, кольца и поля, а также модуля и линейного пространства [1–3, 21]. Сформулирована локальная теорема существования гомеоморфизмов. Введены определения внутреннего r-произведения и локального скалярного произведения тензоров, ранг которых не меньше r, а также локальной нормы тензора [4]. Даны определения, сформулированы и доказаны основные теоремы и утверждения, касающиеся линейной зависимости и независимости системы тензоров любого ранга. Кроме этого, приведены определения и доказательства некоторых теорем, относящихся к ортогональной и биортонормальной системам тензоров. Дано определение мультипликативного базиса (мультибазиса) и рассмотрены способы построения базисов модулей с помощью базисов модулей меньших размерностей. В этой связи сформулировано и доказано несколько теорем. Более подробно изучены тензорные модули четного порядка и задачи о нахождении собственных значений и собственных тензоров тензора любого четного ранга, чем в [4]. Даны канонические представления тензора любого четного ранга. Следует заметить, что аналогичную задачу для тензора модулей упругости была рассмотрена польским ученым Я.Рихлевским в 1983-1984 гг., позже, чем она была изучена для тензора любого четного ранга советским ученым И.Н.Векуа.

Во второй главе приведены элементарные сведения о многочленах с тензорными коэффициентами и о действиях над ними. Сформулирована и доказана обобщенная теорема Безу, на основании которой доказана теорема Гамильтона Кэли. Рассмотрено и другое доказательство последней теоремы. Доказано несколько важных теорем, применяющих при выводе формулы, выражающий присоединенный тензор $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ для тензорного двучлена $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ через тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ (элементами этого модуля являются комплексные тензоры ранга $2p$) и его инварианты. Далее даны определения минимального многочлена тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и тензора модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ (элементами этого модуля являются комплексные тензоры ранга p), а также тензора модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно заданного тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Здесь Ω – некоторая область n-мерного евклидова (риманова) пространства. Сформулированы и доказаны некоторые теоремы, касающиеся минимальных многочленов. Кроме того, сформулированы 1-я, 2-я и 3-я теоремы о расщеплении модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ на инвариантные подмодули. Особое внимание уделено теоремам о сопряженном, нормальном, эрмитовом и унитарном тензорах модулей $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (элементы этого модуля — действительные тензоры ранга $2p$). Доказаны теоремы о полярном разложении тензоров модулей $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а также теоремы о существовании общей полной ортонормальной системы собственных тензоров для конечного или бесконечного множества попарно коммутирующих нормальных тензоров модулей $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Даны канонические представления вышеупомянутых тензоров.

В конце главы приведены важные с точки зрения практики упражнения, выполнение которых позволит представить законы и уравнения МДТТ во многих случаях в более удобной форме, чем имеющиеся в настоящее время.

Часть II состоит из двух глав. В первой главе рассмотрены различные способы построения линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров. Сформулированы утверждения и теоремы, позволяющие построить эти тензоры. Построены линейно независимые вышеуказанные тензоры с первого до шестого ранга включительно, когда компоненты тензора не обладают никакой симметрией и в том случае, когда имеются разные виды симметрии.

Во второй главе изложены основы тензорного исчисления при новой параметризации области тонкого тела, заключающейся в использовании нескольких базовых поверхностей для построения теорий тонких тел, а также теорий пластин, оболочек и многослойных конструкций. В конце главы приведены упражнения.

Автор выражает самую глубокую благодарность профессорам Б.Е. Победре и Д.В. Георгиевскому за полезные советы и обсуждения, а также старшего преподавателя А.Р. Улуханян за большую помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты №05-01-00397-а, №05-01-00401-а.

Глава 1

Основные понятия и определения из линейной алгебры и функционального анализа

1.1 Основные понятия и определения из теории групп

Приведем основные понятия и определения из линейной алгебры и функционального анализа. [1–4, 9, 13, 16, 21].

Определение 1.1.1. Полугруппой называется множество, в котором определено действие, сопоставляющее каждой упорядоченной паре элементов третий — результат действия. Действие предполагается ассоциативным. Полугруппами являются: множество целых неотрицательных чисел относительно действия сложения, то же множество относительно действия умножения.

Определение 1.1.2. Полугруппа называется группой, если в ней существует нейтральный элемент e такой, что при всех a из группы $a*e = a$ (через $*$ обозначен знак действия), и для каждого элемента a существует обратный a^{-1} такой, что $a * a^{-1} = e$. Примерами групп могут служить: множество всех целых чисел относительно сложения, множество положительных рациональных чисел относительно сложения. Эти группы коммутативны. Коммутативные группы называются также абелевыми.

Действие в группе обозначается обычно как умножение (мультипликативная группа), иногда как сложение (аддитивная группа). Действие сложения применяется только для абелевых групп. Нейтральный элемент в мультипликативной группе обозначается через 1, а в аддитивной группе — через 0. Обратный к a элемент в мультипликативной группе обозначается через a^{-1}, а в аддитивной — через $-a$ (и называется противоположным элементом).

Определение 1.1.3. Кольцом называется множество объектов произвольной природы, в котором определены два действия — «сложение» и «умножение», сопоставляющие упорядоченным парам элементов их «сумму» и «произведение», являющиеся элементами того же множества. Предполагается, что действия удовлетворяют следующим условиям (требованиям):

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения).

2. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).
3. Существует нулевой (нейтральный) элемент 0 такой, что $a + 0 = a$ при любом a.
4. Для каждого a существует противоположный $-a$ такой, что $a + (-a) = 0$.
5. $(a + b)c = ac + bc$ (левая дистрибутивность).
6. $c(a + b) = ca + cb$ (правая дистрибутивность).

Первые четыре условия обозначают, что элементы кольца образуют абелеву группу относительно сложения, которая называется аддитивной группой кольца. На основании перечисленных условий нетрудно доказать утверждения.

Утверждение 1.1.1. Если $a + x = a + y$, то $x = y$.

Утверждение 1.1.2. При данных a и b уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $(-a) + b$.

Заметим, что утверждения 1.1.1 и 1.1.2 справедливы для любой абелевой группы, а не только для аддитивной группы кольца. Кроме того, из утверждения 1.1.2 следует единственность нуля и противоположного элемента, ибо 0 — решение уравнения $a + x = a$, а $-a$ — решение уравнения $a + x = 0$.

Утверждение 1.1.3. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ при любом a.

В общем определении кольца на действие умножения не накладывается никаких ограничений кроме дистрибутивности со сложением. Однако часто возникает необходимость рассматривать кольца, в которых умножение удовлетворяет тем или иным дополнительным условиям. Наиболее употребимыми являются следующие:

7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения). При выполнении этого условия элементы кольца образуют полугруппу относительно умножения.

8. $ab = ba$ (коммутативность умножения).

9. Существование единичного элемента 1 (т.е. такого, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого элемента a).

10. Существование обратного элемента a^{-1} для любого элемента a, отличного от 0.

В конкретных кольцах эти условия могут выполняться как порознь, так и вместе в различных комбинациях. Кольцо называется *ассоциативным*, если в нем выполнено условие 7, *коммутативным*, если выполнено условие 8, *коммутативным и ассоциативным*, если выполнены условия 7 и 8. Если выполнено условие 9, говорят о *кольце с единицей*. При этом слово "кольцо"снабжается прилагательным в зависимости от выполнения условий 7 и 8.

Если в кольце есть единица, то она единственна.

Кольцо называется областью целостности, если из равенства $ab = 0$ следует, что хотя бы один из сомножителей a или b равен 0.

Определение 1.1.4. Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный a^{-1}.

Иными словами, поле есть кольцо, в котором отличные от нуля элементы образуют коммутативную группу, которая носит название мультипликативной группы поля.

Любое поле есть область целостности. Действительно, если $ab = 0$ и $a \neq 0$, то $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$ и, следовательно, $b = 0$.

Приведем несколько простых примеров. Множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел образуют кольцо, коммутативное, ассоциативное и с единицей. Оно является областью целостности. Полем является множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел, множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел и множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел.

1.2 Параметризация области

Множество Ω точек $x\,(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ называется n-мерным открытым множеством пространства $\mathbb{R}^n$, если все его точки внутренние, т.е. для любой точки $x \in \Omega$ существует ε-окрестность $(O_\varepsilon(x))$, целиком принадлежащая множеству Ω. Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется окрестностью этой точки. Множество Ω называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Открытое множество называется связным, если любые две точки этого множества могут быть соединены ломанной, целиком лежащей в нем (или открытое множество называется связным, если его нельзя представить как объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств). Открытое связное множество Ω называется областью пространства $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что соотношения

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.2.1}$$

(короче $x' = \varphi(x)$) реализуют взаимно однозначное отображение $\varphi : \Omega \to \Omega'$, где Ω и Ω' — некоторые n-мерные области пространства $\mathbb{R}^n$. Отображение $x' = \varphi(x)$ называется непрерывным в точке $x_0 \in \Omega$, если любая ε-окрестность $O'_\varepsilon(x'_0)$ образа $x'_0 = \varphi(x_0)$ точки x_0 содержит δ-окрестность $O'_\delta(x'_0)$, прообраз $\varphi^{-1}\big[O'_\delta(x'_0)\big]$ которой представляет окрестность точки x_0. Если отображение $x' = \varphi(x)$ непрерывно в каждой точке $x \in \Omega$, то говорят, что оно непрерывно в Ω.

Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение $\varphi : \Omega \to \Omega'$ называется топологическим отображением. Такие отображения называются еще гомеоморфизмами области Ω. Пусть $\Gamma(\Omega)$ — множество гомеоморфизмов φ области Ω. Очевидно, множеству $\Gamma(\Omega)$ принадлежит тождественное отображение: $x^{i'} = x^i$, $i = \overline{1, n}$. Всякий гомеоморфизм $x' = \varphi(x) \in \Gamma(\Omega)$ осуществляет однозначную параметризацию области Ω. В этой связи координаты $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$ точки $x' = \varphi(x)$ можно рассматривать как координаты точки области Ω. Иными словами, всякий гомеоморфизм $x' = \varphi(x) \in \Gamma(\Omega)$ определяет некоторую координатную систему в Ω, которую для краткости обозначим через (x'). Следовательно, если (x') и (x) — две координатные системы в Ω, то существует гомеоморфизм $\varphi \in \Gamma(\Omega)$ такой, что $x' = \varphi(x)$. Соотношения (1.2.1) в дальнейшем будут рассматриваться как преобразования координат точек области Ω. Кроме того, будем предполагать, что функции $\varphi^{i'}$, $i = \overline{1, n}$, принадлежат некоторому классу $C_k(\Omega)$, что будет обозначаться еще символом $\varphi \in C_k$. Если $\varphi \in C_k$ для любого $k \geq 0$, то будем иметь гомеоморфизмы класса C_∞.

В курсе математического анализа доказывается локальная теорема существования гомеоморфизмов. В связи с важностью этой теоремы приведем ее формулировку.

Теорема 1.2.1. *Пусть функции $\varphi^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in C_k(\Omega)$, где k — некоторое натуральное число, большее единицы, или $k = \infty$, и в некоторой фиксированной точке $x_0(x_0^1, \ldots, x_0^n) \in \Omega$ отличен от нуля функциональный детерминант (якобиан) преобразования* (1.2.1), *т.е.*

$$I(x', x) = \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \det\big(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\big) \neq 0 \quad \text{при } x = x_0. \tag{1.2.2}$$

Тогда соотношение (1.2.1) *осуществляет гомоморфизм $O(x_0) \Leftrightarrow O'(x'_0)$, где $O(x_0)$ и $O'(x'_0)$ — некоторые окрестности точек x_0 и $x'_0 = \varphi(x_0)$ соответственно.*

Если условие (1.2.2) выполняется всюду в области Ω, то это обеспечивает независимость функций $\varphi^{i'}$, что, конечно, является необходимым условием для того, чтобы соотношения (1.2.1) осуществляли глобальный гомеоморфизм области Ω.

Определение 1.2.1. Отнесение области (или, вообще, пространства) к той или иной системе координат называется параметризацией области (пространства).

Координаты точки иногда называют также параметрами.

Введем обозначения

$$D^{i'}_j = \frac{\partial\, x^{i'}}{\partial\, x^j}, \quad D^j_{i'} = \frac{\partial\, x^j}{\partial\, x^{i'}}, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Тогда, очевидно, имеем соотношения $D^j_{i'} D^{i'}_k = \delta^j_k$, $D^{i'}_j D^j_{k'} = \delta^{i'}_{k'}$, $\det(D^j_{i'})\det(D^{k'}_n) = 1$. Следовательно, функциональные детерминанты (якобианы) преобразований координат удовлетворяют условиям

$$I(x', x) = \det(D^{i'}_j) \neq 0, \quad I^{-1}(x', x) = \det(D^j_{i'}) \neq 0.$$

Если фиксировать какие-нибудь $n-1$ из n координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и изменять оставшуюся координату, то соответствующая точка x опишет линию, которая называется координатной линией. Если эта линия получена непрерывным изменением координаты x^i, то ее называется координатной линией (x^i). Совокупность координатных линий $(x^1), (x^2), \ldots, (x^n)$ образует в пространстве сеть линий координатной системы (x). Предполагается, что в каждой точке рассматриваемой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ проходят n координатных линий и что касательные к этим линиям в точке их пресечения является линейно независимой системой векторов. Можно доказать, что при соблюдении (1.2.2) это требование всегда выполняется.

Пусть Ω — некоторая область n-мерного (евклидова или риманова) пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbb{C}(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}(\Omega)\big)$ множество отображений $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\big(g : \Omega \to \mathbb{R}\big)$. Относительно каждой системы координат (x) в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отображение f (g) будет выражаться комплексной (вещественной) функцией $f(x)$ $\big(g(x)\big)$ координат точек области Ω, которую назовем компонентой или представлением отображения f (g) относительно координатной системы (x). Обозначим множество компонент (представителей) отображений из $\mathbb{C}(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}(\Omega)\big)$ относительно координатной системы (x) через $\mathbb{C}_x(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}_x(\Omega)\big)$. Предполагаем, что для каждой координатной системы (x) множество $\mathbb{C}_x(\Omega)$ $(\mathbb{R}_x(\Omega))$ представляет кольцо. Это имеет место, например, если $\mathbb{C}_x(\Omega)$ $(\mathbb{R}_x(\Omega))$ представляет множество измеримых по Лебегу функций в области Ω. Операции (действия) сложения и произведения в $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$ определяются следующим образом: если $f, g \in \mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$, то под $f+g$ и fg будем подразумевать элементы из $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$, компоненты которых относительно координатной системы (x) соответственно равны $f(x)+g(x)$ и $f(x)g(x)$. Тогда ясно, что $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$ является кольцом. При этом $\mathbb{R}(\Omega)$ — подкольцо $\mathbb{C}(\Omega)$.

Очевидно, все рассуждения, которые имеют место для кольца $\mathbb{C}(\Omega)$, как правило, будут оставаться в силе и для подкольца $\mathbb{R}(\Omega)$. Теперь введем определения модуля и линейного пространства.

Определение 1.2.2. Модуль над кольцом $\mathbb{K}$ $\big(\mathbb{K} = \mathbb{R}(\Omega)$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\Omega)\big)$ есть множество V произвольных элементов, называемых векторами, удовлетворяющее следующим условиям («аксиомам линейного пространства»):

1. Для любых двух векторов $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ определен вектор $\mathbb{A}$, называемый суммой векторов $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ и обозначаемый через $\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$. При этом для любых двух векторов $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ имеем

$\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1$(свойство коммутативности сложения), а для любых трех векторов $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ и $\mathbb{A}_3$

$(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2) + \mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_1 + (\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3)$ (свойство ассоциативности сложения).

2. В множестве V имеется элемент $\mathbb{O}$, называемый нулевым вектором, удовлетворяющий для любого $\mathbb{A}$ условию

$\mathbb{A} + \mathbb{O} = \mathbb{A}$.

3. Ко всякому вектору $\mathbb{A}$ имеется вектор $-\mathbb{A}$, называемый противоположным вектору $\mathbb{A}$ и удовлетворяющий условию

$\mathbb{A} + (-\mathbb{A}) = \mathbb{O}$.

4. Для любого вектора $\mathbb{A}$ и любого элемента $\lambda \in \mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$ определен вектор $\lambda\mathbb{A}$, называемый произведением вектора $\mathbb{A}$ на элемент λ кольца $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$. При этом для двух векторов $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$ имеем

$\lambda(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2) = \lambda\mathbb{A}_1 + \lambda\mathbb{A}_2$ (первая дистрибутивность);

для любого вектора $\mathbb{A}$ и любых двух элементов λ_1 и λ_2 из $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$ имеем

$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbb{A} = \lambda_1\mathbb{A} + \lambda_2\mathbb{A}$ (вторая дистрибутивность) и

$\lambda_1(\lambda_2\mathbb{A}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathbb{A}$ (ассоциативность умножения на элементы из кольца $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$).

Наконец, если в кольце $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$ имеется единица, то требуется выполнение условия $1\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

Вот и все аксиомы модуля над кольцом $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$. Модуль над кольцом $\mathbb{C}(\Omega)$ $(\mathbb{R}(\Omega))$ часто просто называют $\mathbb{C}(\Omega)$-модулем ($\mathbb{R}(\Omega)$-модулем). Примером модуля является, например, множество векторных (тензорных) полей V над кольцом скалярных функций.

Заметим, что из аксиомы 2 следует, что модуль над кольцом $\mathbb{K}$ всегда есть непустое множество векторов. Но состоять из одного нулевого вектора $\mathbb{O}$ он может. В этом «нулевом» модуле действия таковы: $\mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$, $\lambda\mathbb{O} = \mathbb{O}$ при любом λ.

Определение 1.2.3. Если $\mathbb{K}$ является полем, модуль называется линейным (векторным) пространством над полем $\mathbb{K}$. В частности, если поле коэффициентов $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то линейное пространство над $\mathbb{K}$ называется вещественным линейным пространством. В том случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, имеем комплексное линейное пространство.

Следует заметить, что в качестве множества V, входящего в определение модуля (линейного пространства) можно рассматривать, например, множество тензоров любого заданного ранга p в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть M представляет $\mathbb{C}(\Omega)$-модуль (соответственно $\mathbb{R}(\Omega)$-модуль). Обозначим через $M(\Omega)$ множество отображений $h : \Omega \to M$. Легко усмотреть, что $M(\Omega)$ также представляет $\mathbb{C}(\Omega)$-модуль (соответственно $\mathbb{R}(\Omega)$-модуль). Относительно каждой координатной системы (x) всякий элемент $h \in M(\Omega)$ выражается некоторой функцией $h(x)$ координат точки области Ω, которую назовем компонентой h относительно координатной системы (x). Обозначим множество функций $h(x)$ через $M_x(\Omega)$. Следовательно, $M_x(\Omega)$ представляет модуль над кольцом $\mathbb{C}_x(\Omega)$ $(\mathbb{R}_x(\Omega))$.

1.3 Локально гильбертовы модули тензоров

Рассмотрим некоторые общие вопросы тензорной алгебры, используя элементарные понятия алгебры и функционального анализа [2–4].

Модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Обозначим через $\mathbb{C}_p(\Omega)$ множество тензоров ранга $p \geq 0$ из $\mathbb{C}(\Omega)$, где Ω — некоторая область n-мерного риманова пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим, вообще говоря, комплексные тензоры, которые можно представить в виде $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — вещественные тензоры. Следовательно, $\mathbb{C}_0(\Omega)$ — кольцо скаляров (тензоров нулевого ранга). Нетрудно заметить, что множество $\mathbb{C}_p(\Omega)$ является модулем над кольцом скаляров $\mathbb{C}_0(\Omega)$, т.е. $\mathbb{C}_p(\Omega)$ представляет $\mathbb{C}_0(\Omega)$-модуль.

Пусть $M_p(\Omega)$ — множество тензоров ранга p с элементами из некоторого модуля $M(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$. Конечно, $M_p(\Omega)$ представляет модуль над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$. Зная, что $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $M_p(\Omega)$ являются модулями над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ ($\mathbb{C}_0(\Omega)$-модулем), в дальнейшем для краткости будем говорить «модули $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $M_p(\Omega)$». Число p назовем порядком модулей $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $M_p(\Omega)$.

Если тензор $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то сопряженный тензор $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{U} - i\mathbb{V} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. В дальнейшем будем предполагать, что элементы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ — непрерывные тензоры в области Ω. Кроме того, как и выше, будем предполагать, что переход от одних координат к другим осуществляется при помощи преобразований (1.2.1) некоторого класса C_k, $k \geq 1$. Поэтому, если тензор принадлежит классу C_m, $0 \leq m < k$, относительно одной, произвольно выбранной системы координат, то он принадлежит тому же классу относительно любой другой системы координат.

Следовательно, принадлежность тензора классу C_m, $m < k$, является инвариантным его свойством. При $k = \infty$ можно рассматривать тензоры класса C_∞.

1.3.1 Внутреннее r-произведение тензоров

Пусть $\mathbb{A}$ — тензор ранга $p + r$ с компонентами $A_{i_1 i_2 \dots i_p k_1 k_2 \dots k_r}$, а $\mathbb{B}$ — тензор ранга $r + q$ с компонентами $B^{l_1 l_2 \dots l_r j_1 j_2 \dots j_q}$.

Определение 1.3.1. Внутренним r-произведением тензоров $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ называется тензор, который обозначается через $\mathbb{D} = \mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B}$ и компоненты которого определяются следующим[1] образом:

$$D_{i_1 i_2 \dots i_p}{}^{j_1 j_2 \dots j_q} = (\mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B})_{i_1 i_2 \dots i_p}{}^{j_1 j_2 \dots j_q} = A_{i_1 i_2 \dots i_p k_1 k_2 \dots k_r} B^{k_1 k_2 \dots k_r j_1 j_2 \dots j_q}. \tag{1.3.1}$$

Итак, при внутреннем r-произведении тензоров происходит r-кратное сокращение индексов. Поэтому во внутреннем r-произведении могут участвовать тензоры, ранг каждого из которых не меньше r. Если не происходит сокращение индексов ($r = 0$), то такое произведение называется прямым произведением тензоров.

Если $p = q = 0$, то будем опускать символ $\overset{r}{\otimes}$ и просто писать $\mathbb{AB}$. В этом случае внутреннее r-произведение назовем просто внутренним произведением. Оно, конечно, выражается формулой

$$\mathbb{AB} = A_{k_1 k_2 \dots k_r} B^{k_1 k_2 \dots k_r}. \tag{1.3.2}$$

Следует заметить, что если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — тензоры из $\mathbb{C}(\Omega)$ и внутреннее произведение $\mathbb{AB}$ обращается в нуль для любого тензора $\mathbb{B}$, то $\mathbb{A} = 0$.

1.3.2 Локальное скалярное произведение тензоров. Локальная норма тензора. Угол между двумя тензорами

Введем в $\mathbb{C}_p(\Omega)$ понятие локального скалярного произведения тензоров. Если $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, $\mathbb{W}' = \mathbb{U}' + i\mathbb{V}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ то выражение

$$(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x \equiv \mathbb{W}\overline{\mathbb{W}}' = \mathbb{UU}' + \mathbb{VV}' + i(\mathbb{VU}' - \mathbb{UV}') \tag{1.3.3}$$

[1] Определения операции свертки и следа эндоморфизма можно смотреть в [2].

называется локальным скалярным произведением тензоров $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ в точке x области Ω. Здесь $\mathbb{U}\mathbb{U}'$, $\mathbb{V}\mathbb{V}'$, $\mathbb{V}\mathbb{U}'$ и $\mathbb{U}\mathbb{V}'$ обозначают внутренние произведения соответствующих вещественных тензоров (1.3.2). Например,

$$\mathbb{U}\mathbb{U}' = \mathbb{U}_{i_1 i_2 \dots i_p}\mathbb{U}'^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

где индексы принимают значения $1, 2, \dots, n$. Аналогично в силу (1.3.1) можно ввести понятие r-локального скалярного произведения. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{p+r}(\Omega)$ и $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_{q+r}(\Omega)$. Тогда r-локальным скалярным произведением тензоров $\mathbb{W}$, $\mathbb{W}'$ называется тензор, обозначаемый через $\mathbb{D} = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')^{(r)}_x = \mathbb{W} \overset{r}{\otimes} \overline{\mathbb{W}}\,'$, компоненты которого определяются в виде

$$D_{i_1 i_2 \dots i_p}{}^{j_1 j_2 \dots j_q} = w_{i_1 i_2 \dots i_p k_1 k_2 \dots k_r} \overline{w}\,'^{k_1 k_2 \dots k_r j_1 j_2 \dots j_q}. \tag{1.3.4}$$

Очевидно, при $p = q = 0$ имеем

$$D = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = \mathbb{W}\overline{\mathbb{W}}\,' = w_{k_1 k_2 \dots k_r} \overline{w}\,'^{k_1 k_2 \dots k_r}. \tag{1.3.5}$$

Видно, что (1.3.5) совпадает с (1.3.3). Нетрудно заметить, соотношение (1.3.4) и, конечно, (1.3.5) сохраняют силу, если $\mathbb{W} \in M_{p+r}(\Omega)$ и $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_{q+r}(\Omega)$.

Локальное скалярное произведение $(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x$ тензоров $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$ и $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ является скаляром $(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x \in M_0(\Omega)$.

Легко показать, что в каждой точке x области Ω оно обладает следующими свойствами:

1) $(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = \overline{(\mathbb{W}, \mathbb{W}')}_x, \quad \forall\, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$.
2) $\lambda(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\lambda\, \mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \overline{\lambda}\mathbb{W}')_x, \quad \forall\, \mathbb{W} \in M_p(\Omega),\ \forall\, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega),\ \forall \lambda \mathbb{C}$.
3) $(\mathbb{W} + \mathbb{W}', \mathbb{W}'')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{W}'')_x + (\mathbb{W}', \mathbb{W}'')_x, \quad \forall\, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in M_p(\Omega),\ \forall\, \mathbb{W}'' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$,
$(\mathbb{W}, \mathbb{W}' + \mathbb{W}'')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x + (\mathbb{W}, \mathbb{W}'')_x, \quad \forall\, \mathbb{W} \in M_p(\Omega),\ \forall\, \mathbb{W}', \mathbb{W}'' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$.

Из этого свойства следует, что $(\mathbb{W}, \mathbb{W}')$ — билинейная форма.

4) Если $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то $(\mathbb{W}, \mathbb{W})_x = \mathbb{U}\mathbb{U} + \mathbb{V}\mathbb{V} \geq 0$, причем знак равенства достигается только в том случае, когда $\mathbb{W}(x) = 0,\ \ x \in \Omega$.

Определение 1.3.2. Неотрицательная функция

$$||\mathbb{W}||_x = \sqrt{(\mathbb{W}, \mathbb{W})_x} = (\mathbb{U}\mathbb{U} + \mathbb{V}\mathbb{V})^{1/2} \geq 0, \quad \forall\, \mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega) \tag{1.3.6}$$

называется локальной нормой тензора $\mathbb{W}$.

Нетрудно доказать неравенство

$$|(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x| \leq ||\mathbb{W}||_x ||\mathbb{W}'||_x, \quad \forall\, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega). \tag{1.3.7}$$

В самом деле, пусть $\lambda = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = \rho\, e^{i\varphi}$, где $\rho = |(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x|$ — вещественная положительная постоянная, $\varphi = \arg(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x$. Тогда

$$||\mathbb{W} + \lambda\, \mathbb{W}'||^2_x = ||\mathbb{W}||^2_x + 2\rho|(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x| + \rho^2 ||\mathbb{W}'||^2_x \geq 0.$$

Это неравенство верно для любого положительного действительного ρ, откуда следует неравенство (1.3.7).

Теперь докажем неравенство треугольника

$$||\mathbb{W} + \mathbb{W}'||_x \leq ||\mathbb{W}||_x + ||\mathbb{W}'||_x, \quad \forall\, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega). \tag{1.3.8}$$

В силу (1.3.7) легко получаем неравенство

$$||\mathbb{W}+\mathbb{W}'||_x^2 \leq ||\mathbb{W}||_x^2 + 2||\mathbb{W}||_x||\mathbb{W}'||_x + ||\mathbb{W}'||_x^2 = \big(||\mathbb{W}||_x + ||\mathbb{W}'||_x\big)^2.$$

Нетрудно заметить, что из последнего неравенства следует (1.3.8), ч.т.д.

Из изложенного выше заключаем, что модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в каждой точке области Ω обладает свойством гильбертова пространства. В этой связи назовем его локальным гильбертовым пространством.

Определение 1.3.3. Будем говорить, что тензоры $\mathbb{W}$, $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ ортогональны в точке x, если

$$(\mathbb{W},\mathbb{W}')_x = \mathbb{W}\overline{\mathbb{W}}\,' = 0. \tag{1.3.9}$$

Очевидно, для ортогональных тензоров имеет место теорема Пифагора

$$||\mathbb{W}+\mathbb{W}'||_x^2 = ||\mathbb{W}||_x^2 + ||\mathbb{W}'||_x^2, \quad \forall\, \mathbb{W},\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega),\ \ x\in\Omega.$$

Заметим, что косинус угла между вещественными тензорами $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}'$ определяется формулой

$$\cos\psi = \frac{(\mathbb{U},\mathbb{U}')_x}{||\mathbb{U}||_x||\mathbb{U}'||_x}, \quad \forall\, \mathbb{U},\mathbb{U}' \in \mathbb{C}_p(\Omega),\ \ x\in\Omega.$$

Отсюда, учитывая (1.3.7), получаем $|\cos\psi| \leq 1$.

1.3.3 Линейная зависимость и линейная независимость тензоров

Определение 1.3.4. Выражение вида

$$\lambda_1\mathbb{A}_1(x) + \lambda_2\mathbb{A}_2(x) + \ldots + \lambda_k\mathbb{A}_k(x), \tag{1.3.10}$$

где $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ — тензоры из модуля $M_p(\Omega)$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — коэффициенты из $\mathbb{C}$, называется линейной комбинацией тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ в точке $x \in \Omega$.

Определение 1.3.5. Линейная комбинация (1.3.10) называется нетривиальной в точке $x \in \Omega$, если в ней хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ отличен от нуля.

Определение 1.3.6. Линейная комбинация вида

$$0\cdot\mathbb{A}_1(x) + 0\cdot\mathbb{A}_2(x) + \ldots + 0\cdot\mathbb{A}_k(x)$$

называется тривиальной; она, очевидно, равна нулевому тензору.

Определение 1.3.7. Система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ из модуля $M_p(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ называется линейно зависимой в точке $x \in \Omega$, если существует хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация этих тензоров, равная нулевому тензору. В противном случае, т.е. если только тривиальная линейная комбинация этих тензоров равна нулевому тензору, система тензоров называется линейно независимой в этой точке.

Часто рассматривают определение, эквивалентное этому.

Определение 1.3.8. Система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ из модуля $M_p(\Omega)$ называется линейно независимой в точке $x \in \Omega$, если любая нетривиальная линейная комбинация этих тензоров отлична от нуля. В противном случае она называется линейно зависимой в этой точке.

Утверждение 1.3.1. Система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ из $M_p(\Omega)$ линейно зависима в точке $x \in \Omega$ в том и только в том случае, когда один из тензоров является линейной комбинацией остальных.

Утверждение 1.3.2. Если система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ из $M_p(\Omega)$ линейно независима в точке $x \in \Omega$, а система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$, $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ из $M_p(\Omega)$ линейно зависима в этой точке, то тензор $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ есть линейная комбинация тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$.

Доказательства этих утверждений ничем не отличаются от доказательств аналогичных утверждений для векторов [1, 21]. Поэтому на их доказательствах останавливаться не будем.

Теорема 1.3.1. *(о линейной зависимости линейных комбинаций) Если тензоры* $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x)$, $\ldots$, $\mathbb{A}_k(x)$ *в точке* $x \in \Omega$ *являются линейными комбинациями тензоров* $\mathbb{B}_1(x)$, $\mathbb{B}_2(x)$, $\ldots$, $\mathbb{B}_m(x)$ *в этой же точке и* $k > m$, *то система тензоров* $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ *линейно зависима.*

Эта теорема даказывается методом математической индукции так же, как аналогичная теорема для системы строк (векторов) [21].

Определение 1.3.9. Система тензоров в точке $x \in \Omega$ называется порождающей, если все тензоры в этой точке рассматриваемого модуля являются их линейными комбинациями.

Определение 1.3.10. Если для модуля существует конечная порождающая система тензоров в точке $x \in \Omega$, то модуль называется конечномерным в этой точке, в противном случае — бесконечномерным.

Заметим, что в конечномерном модуле не могут существовать линейно независимые системы, число тензоров в которых больше, чем в порождающей системе тензоров, ибо в силу теоремы о линейной зависимости линейных комбинаций любая система, превосходящая по числу тензоров порождающую систему, линейно зависима.

Утверждение 1.3.3. Любая минимальная (по числу тензоров) порождающая система тензоров в точке $x \in \Omega$ линейно независима в этой точке.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ — минимальная порождающая система тензоров. Если она линейно зависима, то один из тензоров, скажем $\mathbb{A}_k$, есть линейная комбинация остальных и всякая линейная комбинация тензоров $\mathbb{A}_1(x), \ldots,$ $\mathbb{A}_{k-1}(x)$, $\mathbb{A}_k(x)$ есть линейная комбинация меньшей системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \ldots, \mathbb{A}_{k-1}(x)$, которая тем самым оказывается порождающей системой тензоров. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

Утверждение 1.3.4. Любая максимальная (по числу тензоров) линейно независимая система тензоров в точке $x \in \Omega$ является порождающей.

Доказательство. В самом деле, пусть $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ — максимальная линейно независимая система и $\mathbb{A}$ — любой тензор модуля. Тогда система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots,$ $\mathbb{A}_k(x)$, $\mathbb{A}$ не будет линейно независимой и в силу утверждения 1.3.2 тензор $\mathbb{A}$ будет линейной комбинацией тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$, что доказывает утверждение. □

Утверждение 1.3.5. Любая линейно независимая порождающая система тензоров в точке $x \in \Omega$ является минимальной среди порождающих и максимальной среди линейно независимых в этой же точке.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ — линейно независимая порождающая система тензоров. Если $\mathbb{B}_1(x)$, $\mathbb{B}_2(x), \ldots, \mathbb{B}_m(x)$ — какая-нибудь другая порождающая система, то $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ являются линейными комбинациями $\mathbb{B}_1(x,$ $\mathbb{B}_2(x), \ldots, \mathbb{B}_m(x)$ и отсюда следует, что $k \le m$, ибо если было бы $k > m$, то в силу теоремы о линейной зависимости линейных комбинаций система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ была бы линейно зависимой системой. Полученное противоречие доказывает минимальность среди порождающих линейно независимой порождающей системы тензоров. Пусть теперь $\mathbb{D}_1(x)$, $\mathbb{D}_2(x), \ldots, \mathbb{D}_l(x)$ — какая-либо линейно независимая система тензоров. Следовательно, они являются линейными комбинациями тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ и, очевидно, $l \le k$, ибо при $l > k$, в силу теоремы о линейной зависимости линейных комбинаций $\mathbb{D}_1(x)$, $\mathbb{D}_2(x), \ldots, \mathbb{D}_l(x)$ составляли бы линейно зависимую систему. Этим утверждение доказано полностью. $\square$

Таким образом, утверждениями 1.3.3—1.3.5 устанавливается тождественность трех следующих понятий: минимальной порождающей системы тензоров, максимальной линейно независимой системы тензоров и линейно независимой порождающей системы тензоров.

Определение 1.3.11. Будем говорить, что модуль $M(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$ является k-мерным и число k называется его числом измерений или размерностью, если в нем существует линейно независимая система тензоров в той же точке $x \in \Omega$, состоящая из k тензоров, и нет никакой линейно независимой системы тензоров, состоящей из большего, чем k, число тензоров.

Утверждение 1.3.6. Пусть $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ — линейно независимая система тензоров в точке $x \in \Omega$ из модуля $M(\Omega)$, причем их число меньше размерности модуля. Тогда к ним можно присоединить тензор $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ так, что система $\mathbb{A}_1(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$, $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ будет линейно независимой.

Доказательство. Рассмотрим множество линейных комбинаций $\lambda_1\mathbb{A}_1(x) + \lambda_2\mathbb{A}_2(x) + \ldots + \lambda_k\mathbb{A}_k(x)$. Оно, очевидно, не исчерпывает всего модуля, так как тензоры $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x)$, $\ldots$, $\mathbb{A}_k(x)$ не являются порождающей системой. Выберем тензор $\mathbb{A}_{k+1}(x)$, не являющийся линейной комбинацией тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$. Тогда $\mathbb{A}_1(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$, $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ — линейно независимая система, так как иначе в силу утверждения 1.3.2 $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ был бы линейной комбинацией системы тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$. $\square$

Из утверждения 1.3.6 следует, что любую линейно независимую систему тензоров можно дополнить до базиса. Кроме того, это утверждение и его доказательства указывают на характер произвола в выборе базиса модуля. В самом деле, если взять произвольный ненулевой тензор, то его можно достраивать до базиса, выбирая второй тензор как угодно, только не линейную комбинацию первого, третий как угодно, только не линейную комбинацию первых двух и т.д.

К базису можно «спуститься», исходя из порождающей системы. В этой связи имеет место утверждение.

Утверждение 1.3.7. Любая порождающая система тензоров в точке $x \in \Omega$ содержит базис в этой точке.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ — порождающая система тензоров. Если она линейно независима, то один из ее тензоров есть линейная комбинация остальных и его можно исключить из порождающей системы. Если оставшаяся система тензоров линейно зависима, то можно исключить еще один тензор и т.д. до тех пор, пока не получим линейно независимую порождающую систему, т.е. базис. □

Заметим, что приведенные выше определения, утверждения, теоремы были рассмотрены в данной точке x области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, т.е. они имели локальный характер. Однако если они имеют место в каждой точке области Ω, то будем говорить, что они имеют место в Ω.

Модуль $M_p(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ конечномерен. Его размерность равна n^p. Действительно, $M_p(\Omega)$ принадлежит всякий тензор ранга p, который имеет n^p компонент из $M_p(\Omega)$ ($M_p(\Omega)$ — модуль над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$), которые можно задать произвольно относительно одной из систем координат. Это означает, что $\dim M_p(\Omega) = n^p$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения:

Утверждение 1.3.8. Для линейной независимости системы тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x)$, $\ldots$, $\mathbb{A}_k(x) \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$ необходимо, чтобы $k \leq n^p$.

Рассмотрим матрицу

$$A_{ij}(x) = (\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)_x, \quad i, j = \overline{1, k}.$$

Так как $(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)_x = (\overline{\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_i})_x$, то $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$, т.е. A_{ij} — эрмитова матрица. Теперь нетрудно доказать теорему.

Теорема 1.3.2. *Система тензоров* $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$, $k \leq n^p$, *принадлежащих модулю* $\mathbb{C}_p(\Omega)$, *линейно независима в точке* x *тогда и только тогда, когда*

$$A = \det \big(A_{ij}(x)\big) \neq 0, \quad x \in \Omega.$$

Если это условие выполняется в каждой точке области Ω, то система тензоров линейно независима в Ω. Заметим, что $A = \det \big(A_{ij}(x)\big)$ — определитель Грама для системы тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$, $k \leq n^p$. Поэтому он больше нуля.

Если один из тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x) \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, $k \leq n^p$ обращается в нуль или является линейной комбинацией остальных в точке $x \in \Omega$, то эта система тензоров линейно зависима в этой точке.

1.3.4 Ортонормальные и биортонормальные системы тензоров

Определение 1.3.12. Система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ называется ортонормальной в точке $x \in \Omega$, если

$$(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)_x = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, k}.$$

Соответственно, система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ называется ортонормальной в области Ω, если она ортонормальна в каждой точке этой области.

Ортонормальная система тензоров линейно независима (в точке, в области), так как $\det \big(A_{ij}\big) = \det \big(\delta_{ij}\big) = 1$. Отсюда в свою очередь следует, что, если система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x)$, $\ldots$, $\mathbb{A}_k(x) \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ ортонормальна, то необходимо $k \leq n^p$ (так как максимальная линейно независимая система тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x)$, $\ldots$, $\mathbb{A}_k(x) \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ не может состоять из большего, чем $k = n^p$, числа тензоров).

Теорема 1.3.3. *Любую линейно независимую систему тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ ($k \leq n^p$) модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ можно ортонормировать, применяя метод ортогонализации Шмидта.*

Доказательство. Полагая

$$\mathbb{B}_\alpha = \frac{\mathbb{B}'_\alpha}{||\mathbb{B}'_\alpha||_x}, \quad x \in \Omega,$$

где $\mathbb{B}'_1 = \mathbb{A}_1$, $\mathbb{B}'_\alpha = \mathbb{A}_\alpha - \sum\limits_{\beta=1}^{\alpha-1} (\mathbb{A}_\alpha, \mathbb{B}_\beta)\mathbb{B}_\beta$, $\alpha = \overline{2,k}$, получим ортонормальную систему тензоров $\mathbb{B}_1(x), \ldots, \mathbb{B}_k(x)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, т.е $(\mathbb{B}_i, \mathbb{B}_j) = \delta_{ij}$. $\square$

Нетрудно заметить, что в каждой фиксированной точке x области Ω

$$\mathbb{B}_\alpha = a_{\alpha 1}\mathbb{A}_1 + a_{\alpha 2}\mathbb{A}_2 + \ldots + a_{\alpha\alpha}\mathbb{A}_\alpha, \quad a_{\alpha\alpha} \neq 0, \;\; a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}.$$

Определение 1.3.13. Две системы тензоров $\mathbb{A}_1(x),\ \mathbb{A}_2(x),\ \ldots,\ \mathbb{A}_k(x)$ и $\mathbb{A}^1(x),\ \mathbb{A}^2(x),\ \ldots,$ $\mathbb{A}^k(x)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ называются биортонормальными, если выполняются условия

$$(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}^j)_x = \delta_i^j, \quad i,j = \overline{1,k}.$$

Утверждение 1.3.9. Если $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ и $\mathbb{A}^1(x), \mathbb{A}^2(x), \ldots, \mathbb{A}^k(x)$ биортонормальные системы тензоров, то каждая из них по отдельности линейно независима.

Доказательство. Допустим, что нетривиальная комбинация, например, тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$ равна нулю, т.е.

$$\lambda_1\mathbb{A}_1 + \lambda_2\mathbb{A}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbb{A}_k = 0,$$

где среди $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ не все равны нулю одновременно. Умножая обе части этого равенства скалярно на $\mathbb{A}^j$, в силу биортонормальности этих систем получим $\lambda_j = 0$, $j = \overline{1,k}$. Пришли к противоречию, что доказывает линейную независимость системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$. Аналогично доказывается линейная независимость системы тензоров $\mathbb{A}^1(x), \mathbb{A}^2(x), \ldots, \mathbb{A}^k(x)$. $\square$

Теорема 1.3.4. *Для всякой линейно независимой системы тензоров существует биортонормальная система.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \ldots, \mathbb{A}_k(x)$, $k \leq n^p$ — линейно независимая система тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в области Ω. Обозначим $A_{ij}(x) = (A_i, A_j)_x$. Тогда в силу теоремы (1.3.2) $\det(A_{ij}(x)) \neq 0$ в Ω и, конечно, существует единственная матрица A^{ij}, удовлетворяющая условиям

$$A_{in}A^{nj} = \delta_i^j, \quad i,j,n = \overline{1,k}. \tag{1.3.11}$$

Так как A_{ij} — эрмитова матрица, то A^{ij} также — эрмитова матрица. В самом деле, переходя в последнем соотношении к сопряженному соотношению и учитывая $\overline{A}_{in} = A_{ni}$, находим

$$A_{ni}\overline{A}^{nj} = \delta_i^j, \quad i,j,n = \overline{1,k}. \tag{1.3.12}$$

Умножая обе части этого соотношения на A^{im} и учитывая (1.3.11), получим

$$A^{jm} = A_{ni}A^{im}\overline{A}^{nj} = \delta_n^m \overline{A}^{nj} = \overline{A}^{mj},$$

как и требуется.

В силу последнего соотношения (1.3.12) можно записать в виде

$$A_{ni}A^{jn} = \delta_i^j, \quad i, j, n = \overline{1, k}. \tag{1.3.13}$$

Таким образом, A_{ij} и A^{ij} — взаимно обратные эрмитовы матрицы.

Рассмотрим систему тензоров

$$\mathbb{A}^i = A^{in}\mathbb{A}_n, \quad i, n = \overline{1, k}. \tag{1.3.14}$$

Обращая эти соотношения, очевидно, получим

$$\mathbb{A}_i = A_{in}\mathbb{A}^n, \quad i, n = \overline{1, k}.$$

В силу (1.3.14) имеем

$$(\mathbb{A}^i, \mathbb{A}_j) = A^{in}(\mathbb{A}_n, \mathbb{A}_j) = A^{in}A_{nj}.$$

Отсюда с помощью (1.3.13) можно написать

$$(\mathbb{A}^i, \mathbb{A}_j) = (\mathbb{A}_j, \mathbb{A}^i) = \delta_j^i, \quad i, j = \overline{1, k}, \tag{1.3.15}$$

т.е. системы тензоров $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ и $\mathbb{A}^1(x)$, $\mathbb{A}^2(x), \dots, \mathbb{A}^k(x)$ биортогональны. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.3.4.1. *Если $\mathbb{A}_1(x)$, $\mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ — ортонормальная система тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то $\mathbb{A}^i = \mathbb{A}_i$, $i = \overline{1, k}$, $k \leq n^p$.*

Следует заметить, что в силу (1.3.11) и (1.3.14) имеем

$$(\mathbb{A}^i, \mathbb{A}^j)_x = (A^{im}\mathbb{A}_m, A^{jn}\mathbb{A}_n)_x = A^{im}\overline{A}^{jn}(\mathbb{A}_m, \mathbb{A}_n)_x = A^{im}\overline{A}^{jn}A_{mn} = A^{im}A_{mn}A^{nj} = A^{im}\delta_m^j = A^{ij},$$

т.е.

$$A^{ij}(x) = (\mathbb{A}^i, \mathbb{A}^j)_x, \quad i, j = \overline{1, n^p}, \ \ x \in \Omega.$$

1.3.5 Базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Разложение тензора относительно базиса

Так как $\dim \mathbb{C}_p(\Omega) = n^p$, $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$, поэтому в силу определения размерности модуля максимальная линейно независимая система тензоров будет состоять из n^p тензоров. Следовательно, любую линейно независимую в области Ω систему тензоров $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ можно выбрать в качестве базиса этого модуля. На основании теоремы (1.3.4) существует биортонормальная система тензоров $\mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^{n^p}$, которую также можно рассматривать в качестве базиса модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Заметим, что если $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ — ортонормальный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то $\mathbb{A}^i = \mathbb{A}_i$, $i = \overline{1, n^p}$.

Теперь получим формулы разложения тензора относительно базиса модуля. Пусть $\mathbb{A}_1,\ \mathbb{A}_2,\ldots,\mathbb{A}_{n^p}$ и $\mathbb{A}^1,\ \mathbb{A}^2,\ldots,\mathbb{A}^{n^p}$ — биортонормальные базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Тогда для любого тензора $\mathbb{W}\in M_p(\Omega)$ имеем разложение

$$\mathbb{W}(x)=W^i(x)\mathbb{A}_i(x),\quad x\in\Omega,\ \ i,j=\overline{1,n^p}, \tag{1.3.16}$$

где $W^i,\ \ i=\overline{1,n^p}$ называются коэффициентами разложения тензора $\mathbb{W}$ относительно базиса $\mathbb{A}_1,\ \mathbb{A}_2,\ldots,\mathbb{A}_{n^p}$.

Умножая обе части (1.3.16) скалярно на тензоры $\mathbb{A}^j$, в силу (1.3.15) находим

$$W^j(x)=(\mathbb{W},\mathbb{A}^j)_x,\quad j=\overline{1,n^p}. \tag{1.3.17}$$

Учитывая (1.3.17), соотношение (1.3.16) можно представить в виде

$$\mathbb{W}(x)=(\mathbb{W},\mathbb{A}^i)_x\mathbb{A}_i,\quad x\in\Omega,\ \ i=\overline{1,n^p}. \tag{1.3.18}$$

Имеем также разложение

$$\mathbb{W}(x)=W_i(x)\mathbb{A}^i(x),\quad x\in\Omega,\ \ i=\overline{1,n^p}, \tag{1.3.19}$$

где аналогично (1.3.17) имеем

$$W_i(x)=(\mathbb{W},\mathbb{A}_i)_x,\quad i=\overline{1,n^p}. \tag{1.3.20}$$

С помощью (1.3.20) из (1.3.19) получаем

$$\mathbb{W}(x)=(\mathbb{W},\mathbb{A}_i)_x\mathbb{A}^i(x),\quad x\in\Omega,\ \ i=\overline{1,n^p}. \tag{1.3.21}$$

Подставляя (1.3.16) в правую часть (1.3.20), а (1.3.19) в правую часть (1.3.17), приходим к соотношениям

$$W_i(x)=A_{ij}(x)W^j(x),\quad W^i(x)=A^{ij}(x)W_j(x),\quad i,j=\overline{1,n^p},$$

которые связывают между собой коэффициенты разложения тензора $\mathbb{W}$ относительно биортонормальных систем тензоров.

Если $\mathbb{W}\in M_p(\Omega)$, $\mathbb{W}'\in\mathbb{C}_p(\Omega)$, то локальное скалярное произведение этих тензоров представится в форме

$$(\mathbb{W},\mathbb{W}')_x=W_i(x)\overline{W}\,'^i(x)=W^i(x)\overline{W}'_i(x).$$

Если $\mathbb{A}_1,\ \mathbb{A}_2,\ldots,\mathbb{A}_{n^p}$ — ортонормальный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то имеем соотношения

$$\mathbb{W}(x)=\sum_{i=1}^{n^p}(\mathbb{W},\mathbb{A}_i)_x\mathbb{A}_i(x),\quad \forall\,\mathbb{W}\in M_p(\Omega),$$
$$(\mathbb{W},\mathbb{W}')_x=\sum_{i=1}^{n^p}W_i(x)\overline{W}'_i,\quad \forall\,\mathbb{W}\in M_p(\Omega),\ \ \mathbb{W}'\in\mathbb{C}_p(\Omega).$$

1.3.6 Мультипликативные тензоры и их основные свойства

Обозначим прямое произведение тензоров $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_k$ с компонентами из $\mathbb{C}(\Omega)$ через

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_k. \tag{1.3.22}$$

Определение 1.3.14. Тензоры вида (1.3.22) называются мультипликативными тензорами. Тензоры $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_k$ являются сомножителями мультипликативного тензора $\mathbb{A}$.

Очевидно, компоненты мультипликативного тензора равны произведению компонент его сомножителей с сохранением порядка их следования. Например, если $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_k$ — тензоры модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$, то имеем

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = A_{1,i_1} A_{2,i_2} \ldots A_{k,i_k}.$$

Следует заметить, что прямое произведение тензоров обладает свойством ассоциативности. Например, если $1 < i < k$, то будем иметь

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_{i-1}) \otimes (\mathbb{A}_i \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_k).$$

Определение 1.3.15. Если $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_k$ — тензоры из модулей $\mathbb{C}_{p_1}(\Omega), \ldots, \mathbb{C}_{p_k}(\Omega)$ соответственно, то мультипликативный тензор (1.3.22), который, конечно, принадлежит модулю $\mathbb{C}_{p_1+\ldots+p_k}(\Omega)$, называется тензором класса $\mathbb{C}_{p_1,\ldots,p_k}(\Omega)$.

Нетрудно усмотреть, что мультипликативные тензоры класса $\mathbb{C}_{p_1,\ldots,p_k}(\Omega)$ представляют k-линейные формы. В самом деле, если f и g — произвольные скаляры, $\mathbb{A}'_i$ и $\mathbb{A}''_i$ — тензоры ранга p_i, то

$$\mathbb{A}_1\otimes \ldots \otimes\mathbb{A}_{i-1}\otimes(f\mathbb{A}'_i + g\mathbb{A}''{}_i)\otimes\mathbb{A}_{i+1}\otimes \ldots \otimes\mathbb{A}_k = f(\mathbb{A}_1\otimes \ldots \otimes\mathbb{A}_{i-1}\otimes\mathbb{A}'_i\otimes\mathbb{A}_{i+1}\otimes \ldots \otimes\mathbb{A}_k)+$$
$$+g(\mathbb{A}_1\otimes \ldots \otimes\mathbb{A}_{i-1}\otimes\mathbb{A}''{}_i\otimes\mathbb{A}_{i+1}\otimes \ldots \otimes\mathbb{A}_k).$$

Следует заметить, что множество мультипликативных тензоров не образует линейного многообразия, однако они обладают рядом важных свойств, благодаря которым они очень полезны для построения базисов модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p_1,\ldots,p_k}(\Omega)$ и f — скаляр из $\mathbb{C}_0(\Omega)$, то, очевидно, $f\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p_1,\ldots,p_k}(\Omega)$. При этом на f умножается какой-нибудь один (любой) из сомножителей тензора $\mathbb{A}$.

Определение 1.3.16. Сомножители $\mathbb{A}_i$ и $\mathbb{A}_j$ мультипликативного тензора называются подобными, если $\mathbb{A}_i = f\mathbb{A}_j$, где f — скаляр.

При перестановке местами подобных сомножителей мультипликативный тензор, конечно, не изменяется.

Определение 1.3.17. Внутреннее (локальное скалярное) произведение мультипликативных тензоров равно произведению внутренних (локальных скалярных) произведений соответствующих сомножителей.

В силу этого определения, если $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_k$ и $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{B}_k$ мультипликативные тензоры класса $\mathbb{C}_{p_1,\ldots,p_k}(\Omega)$, то их внутреннее и их локальное скалярное произведения выражаются соответственно формулами

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{A}_1\mathbb{B}_1) \ldots (\mathbb{A}_k\mathbb{B}_k), \quad (\mathbb{A}, \mathbb{B})_x = (\mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1)_x \ldots (\mathbb{A}_k, \mathbb{B}_k)_x, \quad x \in \Omega. \tag{1.3.23}$$

Нетрудно заметить, что справедливо утверждение.

Утверждение 1.3.10. Два мультипликативных тензора класса $\mathbb{C}_{p_1,\ldots,p_k}(\Omega)$ ортогональны тогда и только тогда, когда по крайней мере одна пара соответствующих сомножителей ортогональна.

Если $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$,, $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, а $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}'$ — произвольные тензоры с компонентами соответственно из $\mathbb{C}(\Omega)$ и $M(\Omega)$, внутреннее p-произведение и p-локальное скалярное произведение мультипликативных тензоров $\mathbb{A} \otimes \mathbb{W}$ и $\mathbb{W}' \otimes \mathbb{A}'$ выражаются соответственно соотношениями

$$(\mathbb{A} \otimes \mathbb{W}) \overset{p}{\otimes} (\mathbb{W}' \otimes \mathbb{A}') = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}', \quad (\mathbb{A} \otimes \mathbb{W}, \mathbb{W}' \otimes \mathbb{A}')_x^{(p)} = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x \mathbb{A} \otimes \overline{\mathbb{A}}'.$$

Теперь не представляет труда убедиться в справедливости утверждения.

Утверждение 1.3.11. Если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_k$ и $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2, \ldots, \mathbb{A}^k$ — биортонормальные системы тензоров, например, модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то каждая из систем мультипликативных тензоров вида

$$\mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_{i_m}, \quad \mathbb{A}^{j_1} \otimes \mathbb{A}^{j_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}^{j_m},$$
$$\mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_{i_m} \otimes \mathbb{A}^{j_1} \otimes \mathbb{A}^{j_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}^{j_m},$$

где $i_l, j_l = \overline{q, k}$, $l = \overline{1, m}$, $m \leq k \leq n^p$ в отдельности линейно независима.

1.3.7 Построение базисов модуля

Рассмотрим способы построения базисов модулей тензоров любого ранга с помощью базисов модулей меньших размерностей.

Теорема 1.3.5. *Если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_{n^p}$ и $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots, \mathbb{B}_{n^q}$ — базисы модулей $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}_q(\Omega)$, то система мультипликативных тензоров*

$$\mathbb{D}_m = \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{B}_j, \quad i = \overline{1, n^p}, \ \ j = \overline{1, n^q},$$

является базисом модуля $\mathbb{C}_{p+q}(\Omega)$.

Здесь m — номер последовательностей пар i, j, когда i и j принимают соответственно значения $1, 2, \ldots, n^p$; $1, 2, \ldots, n^q$, а m, конечно, принимает значения $1, 2, \ldots, n^{p+q}$.

Доказательство. Рассмотрим систему тензоров

$$\mathbb{D}^m = \mathbb{A}^i \otimes \mathbb{B}^j, \quad i = \overline{1, n^p}, \ \ j = \overline{1, n^q}, \ \ m = \overline{1, n^{p+q}},$$

где $\mathbb{A}^i$ и $\mathbb{B}^j$ — биортонормальные соответственно относительно $\mathbb{A}_i$ и $\mathbb{B}_j$ базисы модулей $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}_q(\Omega)$. На основании второго соотношения (1.3.23) имеем

$$(\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^l)_x = (\mathbb{A}_i, \mathbb{A}^s)_x(\mathbb{B}_j, \mathbb{B}^r)_x = \delta_i^s \delta_j^r = \delta_m^l,$$

где m и l — номера числовых последовательностей i, j и s, r соответственно. Следовательно, системы тензоров $\mathbb{D}_m$ и $\mathbb{D}_l$ биортонормальны и поэтому в силу утверждения (1.3.9) и определения базиса являются базисами модуля $\mathbb{C}_{p+q}(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Обобщением этой теоремы является следующая теорема:

Теорема 1.3.6. *Если* $\mathbb{A}_{i_1}$, $\mathbb{A}^{i_1}, \ldots, \mathbb{A}_{i_k}$, $\mathbb{A}^{i_k}$ *— биортонормальные базисы соответственно модулей* $\mathbb{C}_{p_1}(\Omega), \ldots, \mathbb{C}_{p_k}(\Omega)$, *где индексы принимают значения* $i_1 = \overline{1, n^{p_1}}$, $i_2 = \overline{1, n^{p_2}}$, $\ldots$, $i_k = \overline{1, n^{p_k}}$, *то системы мультипликативных тензоров*

$$\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_{i_k}, \quad \mathbb{A}^i = \mathbb{A}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}^{i_k}$$

где $i = \text{№}(i_1,\, i_2, \ldots, i_k)$, *будут биортонормальными базисами модуля* $\mathbb{C}_{p_1+\ldots+p_k}(\Omega)$.

Из этой теоремы вытекает очевидное следствие.

Следствие 1.3.6.1. *Пусть* $\mathbb{A}_1,\, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_n$ *и* $\mathbb{A}^1,\, \mathbb{A}^2, \ldots, \mathbb{A}^n$ *— биортонормальные базисы модуля* $\mathbb{C}_1(\Omega)$. *Тогда системы* p*-векторов*

$$\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_{i_p}, \quad \mathbb{A}^i = \mathbb{A}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}^{i_p} \tag{1.3.24}$$

представляют биортонормальные базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Здесь индексы $i_1, \ldots, i_p$ принимают значения $1,\, 2, \ldots, n$, а i обозначает номер элемента множества числовых последовательностей $\{i_1, \ldots, i_p\}$ ($i = \text{№}\{i_1,\, i_2, \ldots, i_p\}$), число элементов которого равно n^p. Очевидно, i принимает значения $1, \ldots, n^p$.

Если $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ — ортогональный базис модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$, то система p-векторов (1.3.24) представляет ортогональный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Следует отметить, что нумерацию элементов множества числовых последовательностей $\{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p\}$ можно осуществить, например, следующим образом: если $i{=}\text{№}\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, то

$$i = i_1 + n(i_2 - 1) + \ldots + n^{p-1}(i_p - 1) = 1 + \sum_{k=1}^{p} n^{k-1}(i_k - 1).$$

Теперь заметим, что для произвольного тензора $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$ наряду с (1.3.16) и (1.3.19) будем иметь разложения

$$\begin{gathered} \mathbb{W} = W^i \mathbb{A}_i = W^{i_1 i_2 \ldots i_p} \mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_{i_p}, \\ \mathbb{W} = W_i \mathbb{A}^i = W_{i_1 i_2 \ldots i_p} \mathbb{A}^{i_1} \otimes \mathbb{A}^{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}^{i_p}, \quad i = \overline{1, n^p},\ \ i_1,\, i_2, \ldots, i_p = \overline{1, n} \end{gathered} \tag{1.3.25}$$

Здесь $W_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ и $W^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ аналогично W_i и W^i называются ковариантными и контравариантными компонентами тензора $\mathbb{W}$ относительно базисов $\mathbb{A}^{i_1} \otimes \mathbb{A}^{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}^{i_p}$ и $\mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_{i_p}$. В дальнейшем эти базисы назовем p-векторными мультипликативными базисами (мультибазисами) и для них введем обозначения

$$\mathbb{A}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}_{i_p}, \quad \mathbb{A}^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \mathbb{A}^{i_1} \otimes \mathbb{A}^{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}^{i_p}. \tag{1.3.26}$$

Тогда разложения (1.3.25) с помощью (1.3.26) можно еще записать в форме

$$\mathbb{W} = W^{i_1 i_2 \ldots i_p} \mathbb{A}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = W_{i_1 i_2 \ldots i_p} \mathbb{A}^{i_1 i_2 \ldots i_p}, \quad i_1,\, i_2, \ldots, i_p = \overline{1, n}. \tag{1.3.27}$$

Вводя обозначения

$$A_{ij} = (A_i, A_j), \quad A^{ij} = (A^i, A^j), \quad A^i_j = \delta^i_j = (A^i, A_j), \quad i, j = \overline{1, n},$$

имеем соотношения

$$A_{im} A^{mj} = A^j_i = \delta^j_i, \quad A_i = A_{im} A^m, \quad A^i = A^{im} A_m, \quad i, j, m = \overline{1, n}.$$

В силу этих соотношений получаем

$$\begin{gathered} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} = A_{i_1 j_1} \ldots A_{i_p j_p} A^{j_1 j_2 \ldots j_p}, \quad A^{i_1 i_2 \ldots i_p} = A^{i_1 j_1} \ldots A^{i_p j_p} A_{j_1 j_2 \ldots j_p}, \\ W_{i_1 i_2 \ldots i_p} = A_{i_1 j_1} \ldots A_{i_p j_p} W^{j_1 j_2 \ldots j_p}, \quad W^{i_1 i_2 \ldots i_p} = A^{i_1 j_1} \ldots A^{i_p j_p} W_{j_1 j_2 \ldots j_p}, \\ i_1, \ldots, i_p = \overline{1, n},\ j_1, \ldots, j_p = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{1.3.28}$$

1.3.8 Базисы тензоров в трехмерном евклидовом пространстве

Пусть $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}^j$ ковариантные и контравариантные базисные векторы координатной системы трехмерного евклидова пространства, которые представляют вектор-функции. С помощью этих базисов можно построить базисы для представления тензоров произвольного ранга трехмерного евклидова пространства. В самом деле, в силу следствия (1.3.6.1) системы p-векторов

$$\mathbb{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbf{r}_{i_1} \otimes \mathbf{r}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}_{i_p}, \quad \mathbb{R}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbf{r}^{i_1} \otimes \mathbf{r}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}^{i_p}, \quad i_1,\, i_2, \dots, i_p = 1, 2, 3 \qquad (1.3.29)$$

представляют биортонормальные базисы модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, где $\Omega \in \mathbb{R}^3$. В дальнейшем аналогично (1.3.26) базисы (1.3.29) назовем p-векторными мультипликативными базисами (мультибазисами) модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.

Пусть $\mathbb{U}$ — тензор p-го ранга из $M_p(\Omega)$, где $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Тогда, используя (1.3.29), аналогично (1.3.27) будем иметь представления

$$\mathbb{U} = U^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbb{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = U_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbb{R}^{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad i_1, \dots, i_p = 1, 2, 3. \qquad (1.3.30)$$

Здесь аналогично (1.3.28) имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} \mathbb{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} \quad \mathbb{R}^{i_1 i_2 \dots i_p} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \mathbb{R}_{j_1 j_2 \dots j_p}, \\
&U_{i_1 i_2 \dots i_p} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} U^{j_1 j_2 \dots j_p}, \quad U^{i_1 i_2 \dots i_p} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} U_{j_1 j_2 \dots j_p}, \\
&i_1, \dots, i_p = 1, 2, 3, \;\; j_1, \dots, j_p = 1, 2, 3,
\end{aligned} \qquad (1.3.31)$$

где

$$\begin{aligned}
&g_{ij} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad g^{ij} = (\mathbf{r}^i, \mathbf{r}^j) = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j, \quad g^i_j = \delta^i_j = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j, \\
&g_{im} g^{mj} = g^j_i, \quad \mathbf{r}_i = g_{ij} \mathbf{r}^j, \quad \mathbf{r}^i = g^{ij} \mathbf{r}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

1.3.9 Обобщение на случай риманова пространства

Введем в рассмотрение объекты, которые можно использовать как базисы модуля $M_p(\Omega)$ в случае произвольного риманова пространства n измерений. Сперва рассмотрим случай модуля $M_1(\Omega)$.

Пусть $\mathbf{A}_1,\, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ и $\mathbf{A}^1,\, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n$ — биортонормальные базисы модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$. Тогда если $\mathbf{W} \in M_1(\Omega)$, то аналогично (1.3.18) и (1.3.21) для него имеем разложения

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}, \mathbf{A}^i)\mathbf{A}_i = (\mathbf{W}, \mathbf{A}_i)\mathbf{A}^i = \mathbf{W}^i \mathbf{A}_i = \mathbf{W}_i \mathbf{A}^i, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (1.3.32)$$

Обозначим через $\mathbf{E}_1,\, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ и $\mathbf{E}^1,\, \mathbf{E}^2, \dots, \mathbf{E}^n$ биортонормальные базисы модуля $\mathbb{R}_1(\Omega) \subset \mathbb{C}_1(\Omega)$, т.е. имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}^j) = g^j_i, \quad (\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = (\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^j) = g^{ji}, \\
&g_{ik} g^{kj} = g^j_i, \quad \mathbf{E}_i = g_{ij} \mathbf{E}^j, \quad \mathbf{E}^i = g^{ij} \mathbf{E}_j.
\end{aligned} \qquad (1.3.33)$$

Далее пусть

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_i = A_{i,j} \mathbf{E}^j = A_{i,}{}^j \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{A}^i = A^{i,j} \mathbf{E}_j = A^{i,}{}_j \mathbf{E}^j, \\
&\mathbf{E}_i = B_{i,j} \mathbf{A}^j = B_{i,}{}^j \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{E}^i = B^{i,j} \mathbf{A}_j = B^{i,}{}_j \mathbf{A}^j.
\end{aligned} \qquad (1.3.34)$$

Отсюда, следовательно, имеем

$$
\begin{aligned}
&g_i^j = (\mathbf{A}_i, \mathbf{A}^j) = A_{i,m}\overline{A}^{j,m} = A_{i,}{}^m\overline{A}^{j,}{}_m = \overline{A}_{i,m}A^{j,m} = \overline{A}_{i,}{}^m A^{j,}{}_m,\\
&g_i^j = (\mathbf{E}_i, \mathbf{E}^j) = B_{i,m}\overline{B}^{j,m} = B_{i,}{}^m\overline{B}^{j,}{}_m = \overline{B}_{i,m}B^{j,m} = \overline{B}_{i,}{}^m B^{j,}{}_m,.
\end{aligned}
\tag{1.3.35}
$$

Теперь в силу, например, первого и третьего соотношений (1.3.34) получаем

$$
\mathbf{A}_i = A_{i,}{}^m\mathbf{E}_m = A_{i,}{}^m B_{m,}{}^j\mathbf{A}_j = A_{i,m}B^{m,j}\mathbf{A}_j,
$$

откуда, учитывая линейную независимость системы векторов A_i, $i=\overline{1,n}$, находим

$$
A_{i,}{}^m B_{m,}{}^j = A_{i,m}B^{m,j} = g_i^j. \tag{1.3.36}
$$

На основании (1.3.35) и (1.3.36) заключаем, что

$$
B_{m,}{}^j = \overline{A}^{j,}{}_m \quad B^{m,j} = \overline{A}^{j,m}, \quad B_{m,j} = \overline{A}_{j,m}, \quad B^{m,}{}_j = \overline{A}_{j,}{}^m, \tag{1.3.37}
$$

где последние два соотношения получаются аналогично. Учитывая (1.3.37), из третьего и четвертого соотношений (1.3.34) получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_i = \mathbf{A}_k\overline{A}^{k,}{}_i = \mathbf{A}^k\overline{A}_{k,i} = \overline{\mathbf{A}}_k A^{k,}{}_i = \overline{\mathbf{A}}^k A_{k,i},\\
&\mathbf{E}^i = \mathbf{A}_k\overline{A}^{k,i} = \mathbf{A}^k\overline{A}_{k,}{}^i = \overline{\mathbf{A}}_k A^{k,i} = \overline{\mathbf{A}}^k A_{k,}{}^i.
\end{aligned}
\tag{1.3.38}
$$

В силу (1.3.38) из первых трех соотношений (1.3.33) будем иметь

$$
g_i^j = A_{k,}{}^j\overline{A}^{k,}{}_i, \quad g_{ij} = A_{k,i}\overline{A}^{k,}{}_j, \quad g^{ij} = A_{k,}{}^i\overline{A}_{k,j}. \tag{1.3.39}
$$

Таким образом, зная биортонормальные базисы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ и $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n$ модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$, можно построить биортонормальные базисы (1.3.38), которые обобщают на случай риманова многообразия базисные векторы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}^i$ евклидова пространства и с помощью которых любой тензор $\mathbf{W}$ модуля $M_1(\Omega)$ представится в виде

$$
\mathbf{W} = W_{,i}\mathbf{E}^i = W^{,i}\mathbf{E}_i, \quad i=\overline{1,n}. \tag{1.3.40}
$$

Заметим, что на основании (1.3.32), первых двух соотношений (1.3.34), (1.3.38) и (1.3.40) придем к равенствам

$$
\begin{aligned}
&W_i = \overline{A}_{i,m}W^{,m} = \overline{A}_{i,}{}^m W_{,m}, \quad W^i = \overline{A}^{i,}{}_m W^{,m} = \overline{A}_{i,m}W_{,m},\\
&W_{,i} = A^{m,}{}_i W_m = A_{m,i}W^m, \quad W^{,i} = A^{m,i}W_m = A_{m,}{}^i W^m.
\end{aligned}
$$

Нетрудно усмотреть, что в рассматриваемом случае в силу (1.3.39) единичный тензор риманова пространства можно представить в форме

$$
\underset{\sim}{\mathbf{E}} = \mathbf{A}_k\otimes\overline{\mathbf{A}}^k = \mathbf{A}^k\otimes\overline{\mathbf{A}}_k = \overline{\mathbf{A}}_k\otimes\mathbf{A}^k = \overline{\mathbf{A}}^k\otimes\mathbf{A}_k. \tag{1.3.41}
$$

Отметим, что для любого базиса $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$ соотношение (1.3.41) определяет один и тот же тензор риманова многообразия.

Теперь рассмотрим случай модуля $M_p(\Omega)$ любого порядка p риманова пространства произвольной размерности. В этом случае по аналогии (1.3.38) введем в рассмотрение мультибазисы

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{i_1\dots i_p} = \mathbb{E}_{i_1}\otimes\mathbb{E}_{i_2}\otimes\dots\otimes\mathbb{E}_{i_p} = (\mathbb{A}_{k_1}\otimes\dots\otimes\mathbb{A}_{k_p})\overline{A}^{k_1,}{}_{i_1}\dots\overline{A}^{k_p,}{}_{i_1},\\
&\mathbb{E}^{i_1\dots i_p} = \mathbb{E}^{i_1}\otimes\mathbb{E}^{i_2}\otimes\dots\otimes\mathbb{E}^{i_p} = (\mathbb{A}_{k_1}\otimes\dots\otimes\mathbb{A}_{k_p})\overline{A}^{k_1,i_1}\dots\overline{A}^{k_p,i_p}.
\end{aligned}
\tag{1.3.42}
$$

Пользуясь обозначениями (1.3.24) и (1.3.26), мультибазисы (1.3.42) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{i_1\dots i_p} = \mathbb{E}_{i_1} \otimes \mathbb{E}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{E}_{i_p} = \mathbb{A}_k \overline{A}^{k,}{}_{i_1\dots i_p} = \mathbb{A}_{k_1\dots k_p} \overline{A}^{k_1,}{}_{i_1} \dots \overline{A}^{k_p,}{}_{i_p},\\
&\mathbb{E}^{i_1\dots i_p} = \mathbb{E}^{i_1} \otimes \mathbb{E}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{E}^{i_p} = \mathbb{A}_k \overline{A}^{k,i_1\dots i_p} = \mathbb{A}_{k_1\dots k_p} \overline{A}^{k_1,i_1} \dots \overline{A}^{k_p,i_p},\\
&k = \overline{1,n^p},\ \ i_1,\dots,i_p = \overline{1,n},\ \ k_1,\dots,k_p = \overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{1.3.43}$$

Нетрудно заметить, что если $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$, то аналогичные (1.3.27) соотношения можно записать в форме

$$\mathbb{W} = W^{,i_1\dots i_p}\mathbb{E}_{i_1\dots i_p} = W_{,i_1\dots i_p}\mathbb{E}^{i_1\dots i_p}, \quad i_1,\dots,i_p = \overline{1,n}.$$

Легко усмотреть, что внутреннее p-произведение мультибазисов $\mathbb{E}_{i_1\dots i_p}$ и $\mathbb{E}^{j_1\dots j_p}$ выражается соотношением

$$E_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_p} \equiv \mathbb{E}_{i_1\dots i_p}\mathbb{E}^{j_1\dots j_p} \equiv \mathbb{E}_{i_1\dots i_p} \overset{p}{\otimes} \mathbb{E}^{j_1\dots j_p} = A_{k,i_1\dots i_p}\overline{A}^{k,j_1\dots j_p}. \tag{1.3.44}$$

В рассматриваемом случае обобщением тензора (1.3.41), очевидно, будет тензор

$$\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \mathbb{A}_k \otimes \overline{\mathbb{A}}^k = \overline{\mathbb{A}}^k \otimes \mathbb{A}_k = \mathbb{A}_{i_1\dots i_p} \otimes \overline{\mathbb{A}}^{i_1\dots i_p} = \overline{\mathbb{A}}^{i_1\dots i_p} \otimes \mathbb{A}_{i_1\dots i_p}, \tag{1.3.45}$$

где $\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ означает, что этот тензор — тензор ранга $2p$. О нем речь пойдет ниже.

1.4 Тензорные модули четного порядка. Кольцо с единицей $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Для модулей четного порядка можно определить вторую бинарную операцию — произведение, которая превращает их в кольцо с единицей. Введем определение умножения двух тензоров из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Определение 1.4.1. Произведением тензоров $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется внутреннее p-произведение этих тензоров $\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'$.

Легко доказать, что если $\mathbb{W}$, $\mathbb{W}'$ и $\mathbb{W}''$ — тензоры из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} (\mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'') = (\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}') \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'',\\
&(\mathbb{W} + \mathbb{W}') \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'' = \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'' + \mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'',\\
&\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} (\mathbb{W}' + \mathbb{W}'') = \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' + \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}''.
\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Соотношения (1.4.1) доказывают, что $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является кольцом. Докажем, что оно имеет единицу. Пусть $\mathbb{A}_1,\dots,\mathbb{A}_{n^p}$ — некий базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Докажем, что тензор ранга $2p$ (1.3.45) является единицей кольца $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Нетрудно заметить, что смешанные компоненты этого тензора выражаются соотношениями (1.3.44). Докажем это еще иным путем, что позволит получить также дополнительные условия.

Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда в силу (1.3.18) его можно представить в виде

$$\mathbb{W} = (\mathbb{W}, \mathbb{A}^k)\mathbb{A}_k = \mathbb{A}_k \overline{A}^{k,j_1\dots j_p} W_{j_1\dots j_p}.$$

Отсюда в свою очередь получаем, что ковариантные компоненты тензора $\mathbb{W}$ удовлетворяют соотношениям

$$W_{i_1\dots i_p} = A_{k,i_1\dots i_p} \overline{A}^{k,j_1\dots j_p} W_{k,j_1\dots j_p}.$$

Так как эти соотношения имеют место для произвольного тензора $\mathbb{W}$, то в силу (1.3.44) получим

$$E_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_p} = A_{k,i_1\dots i_p} \overline{A}^{k,j_1\dots j_p} = A_{k_1\dots k_p, i_1\dots i_p} \overline{A}^{k_1\dots k_p, j_1\dots j_p} = g_{i_1}^{j_1} \dots g_{i_p}^{j_p}. \tag{1.4.2}$$

Очевидно, (1.4.2) сохраняет силу при жонглировании индексами.

Теперь докажем, что $\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ — единица кольца $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В этой связи надо доказать, что если $\mathbb{W} \in M_{2p}(\Omega)$, то справедливо соотношение

$$\mathbb{W} = \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}. \tag{1.4.3}$$

Действительно, с помощью определения произведения и (1.4.2) соотношение (1.4.3) в компонентах можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_p} &= (\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \overset{(2p)}{\mathbb{E}})_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_p} = W_{i_1\dots i_p}{}^{k_1\dots k_p} g_{k_1}^{j_1} \dots g_{k_p}^{j_p}, \\ W_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_p} &= (\overset{(2p)}{\mathbb{E}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W})_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_p} = g_{i_1}^{k_1} \dots g_{i_p}^{k_p} W_{k_1\dots k_p}{}^{j_1\dots j_p}. \end{aligned}$$

Эти соотношения доказывают (1.4.3). Таким образом, для любого базиса $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ тензор (1.3.45) является единицей кольца $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Не представляет труда доказать, что тензор (1.3.45) еще можно представить в виде

$$\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \mathbb{E}_{i_1\dots i_p} \mathbb{E}^{i_1\dots i_p} = \mathbb{E}^{i_1\dots i_p} \mathbb{E}_{i_1\dots i_p}, \quad i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}. \tag{1.4.4}$$

В самом деле в силу (1.3.43) и (1.4.2) компоненты инвариантной суммы $\mathbb{E}_{k_1\dots k_p} \mathbb{E}^{k_1\dots k_p}$ представляются в виде

$$(\mathbb{E}_{k_1\dots k_p} \mathbb{E}^{k_1\dots k_p})_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_p} = g_{k_1 i_1} \dots g_{k_p i_p} g^{k_1 j_1} \dots g^{k_p j_p} = g_{i_1}^{j_1} \dots g_{i_p}^{j_p},$$

что доказывает справедливость представления (1.4.4).

1.4.1 Алгебра $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Докажем, что кольцо $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является и банаховой алгеброй. С этой целью надо доказать, что для любых двух тензоров $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$||\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'||_x \leq ||\mathbb{W}||_x ||\mathbb{W}'||_x, \quad x \in \Omega. \tag{1.4.5}$$

Докажем более общее неравенство, из которого (1.4.5) можно получить как частный случай. Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p+r}(\Omega)$ и $\mathbb{B} \in \mathbb{C}_{q+r}(\Omega)$. Рассмотрим их внутреннее r-произведение

$$(\mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B})_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_p} = A_{i_1\dots i_p}{}^{k_1\dots k_r} B_{k_1\dots k_r}{}^{j_1\dots j_q} \tag{1.4.6}$$

и докажем, что верно неравенство

$$||\mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B}||_x \leq ||\mathbb{A}||_x ||\mathbb{B}||_x. \tag{1.4.7}$$

Заметим, что в левой и правой частях неравенства (1.4.7) фигурируют инвариантные выражения. В связи с этим достаточно доказать, что оно справедливо в каждой точке многообразия относительно локально декартовой системы координат.

Пусть x — фиксированная точка многообразия. Рассмотрим локально декартову систему координат, относительно которой имеем $(g_{ij})_x = \delta_{ij}$. Тогда $(g^{ij})_x = \delta^{ij}$ и, очевидно, компоненты всех типов любого тензора в точке x одинаковы. Поэтому соотношение (1.4.6) в точке x можно представить в виде

$$(\mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj}.$$

Здесь $i = №(i_1, \dots, i_p)$, $j = №(j_1, \dots, j_q)$, $i = \overline{1, n^p}$, $j = \overline{1, n^q}$. Нетрудно заметить, что из последнего соотношения получаем

$$||\mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B}||_x^2 = \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{j=1}^{n^q} \Big| \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj} \Big|_x^2. \tag{1.4.8}$$

На основании неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\Big| \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj} \Big|_x^2 \leq \Big| \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} \Big|_x^2 \Big| \sum_{k=1}^{n^r} B_{kj} \Big|_x^2.$$

С помощью этого неравенства из (1.4.8) находим

$$||\mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B}||_x^2 \leq \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{k=1}^{n^r} |A_{ik}|_x^2 \sum_{j=1}^{n^q} \sum_{k=1}^{n^r} |B_{kj}|_x^2. \tag{1.4.9}$$

Учитывая, что относительно локально декартовой системы координат для любого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p+r}(\Omega)$ имеем

$$||\mathbb{A}||_x^2 = A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} \overline{A}^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} = \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{k=1}^{n^r} |A_{ik}|_x^2,$$

из (1.4.9) следует

$$||\mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B}||_x^2 \leq ||\mathbb{A}||_x^2 ||\mathbb{B}||_x^2, \quad x \in \Omega,$$

откуда следует (1.4.7). Итак, доказана справедливость и неравенства (1.4.5) и этим установлено, что $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является алгеброй.

1.4.2 Мультипликативная группа M_{2p}

Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. С целью сокращения письма введем обозначение

$$W_{i\cdot}^{\cdot j} = W_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_p},$$

где $i = №\{i_1, \ldots, i_p\}$, $j = №\{j_1, \ldots, j_p\}$, $i, j = \overline{1, n^p}$. Нетрудно доказать, что детерминант порядка n^p

$$\det \mathbb{W} = \det(W_{i\cdot}^{\cdot j}), \quad i, j = \overline{1, n^p}$$

является скаляром (инвариантом).

В самом деле, с помощью компонент дискриминантного тензора детерминант можно представить в виде

$$\det \mathbb{W} = \det(W_{m\cdot}^{\cdot n}) = \frac{1}{n^p!} C_{i_1,\ldots i_{n^p}} C^{j_1\ldots j_{n^p}} W_{j_1\cdot}^{\cdot i_1} \ldots W_{j_{n^p}\cdot}^{\cdot i_{n^p}}. \tag{1.4.10}$$

Из этого представления видно, что правая часть инвариантна при переходе от одной системы координат к другой, так как по зацепленным в правой части (1.4.10) индексам законы преобразований производятся контраградиентно.

Докажем это еще другим путем. При переходе от одной системы координат к другой имеем

$$W_{i\cdot}^{\cdot j} = W_{i_1\ldots i_p}{}^{j_1\ldots j_p} = D_{i_1}^{i'_1} \ldots D_{i_p}^{i'_p} D_{j'_1}^{j_1} \ldots D_{j'_p}^{j_p} W_{i'_1\ldots i'_p}{}^{j'_1\ldots j'_p}.$$

Это соотношение можно записать в краткой форме

$$W_{i\cdot}^{\cdot j} = D_i^{i'} D_{j'}^{j} W_{i'\cdot}^{\cdot j'}, \tag{1.4.11}$$

где введены обозначения

$$D_i^{i'} = D_{i_1}^{i'_1} \ldots D_{i_p}^{i'_p}, \quad D_{j'}^{j} = D_{j'_1}^{j_1} \ldots D_{j'_p}^{j_p}.$$

Здесь i, i' и j, j' принимают значения $1, \ldots, n^p$. Учитывая, что детерминант произведения квадратичных матриц равен произведению детерминантов этих матриц, из (1.4.11) получим

$$\det W_{i\cdot}^{\cdot j} = \det D_l^{l'} \det D_{k'}^{k} \det W_{m'\cdot}^{\cdot n'}. \tag{1.4.12}$$

Следовательно,

$$D_{i'}^{i} D_j^{i'} = D_{i'_1}^{i_1} D_{j_1}^{i'_1} \ldots D_{i'_p}^{i_p} D_{j_p}^{i'_p} = \delta_{j_1}^{i_1} \ldots \delta_{j_p}^{i_p} = \delta_j^i,$$

откуда находим

$$\det(D_{i'}^{i} D_j^{i'}) = \det(D_l^{l'}) \det(D_{k'}^{k}) = \det(\delta_j^i) = 1.$$

В силу последнего соотношения из (1.4.12) будем иметь

$$\mathbb{W} = \det(W_{i\cdot}^{\cdot j}) = \det(W_{i'\cdot}^{\cdot j'}),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, $\det \mathbb{W}$ является инвариантной характеристикой (инвариантом) тензора $\mathbb{W}$ алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Нетрудно доказать справедливость соотношения

$$\det(\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}') = \det \mathbb{W} \det \mathbb{W}', \quad \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega). \tag{1.4.13}$$

Действительно,

$$(\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}')_{i\,\cdot}^{\cdot\, j} = (\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}')_{i_1 \ldots i_p}{}^{j_1 \ldots j_p} = W'{}_{i_1 \ldots i_p}{}^{k_1 \ldots k_p} W'{}_{k_1 \ldots k_p}{}^{j_1 \ldots j_p} = W_{i\,\cdot}^{\cdot\, k} W'{}_{k\,\cdot}^{\cdot\, j}.$$

Отсюда с учетом того, что детерминант произведения матриц равняется произведению детерминантов этих матриц, получаем (1.4.13).

Теперь введем несколько определений.

Определение 1.4.2. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через $\mathbb{W}_\times$ и вычисляемый по формуле

$$\begin{aligned} &\mathbb{W}_\times = W_{\times\,\cdot\, j}^{\,i\,\cdot} \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{A}^j = \frac{\partial \det \mathbb{W}}{\partial \mathbb{W}} = \frac{\partial \det \mathbb{W}}{\partial W_{i\,\cdot}^{\cdot\, j}} \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{A}^j, \\ &i, j = \overline{1, n^p}, \quad i = №(i_1, \ldots, i_p), \;\; j = №(j_1, \ldots, j_p), \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

называется тензором алгебраических дополнений $(2p)$-го ранга и $n^p - 1$ порядка тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Следовательно, компоненты тензора алгебраических дополнений $(2p)$-го ранга и $n^p - 1$ порядка — алгебраические дополнения $n^p - 1$ порядка определителя матрицы компонент тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Видно, что тензор (1.4.14) можно представить в развернутой форме

$$W_\times = W_\times{}^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_p} A_{i_1} \otimes \ldots \otimes A_{i_p} \otimes A^{j_1} \otimes \ldots \otimes A^{j_p} = \frac{\partial \det \mathbb{W}}{\partial W_{i_1 \ldots i_p}{}^{j_1 \ldots j_p}} A_{i_1} \otimes \ldots \otimes A_{i_p} \otimes A^{j_1} \otimes \ldots \otimes A^{j_p},$$

$$i_1, \ldots, i_p = \overline{1, n}, \;\; j_1, \ldots, j_p = \overline{1, n}.$$

Определение 1.4.3. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через $\mathbb{M}$ и вычисляемый по формуле

$$\begin{aligned} &\mathbb{M} = M_{\cdot\, j}^{i\,\cdot} \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{A}^j = \sum_{i,j=1}^{n^p} (-1)^{i+j} \frac{\partial \det \mathbb{W}}{\partial W_{i\,\cdot}^{\cdot\, j}} \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{A}^j, \\ &i = №(i_1, \ldots, i_p), \;\; j = №(j_1, \ldots, j_p), \;\; i, j = \overline{1, n^p}, \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

называется тензором миноров $(2p)$-го ранга и $n^p - 1$ порядка тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Очевидно, компоненты тензора миноров $(2p)$-го ранга и $n^p - 1$ порядка представляют миноры $n^p - 1$ порядка (определителя) матрицы компонент тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Ниже в третьей главе даются определения тензора и расширенного тензора миноров, а также тензора и расширенного тензора алгебраических дополнений более высокого ранга и меньшего порядка для действительного тензора $(2p)$-го ранга.

Определение 1.4.4. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через $\mathbb{W}^T$ и определенный формулой

$$\begin{aligned} \mathbb{W}^T = (W_{i\,\cdot}^{\cdot\, j} \mathbb{A}^i \otimes \mathbb{A}_j)^T = W_{i\,\cdot}^{\cdot\, j} \mathbb{A}_j \otimes \mathbb{A}^i = W_{\cdot\, i}^{j\,\cdot} \mathbb{A}^i \otimes \mathbb{A}_j = \\ = W_{i_1 \ldots i_p}{}^{j_1 \ldots j_p} A_{j_1} \otimes \ldots \otimes A_{j_p} \otimes A^{i_1} \otimes \ldots \otimes A^{i_p}, \end{aligned}$$

$$i, j = \overline{1, n^p}, \;\; i = №(i_1, \ldots, i_p), \;\; j = №(j_1, \ldots, j_p), \;\; i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_p = \overline{1, n},$$

называется транспонированным с $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тензором.

Определение 1.4.5. Тензор, обозначаемый через $\widetilde{\mathbb{W}}$ и получающийся из тензора алгебраических дополнений $(2p)$-го ранга и n^p-1 порядка с помощью операции транспонирования, называется союзным (присоединенным) с $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тензором.

Определение 1.4.6. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через $\mathbb{W}^*$ и вычисляемый по формуле $\mathbb{W}^* = \overline{\mathbb{W}}^T$, называется сопряженным с $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тензором (или тензор $\mathbb{W}^* \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, комплексно-сопряженный с транспонированным к $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, называется сопряженным с $\mathbb{W}$).

Определение 1.4.7. Тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется унитарным, если обратный к нему совпадает со своим сопряженным.

Итак, если $\mathbb{W}$ — унитарный тензор, то $\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$.

Отметим основные свойства унитарных тензоров, аналогичные свойствам ортогональных тензоров.

1. Унитарность $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ влечет унитарность $\mathbb{W}^{-1}$. Действительно, $\mathbb{W}^{-1} = \mathbb{W}^*$, а унитарность $\mathbb{W}^*$ следует из равенства $\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$.

2. Произведение унитарных тензоров — унитарный тензор. В самом деле,

$$\mathbb{W}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2 \overset{p}{\otimes} (\mathbb{W}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2)^* = \mathbb{W}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_1^* = \mathbb{W}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_1^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}.$$

3. Единичный тензор — унитарный тензор. Действительно, $\overset{(2p)}{\mathbb{E}} \overset{p}{\otimes} \overset{(2p)}{\mathbb{E}}{}^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \overset{p}{\otimes} \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$. Эти свойства означают, что унитарные тензоры образуют группу.

4. Модуль определителя унитарного тензора равен единице. В самом деле,

$$\det(\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}^*) = \det\mathbb{W} \det\mathbb{W}^* = \det\mathbb{W} \overline{\det\mathbb{W}} = |\det\mathbb{W}|^2 = \det\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = 1, \quad \text{т.е.} \quad |\det\mathbb{W}| = 1.$$

Определение 1.4.8. Если тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ совпадает со своим транспонированным ($\mathbb{W}^T = \mathbb{W}$), то такой тензор называется симметричным.

Определение 1.4.9. Тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, который совпадает со своим сопряженным ($\mathbb{W}^* = \mathbb{W}$), называется эрмитовым или самосопряженным.

Заметим, что диагональные элементы эрмитова тензора вещественны.

Определение 1.4.10. Тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, который равен своему транспонированному с обратным знаком ($\mathbb{W}^T = -\mathbb{W}$), называется кососимметричным.

Диагональные элементы кососимметричного тензора равны нулю.

Определение 1.4.11. Тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным ($\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}^* = \mathbb{W}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$).

Заметим, что эрмитов тензор и унитарный тензор являются частными случаями нормального тензора.

На основании (1.4.10) и (1.4.14) нетрудно доказать, что союзный тензор $\widetilde{\mathbb{W}}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \widetilde{\mathbb{W}} = \widetilde{\mathbb{W}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \det\mathbb{W}. \tag{1.4.16}$$

Определение 1.4.12. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через $\mathbb{W}^{-1}$ и удовлетворяющий соотношению

$$\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}^{-1} = \mathbb{W}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \tag{1.4.17}$$

называется обратным для тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Приведем теорему о существовании и единственности обратного тензора для тензора четного ранга.

Теорема 1.4.1. *Для того, чтобы тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}(\Omega)$ имел единственный обратный, необходимо и достаточно, чтобы его детерминант был отличен от нуля.*

Доказательство этой теоремы, которое ничем не отличается от доказательства соответствующей теоремы для матриц [21], можно найти в [4].

Определение 1.4.13. Тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}(\Omega)$ называется неособенным (невырожденным) в точке, если $\det \mathbb{W} \neq 0$ в этой точке. Если это условие выполняется во всей области Ω, то тензор называется неособенным в области Ω.

С помощью (1.4.16) и (1.4.17) заключаем, что если $\det \mathbb{W} \neq 0$, то обратный для $\mathbb{W}$ тензор имеет вид

$$\mathbb{W}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{W}} \widetilde{\mathbb{W}}.$$

Учитывая (1.4.13), из (1.4.17) получаем

$$\det\mathbb{W} \det\mathbb{W}^{-1} = 1.$$

Нетрудно показать, что имеют место следующие свойства:

$$\begin{array}{lll}
1. & (\mathbb{A}+\mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T, & (\mathbb{A}+\mathbb{B})^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*, \\
2. & (\lambda\mathbb{A})^T = \lambda\mathbb{A}^T, & (\lambda\mathbb{A})^* = \overline{\lambda}\mathbb{A}^*, \\
3. & (\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T, & (\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*, \\
4. & (\mathbb{A}^{-1})^T = (\mathbb{A}^T)^{-1}, & (\mathbb{A}^{-1})^* = (\mathbb{A}^*)^{-1}, \\
5. & (\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}, & (\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}.
\end{array} \tag{1.4.18}$$

В силу свойств третьей строки (1.4.18) легко доказать справедливость утверждения.

Утверждение 1.4.1. Произведение в смысле алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ двух симметричных (эрмитовых) тензоров является симметричным (эрмитовым) тогда и только тогда, когда эти тензоры перестановочны между собой.

Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — вещественный тензор, то $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^T$. Следовательно, эрмитов вещественный тензор всегда является симметричным. Следует заметить, что с каждым тензором $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ связаны два эрмитова тензора $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$ и $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ и два симметричных тензора $\mathbb{A}\mathbb{A}^T$ и $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$.

Обозначим через M_{2p} множество невырожденных тензоров алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Если $\mathbb{W} \in M_{2p}$ и $\mathbb{W}' \in M_{2p}$, то $\mathbb{W} \otimes \mathbb{W}' \in M_{2p}$, так как на основании (1.4.13) имеем

$$\det(\mathbb{W} \otimes \mathbb{W}') = \det \mathbb{W} \det \mathbb{W}' \neq 0.$$

Легко доказать, что M_{2p} является мультипликативной группой с единицей $\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$.

Любой элемент группы M_{2p} можно использовать для представления тензоров модуля $M_p(\Omega)$ n-мерного риманова пространства. Действительно, пусть $\mathbb{A} \in M_{2p}$. Тогда для любого тензора $\mathbb{W} \in M_p$ имеем

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}, \quad \text{где} \quad \mathbb{W}' = \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^{-1},$$

или

$$\mathbb{W} = \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'', \quad \text{где} \quad \mathbb{W}'' = \mathbb{A}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}.$$

Заметим, что произведения вида $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$ или $\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}$, где $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$, осуществляют отображения $M_p(\Omega) \to M_p(\Omega)$, т.е. они являются эндоморфизмами модуля $M_p(\Omega)$. Если $\mathbb{A} \in M_{2p}$, то эти отображения являются автоморфизмами.

1.5 Задача о нахождении собственных значений и собственных тензоров тензора ранга $2p$

Поставим следующую задачу:
Пусть $\mathbb{A}$ — некоторый тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Найти все тензоры $\mathbb{W}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}, \tag{1.5.1}$$

где λ — скаляр.

Уравнение (1.5.1) всегда имеет тривиальное решение $\mathbb{W} = 0$. В дальнейшем, говоря о решении уравнения (1.5.1), будем иметь в виду только нетривиальные решения $\mathbb{W} \neq 0$. Итак, наша цель заключается в изучении условий существования нетривиальных решений уравнения (1.5.1) и указании способов их построения.

Если для некоторого скаляра λ уравнение (1.5.1) имеет решение $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то λ называется собственным значением тензора $\mathbb{A}$, а $\mathbb{W}$ — правым собственным[2] тензором, соответствующим собственному значению λ.

Следовательно, можно рассмотреть и следующую задачу: найти все тензоры $\mathbb{W}'$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \mu \mathbb{W}', \tag{1.5.2}$$

где μ — скаляр.

Если уравнение (1.5.2) для некоторого скаляра μ имеет нетривиальное решение $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то μ называется собственным числом тензора $\mathbb{A}$, а $\mathbb{W}'$ — левым собственным тензором, соответствующим собственному значению μ. Далее в основном речь пойдет о правом собственном тензоре, ибо для левого собственного тензора все подобные вопросы рассматриваются аналогично.

[2] В [3] дано понятие собственного элемента и вводятся инварианты подобия эндоморфизма. Доказывается теорема Гамильтона-Кэли и т.п. При рассмотренном в [3] подходе многие известные результаты матричной алгебры [6] нетрудно переносятся на случай пространств эндоморфизмов, порожденных тензорами четного ранга. Ниже рассмотрены некоторые подчиняющиеся подобному переносу вопросы.

Заметим, что если $\mathbb{W}$ — решение уравнения (1.5.1) для некоторого скаляра λ, то $\alpha\mathbb{W}$, где α — произвольный скаляр, также будет его решением. Очевидно, всегда можно выбрать скаляр α так, чтобы удовлетворить условию

$$||\alpha\mathbb{W}||_x = 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

В самом деле, для этого достаточно положить $\alpha = (||\mathbb{W}||_x)^{-1}$. Таким образом, решение уравнения (1.5.1) всегда можно нормировать условием

$$||\mathbb{W}||_x = 1, \quad x \in \Omega. \tag{1.5.3}$$

В этой связи в дальнейшем все время будем иметь в виду нормированные решения уравнения (1.5.1).

Если для собственного значения λ уравнение (1.5.1) имеет k линейно независимых решений $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_k$, то их линейная комбинация $\alpha_1\mathbb{W}_1 + \dots + \alpha_k\mathbb{W}_k$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — произвольные скаляры, также будет решением. Эти решения в силу теоремы (1.3.3) можно ортонормировать и полагать, что выполнены условия

$$(\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = W_{i,k_1,\dots,k_p}\overline{W}_{j,}^{\,k_1,\dots,k_p} = \delta_{ij}. \tag{1.5.4}$$

Пусть $\mathbb{W}$ — решение уравнения (1.5.1) для некоторого собственного значения λ. Умножая обе части уравнения (1.5.1) на комплексно-сопряженный тензор $\overline{\mathbb{W}}$ и учитывая (1.5.3), получим

$$\lambda = \overline{\mathbb{W}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \overline{\mathbb{W}}\mathbb{A}\mathbb{W} = \overline{W}^{i_1\dots i_p}A_{i_1\dots i_p j_1\dots j_p}W^{j_1\dots j_p}. \tag{1.5.5}$$

Правая часть этого равенства инвариантна относительно преобразований координат. Отсюда заключаем, что всякое собственное значение тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если таковое существует, является скаляром (инвариантом). Учитывая, что $\mathbb{W} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} \equiv \overset{(2p)}{\mathbb{E}}\mathbb{W}$, уравнение (1.5.1) можно представить в виде

$$(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A})\mathbb{W} = 0 \quad \big((\mathbb{A} - \lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}})\mathbb{W} = 0\big). \tag{1.5.6}$$

Нетрудно заметить, что в компонентах (1.5.6) можно записать в форме

$$(\lambda E_{i_1\dots i_p}^{\quad\;\; j_1\dots j_p} - A_{i_1\dots i_p}^{\quad\;\; j_1\dots j_p})W_{j_1\dots j_p} = 0, \quad i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_p = \overline{1, n},$$

или коротко можно представить еще так:

$$(\lambda\delta_i^j - A_{i\cdot}^{\cdot j})W_j = 0, \quad i, j = \overline{1, n^p}. \tag{1.5.7}$$

Отсюда заключаем, что система уравнений (1.5.7) (тензорное уравнение (1.5.1)) имеет нетривиальное решение только в том случае, когда выполняется условие

$$\det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = 0. \tag{1.5.8}$$

В виде (1.5.8) получили уравнение, которое инвариантно относительно преобразований координат, так как, как было доказано выше, детерминант тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ инвариант. Заметим, что

$$\det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = \det(\lambda\delta_i^j - A_{i\cdot}^{\cdot j})$$

является детерминантом порядка n^p. Поэтому, представив уравнение (1.5.8) в развернутом виде, получим алгебраическое уравнение относительно λ степени n^p

$$\det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = \lambda^{n^p} - a_1\lambda^{n^p-1} + a_2\lambda^{n^p-2} + \ldots + (-1)^{n^p-1}a_{n^p-1}\lambda + (-1)^{n^p}a_{n^p} = 0, \quad (1.5.9)$$

где $a_1, \ldots, a_{n^p}$ — скаляры, которые зависят от инвариантов тензора $\mathbb{A}$. Нетрудно заметить, что исходя из (1.5.2), получим те же самые соотношения (1.5.8) и (1.5.9) относительно μ. Отсюда следует, что $\lambda = \mu$. Для левых и правых собственных тензоров собственные значения одинаковы. Вычислим a_1 и a_{n^p}, где a_1 — коэффициент при λ^{n^p-1} в определителе $\det(\lambda\delta_i^j - A_{i\cdot}^{\cdot j})$. Параметр λ входит, причем в первой степени, только в диагональные элементы этого определителя. Следовательно, каждое слагаемое определителя, содержащее λ^{n^p-1}, имеет в качестве сомножителей по крайней мере $n^p - 1$ диагональных элементов, но тогда и последний сомножитель тоже должен быть диагональным элементом. Таким образом, коэффициент при λ^{n^p-1} равен коэффициенту при λ^{n^p-1} в полиноме (слагаемом определителя) $(\lambda - A_{1\cdot}^{\cdot 1})(\lambda - A_{2\cdot}^{\cdot 2})\ldots(\lambda - A_{n^p\cdot}^{\cdot n^p})$, т.е. равен $(A_{1\cdot}^{\cdot 1} + A_{2\cdot}^{\cdot 2} + \ldots + A_{n^p\cdot}^{\cdot n^p})$. Следовательно,

$$a_1 = I_1(\mathbb{A}) = tr\mathbb{A} = A_{i\cdot}^{\cdot i} = A_{i_1\ldots i_p}{}^{i_1\ldots i_p},$$

где $I_1(\mathbb{A})$ обозначает первый инвариант тензора $\mathbb{A}$, а $tr\mathbb{A}$ — след тензора $\mathbb{A}$.

Для подсчета свободного члена a_{n^p} в (1.5.9) положим $\lambda = 0$. Тогда получим $(-1)^{n^p}a_{n^p} = \det(-\mathbb{A}) = (-1)^{n^p}\det\mathbb{A}$, откуда $a_{n^p} = \det\mathbb{A}$. Остальные коэффициенты тоже можно подсчитать, но это несколько сложнее. О них речь пойдет ниже.

Определение 1.5.1. Тензор $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ называется характеристическим тензором для тензора $\mathbb{A}$. Полином $P(\lambda) = \det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A})$ называется характеристическим полиномом, а $P(\lambda) = \det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = 0$ — характеристическим уравнением тензора $\mathbb{A}$.

Заметим, что характеристический полином и характеристическое уравнение тензора $\mathbb{A}$ не зависят от выбора системы координат. Если $\det\mathbb{A} \neq 0$, то уравнение (1.5.9) не имеет корней, равных нулю. Другими словами, если тензор $\mathbb{A} \in M_{2p}$, то все его собственные значения отличны от нуля. Если же $\det\mathbb{A} = 0$, то уравнение (1.5.9) имеет хотя бы один корень, равный нулю. Следует заметить, что так как тензор $\mathbb{A}$ тождественно не равен нулю, то уравнение (1.5.9) всегда имеет и ненулевые корни, т.е. тензор $\mathbb{A}$ всегда имеет ненулевые собственные значения.

Допустим, что $\det\mathbb{A} \neq 0$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^p}$ — корни уравнения (1.5.9), которые, конечно, отличны от нуля. Среди этих корней некоторые (или все) могут быть кратными. Всякий корень алгебраического уравнения считается корнем столько раз, какова его кратность. Корни уравнения (1.5.9), вообще говоря, являются комплексными. Если λ — корень уравнения (1.5.9) кратности $k \leq n^p$, то однородная система уравнений (1.5.7) может иметь k линейно независимых решений $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_k$ и все они являются тензорами модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Кроме того, эту систему решений, как было сказано выше, всегда можно считать ортонормальной.

Утверждение 1.5.1. Если λ и λ' — два различных собственных значения тензора $\mathbb{A}$, то соответствующие им любые два собственных тензора $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ линейно независимы.

Доказательство. Допустим противное, т.е. $\mathbb{W} = \alpha\mathbb{W}'$, где α — скаляр. Тогда имеем

$$\lambda\mathbb{W} = \mathbb{A}\mathbb{W} = \alpha\mathbb{A}\mathbb{W}' = \alpha\lambda'\mathbb{W}' = \lambda'\mathbb{W},$$

ибо $\mathbb{W} \neq 0$, поэтому отсюда следует, что $\lambda = \lambda'$. Получили противоречие. Тем самым утверждение доказано. □

Теорема 1.5.1. *Собственные тензоры тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, соответствующие попарно различным характеристическим числам, линейно независимы.*

Эту теорему, используя утверждение 1.5.1, можно доказать методом математической индукции.

Теорема 1.5.2. *Если $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \mathbb{W}_3, \ldots$ — собственные тензоры из $\mathbb{C}_p(\Omega)$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, соответствующие одному и тому же собственному значению λ, то их линейная комбинация $C_1\mathbb{W}_1 + C_2\mathbb{W}_2 + C_3\mathbb{W}_3 + \ldots$ либо равна нулю, либо также является собственным тензором тензора $\mathbb{A}$ при том же числе λ.*

Доказательство. В самом деле, из $\mathbb{A}\mathbb{W}_k = \lambda\mathbb{W}_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, следует равенство

$$\mathbb{A}(C_1\mathbb{W}_1 + C_2\mathbb{W}_2 + C_3\mathbb{W}_3 + \ldots) = \lambda(C_1\mathbb{W}_1 + C_2\mathbb{W}_2 + C_3\mathbb{W}_3 + \ldots),$$

что доказывает теорему. □

Следовательно, линейно независимые собственные тензоры, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, образуют базис собственного подмодуля, каждый тензор которого есть собственный тензор при том же λ. В частности, каждый собственный тензор порождает одномерный собственный подмодуль.

Следует заметить, что линейная комбинация собственных тензоров тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, соответствующих различным характеристическим числам, вообще говоря, не будет собственным тензором тензора $\mathbb{A}$.

Определение 1.5.2. Два тензора $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, связанные соотношением

$$\mathbb{B} = \mathbb{T}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{T}, \tag{1.5.10}$$

где $\mathbb{T}$ — некоторый невырожденный тензор, называются подобными.

Легко усмотреть, что отношение подобия между тензорами модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является отношением эквивалентности, т.е. имеют место три свойства подобия тензоров: рефлексивность (тензор $\mathbb{A}$ всегда подобен самому себе), симметричность (если $\mathbb{A}$ подобен $\mathbb{B}$, то и $\mathbb{B}$ подобен $\mathbb{A}$), транзитивность (если $\mathbb{A}$ подобен $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}$ подобен $\mathbb{D}$, то $\mathbb{A}$ подобен $\mathbb{D}$).

Из (1.5.10) следует, что подобные тензоры имеют всегда равные детерминанты. Действительно,

$$\det\mathbb{B} = (\det\mathbb{T}^{-1})\det\mathbb{A}\det\mathbb{T} = \det\mathbb{A}.$$

Равенство детерминантов $\det\mathbb{B} = \det\mathbb{A}$ является необходимым, но не достаточным условием для подобия тензоров $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Нетрудно заметить, что в силу (1.5.10) получаем

$$\lambda\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{B} = \mathbb{T}^{-1} \overset{p}{\otimes} (\lambda\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \mathbb{T}.$$

Отсюда в свою очередь находим

$$\det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{B}) = \det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}).$$

Таким образом, подобные тензоры имеют один и тот же характеристический многочлен (одно и то же характеристическое уравнение), а также — одни и те же собственные значения.

Не представляет большого труда выписать выражения для коэффициентов характеристического уравнения с помощью собственных значений тензора $\mathbb{A}$. В самом деле, воспользуясь теоремой Виета [17] будем иметь

$$\begin{aligned}
&I_1(\mathbb{A}) \equiv a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n^p},\\
&I_2(\mathbb{A}) \equiv a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_1\lambda_{n^p} + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \ldots + \lambda_2\lambda_{n^p} +\\
&\quad +\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5 + \ldots + \lambda_3\lambda_{n^p} + \ldots + \lambda_{n^p-1}\lambda_{n^p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&I_{n^p-1}(\mathbb{A}) \equiv a_{n^p-1} = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n^p-1} + \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n^p-2}\lambda_{n^p} + \ldots + \lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{n^p},\\
&I_{n^p}(\mathbb{A}) \equiv a_{n^p} = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n^p-1}\lambda_{n^p}.
\end{aligned}$$

Здесь $I_k(\mathbb{A})$, $k = \overline{1, n^p}$, обозначает инвариант k-го порядка тензора $\mathbb{A}$. Итак, тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если $\det \mathbb{A} \neq 0$, имеет n^p линейно независимых алгебраических инвариантов.

В заключение отметим, что корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^p}$ уравнения (1.5.9) и только они являются собственными значениями тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Этим корням соответствуют n^p собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$, которые линейно независимы и нормированы. Эта система тензоров, вообще говоря, не ортогональна, но каждая ее подсистема, которая состоит из собственных тензоров, соответствующих какому-нибудь кратному собственному значению, ортонормальна.

1.5.1 Приведение к каноническому виду (главным осям) тензора ранга $2p$

Прежде всего отметим, что имеет место утверждение.

Утверждение 1.5.2. Если система тензоров $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_k$ линейно независима, то система тензоров $\overline{\mathbb{W}}_1, \ldots, \overline{\mathbb{W}}_k$ также линейно независима.

Из этого утверждения и сказанного в конце предыдущего пункта следует справедливость утверждения.

Утверждение 1.5.3. Система собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а также система тензоров $\overline{\mathbb{W}}_1, \ldots, \overline{\mathbb{W}}_{n^p}$ (по отдельности) составляют базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

На основании этого утверждения и теоремы (1.3.5) можно доказать утверждение.

Утверждение 1.5.4. Системы мультитензоров

$$\mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_j, \quad \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \quad \overline{\mathbb{W}}_i \otimes \mathbb{W}_j, \quad \overline{\mathbb{W}}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \;\; i,j = \overline{1, n^p},$$

где $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ система собственных тензоров тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, являются базисами (каждая в отдельности) алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

В силу этого утверждения, очевидно, всякий тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно представить в виде

$$\mathbb{A} = A^{i\cdot}_{\cdot j} \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}^j, \quad i, j = \overline{1, n^p}. \tag{1.5.11}$$

Учитывая (1.5.11) в уравнениях

$$\mathbb{A}\mathbb{W}_k = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad < k = \overline{1, n^p} >,$$

находим

$$A^{i\cdot}_{\cdot j}(\mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}^j)\mathbb{W}_k = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad < k = \overline{1, n^p} > .$$

Отсюда, учитывая, что

$$(\mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}^j)\mathbb{W}_k = \mathbb{W}_i(\overline{\mathbb{W}}^j \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k) = \mathbb{W}_i(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}^j) = \mathbb{W}_i \delta^j_k,$$

получим

$$A^{i\cdot}_{\cdot k} \mathbb{W}_i = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad < k = \overline{1, n^p} > .$$

Из этого соотношения в силу линейной независимости тензоров $\mathbb{W}_k$ будем иметь

$$A^{i\cdot}_{\cdot k} = \lambda_k \delta^i_k, \quad i = \overline{1, n^p}, \ < k = \overline{1, n^p} > .$$

Теперь на основании последнего соотношения (1.5.11) представится в виде

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \tag{1.5.12}$$

Соотношение (1.5.12), очевидно, в компонентах можно записать в форме

$$A_{i_1 \ldots i_p}{}^{j_1 \ldots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k W_{k, i_1 \ldots i_p} \overline{W}^{\,k, j_1 \ldots j_p}. \tag{1.5.13}$$

Соотношения (1.5.12) или (1.5.13) важны для выявления структуры каждого тензора $\mathbb{A}$ алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В частности, всякий тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ выражается через инвариантные характеристики этого тензора — собственные значения λ_k и соответствующие им собственные тензоры. Представление тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ в виде (1.5.12) называется приведением этого тензора к каноническому виду (главным осям). Оно имеет большое применение в различных областях математики и механики.

Теперь рассмотрим случай, когда несколько собственных значений тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ равны нулю. Очевидно, все собственные значения тензора не могут быть нулями, ибо тогда имели бы тривиальный случай $\mathbb{A} = 0$.

Нетрудно заметить, что $\det \mathbb{A}$ равняется произведению собственных значений тензора $\mathbb{A}$, т.е.

$$\det \mathbb{A} = a_{n^p} = \lambda_1 \ldots \lambda_{n^p}. \tag{1.5.14}$$

Очевидно, (1.5.14) получается еще по теореме Виета. Из (1.5.14) следует, что некоторые собственные значения тензора $\mathbb{A}$ равны нулю тогда и только тогда, когда $\det \mathbb{A} = 0$. Пусть

r — ранг детерминанта $\det\mathbb{A}$ (ранг матрицы компонент тензора $\mathbb{A}$), который, конечно, является скалярной характеристикой тензора $\mathbb{A}$. Тогда однородная система уравнений

$$A_{i_1\ldots i_p}{}^{j_1\ldots j_p}W_{j_1\ldots j_p}=0 \quad (A_{i\cdot}^{\cdot j}W_j=0),$$
$$i,j=\overline{1,n^p},\ \ i=№(i_1,\ldots,i_p),\ \ j=№(j_1,\ldots,j_p),\ \ i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_p=\overline{1,n^p},$$

имеет r линейно независимых решений $\mathbb{W}_1,\ldots,\mathbb{W}_r$. При этом в силу сказанного в конце предыдущего пункта эта система тензоров, являющихся тензорами модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, ортонормальна. Очевидно, в рассматриваемом случае кратность собственного значения $\lambda=0$ равна рангу r определителя $\det\mathbb{A}$. Предположим, что

$$\lambda_{n^p-r+1}=\lambda_{n^p-r+2}=\ldots=\lambda_{n^p}=0, \quad \lambda_i\neq 0,\ \text{ если }\ i=\overline{1,n^p-r}.$$

В таком случае соотношение (1.5.12) получит вид

$$\mathbb{A}=\sum_{k=1}^{n^p-r}\lambda_k\mathbb{W}_k\otimes\overline{\mathbb{W}}^k.$$

Следует заметить, что собственные тензоры $\mathbb{W}_k$, $k=\overline{1,n^p-r}$, соответствующие ненулевым собственным значениям не образуют полного базиса модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Для того, чтобы получить полный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, к ним следует добавить r тензоров $\mathbb{W}'_1,\ldots,\mathbb{W}'_r$, являющихся нетривиальными решениями однородного уравнения $\mathbb{A}\overset{p}{\otimes}\mathbb{W}=0$.

Таким образом, собственные тензоры тензора $\mathbb{A}$ алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ образуют базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, а их парные прямые произведения являются базисом алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Теперь рассмотрим важный частный случай, когда тензор $\mathbb{A}$ удовлетворяют условию

$$A_{i_1\ldots i_pj_1\ldots j_p}=\overline{A}_{j_1\ldots j_pi_1\ldots i_p}\ \ (\mathbb{A}=\mathbb{A}^*),\quad i_1,\ldots,i_p;\,j_1,\ldots,j_p=\overline{1,n}. \tag{1.5.15}$$

Тогда для любых двух тензоров $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'\in\mathbb{C}_p(\Omega)$ имеем

$$\overline{\mathbb{W}}'\mathbb{A}\mathbb{W}=\overline{W}'^{i_1\ldots i_p}A_{i_1\ldots i_pj_1\ldots j_p}W^{j_1\ldots j_p}=W^{j_1\ldots j_p}\overline{A}_{j_1\ldots j_pi_1\ldots i_p}\overline{W}'^{i_1\ldots i_p}=\mathbb{W}\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{W}}'.$$

Итак, получим инвариантное относительно преобразований координат равенство

$$\overline{\mathbb{W}}'\mathbb{A}\mathbb{W}=\mathbb{W}\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{W}}'. \tag{1.5.16}$$

Отсюда следует, что условие (1.5.15) выражает инвариантное свойство тензора алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. *Тензоры алгебры, обладающие этим свойством, называются эрмитовыми.* В случае действительного (вещественного) тензора эрмитовость означает симметричность вида

$$A_{i_1\ldots i_pj_1\ldots j_p}=A_{j_1\ldots j_pi_1\ldots i_p}.$$

Допустим $\mathbb{A}$ — эрмитов тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, λ — его собственное значение, а $\mathbb{W}$ — соответствующий собственный тензор. Тогда, конечно, будем иметь

$$\mathbb{A}\mathbb{W}=\lambda\mathbb{W},\quad \overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{W}}=\overline{\lambda\mathbb{W}}. \tag{1.5.17}$$

Умножая первое соотношение (1.5.17) на $\overline{\mathbb{W}}$, второе — на $\mathbb{W}$, а затем из одного вычитая другое, в силу (1.5.3) и (1.5.16) получим

$$(\lambda-\overline{\lambda})\mathbb{W}\overline{\mathbb{W}}=(\lambda-\overline{\lambda})(\mathbb{W},\mathbb{W})=\lambda-\overline{\lambda}=\overline{\mathbb{W}}\mathbb{A}\mathbb{W}-\mathbb{W}\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{W}}=0,$$

т.е. $\lambda = \overline{\lambda}$. Таким образом собственные значения эрмитова тензора являются действительными.

Пусть λ и λ' — два различных собственных значения эрмитова тензора $\mathbb{A}$ алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ — соответствующие им собственные тензоры. Тогда справедливы соотношения

$$\mathbb{A}\mathbb{W} = \lambda\mathbb{W}, \quad \overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{W}}' = \lambda'\overline{\mathbb{W}}'.$$

Если умножим первое из этих соотношений на $\overline{\mathbb{W}}'$, второе — на $\mathbb{W}$, а потом из одного вычтем другое, то на основании (1.5.16) получим

$$(\lambda - \lambda')\mathbb{W}\overline{\mathbb{W}}' = \overline{\mathbb{W}}'\mathbb{A}\mathbb{W} - \mathbb{W}\overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{W}}' = 0,$$

ибо по условию $\lambda \neq \lambda'$, поэтому отсюда находим, что $\mathbb{W}\overline{\mathbb{W}}' = (\mathbb{W}, \mathbb{W}') = 0$, т.е. $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ ортогональны.

Таким образом, если $\mathbb{A}$ — эрмитов тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то его собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^p}$ действительны, а собственные тензоры образуют ортонормальную систему. В этом случае $\mathbb{W}_i = \mathbb{W}^i$ и соотношение (1.5.12) представляется в форме

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k. \tag{1.5.18}$$

Для компонент тензора $\mathbb{A}$ будем иметь выражение

$$A_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_{k,i_1\ldots i_p} \overline{W}_{k,j_1\ldots j_p}.$$

Если $\mathbb{A}$ — вещественный эрмитов тензор, то его собственные тензоры также будут вещественными. Следовательно, что для вещественного эрмитова тензора соотношение (1.5.18) примет вид

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \mathbb{W}_k. \tag{1.5.19}$$

Отсюда для компонент имеем представление

$$A_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k W_{k,i_1\ldots i_p} W_{k,j_1\ldots j_p}.$$

Легко убедиться в том, что любую натуральную степень тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно определить формулой

$$\mathbb{A}^n = \underbrace{\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \ldots \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}}_{n}.$$

Если тензор представлен в главных осях (1.5.12), то будем иметь

$$\mathbb{A}^n = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^n \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \tag{1.5.20}$$

На основании представления (1.5.12) можно ввести определение степени тензора с любым числовым показателем в виде

$$\mathbb{A}^\alpha = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^\alpha \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \tag{1.5.21}$$

Здесь предполагаем, что $\mathbb{A}^\alpha$ определяется для тех значений α, для которых определяется степень λ_k^α. Следовательно, если $\det \mathbb{A} \neq 0$, то $\mathbb{A}^0 = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$. Кроме того, в этом случае имеем

$$\mathbb{A}^{-1} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^{-1} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \tag{1.5.22}$$

Нетрудно выразить инварианты обратного тензора $\mathbb{A}^{-1}$ через инварианты тензора $\mathbb{A}$. В самом деле, осуществляя простые выкладки, в силу (1.5.22) получим

$$I_k(\mathbb{A}^{-1}) = I_{n^p}^{-1}(\mathbb{A}) I_{n^p-k}(\mathbb{A}), \quad k = \overline{1, n^p - 1}, \quad I_{n^p}(\mathbb{A}^{-1}) = I_{n^p}^{-1}(\mathbb{A}). \tag{1.5.23}$$

Нетрудно найти инварианты любой степени тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, т.е. $I_k(\mathbb{A}^m)$, где $k = \overline{1, n^p}$, а m — произвольное натуральное число.

Следует заметить, что в качестве алгебраических инвариантов тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно рассматривать $I_k(\mathbb{A})$, $k = \overline{1, n^p}$, или $I_k(\mathbb{A}^m)$, $m = \overline{1, n^p}$. Легко найти связь между этими инвариантами, т.е. одни выражать через другие. Например, имеет место формула

$$I_2(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\big[I_1^2(\mathbb{A}) - I_1(\mathbb{A}^2)\big],$$

справедливость которой легко доказать, выражая инварианты с помощью собственных значений тензора $\mathbb{A}$. Для нахождения остальных соотношений, выражающих одни инварианты через другие, необходимо знание теоремы Гамильтона-Кэли для тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, о которой речь пойдет ниже.

Любой тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно представить в виде суммы симметричного и кососимметричного (антисимметричного) тензоров следующим соотношением

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^S + \mathbb{A}^A, \quad \mathbb{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T), \quad \mathbb{A}^A = \frac{1}{2}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^T).$$

Аналогично тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно представить суммой шарового тензора и девиатора

$$\mathbb{A} = \frac{1}{n^p} I_1(\mathbb{A}) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} + dev\, \mathbb{A}.$$

Следовательно, $I_1(dev\, \mathbb{A}) = 0$.

Глава 2

Многочлены с тензорными коэффициентами и действия над ними. Обобщенная теорема Безу. Теорема Гамильтона–Кэли

2.1 Основные определения и действия над тензорными многочленами

С каждым тензором $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, так же, как с каждой квадратной матрицей, связаны два многочлена: характеристический и минимальный. Эти многочлены играют большую роль в различных вопросах теории тензоров. Например, понятие функции тензора, целиком основывается на понятии минимального многочлена тензора.

Определение 2.1.1. Тензор $\mathbb{B}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, компонентами которого являются многочлены относительно λ, называется многочленом с тензорными коэффициентами или тензорным многочленом, или еще λ-тензором.

В силу определения компоненты тензорного многочлена $\mathbb{B}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ представляются в виде

$$B_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_p}(\lambda) = B_{0, i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_p} \lambda^m + B_{1, i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_p} \lambda^{m-1} + \dots + B_{m, i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_p}.$$

Тогда тензорный многочлен можно записать в форме

$$\mathbb{B}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{B}_k \lambda^{m-k} = \mathbb{B}_0 \lambda^m + \mathbb{B}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \mathbb{B}_{m-1} \lambda + \mathbb{B}_m, \tag{2.1.1}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbb{B}_k = B_{k, i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_p} \mathbf{A}^{i_1} \otimes \dots \mathbf{A}^{i_p} \mathbf{A}_{j_1} \otimes \dots \mathbf{A}_{j_p} = B_{k, i \cdot}^{\ \cdot j} \mathbb{A}^i \otimes \mathbb{A}_j, \\ i_1, \dots, i_p;\ j_1, \dots, j_p = \overline{1, n}, \ \ i, j = \overline{1, n^p}, \ \ i = \text{№}(i_1, \dots, i_p), \ \ j = \text{№}(j_1, \dots, j_p). \end{gathered}$$

Число m называется степенью тензорного многочлена, если $\mathbb{B}_0 \neq 0$. Число $2p$ называется порядком тензорного многочлена.

Определение 2.1.2. Тензорный многочлен (2.1.1) называется регулярным, если $\det\mathbb{B}_0 \neq 0$.

В отличие от тензорного многочлена, обычный многочлен со скалярными коэффициентами назовем скалярным многочленом.

Рассмотрим основные операции над тензорными многочленами.

2.1.1 Сумма и разность двух тензорных многочленов

Пусть даны два тензорных многочлена $\mathbb{B}(\lambda)$ и $\mathbb{D}(\lambda)$ одинакового порядка. Пусть m — наибольшая из степеней этих многочленов. Тогда их можно представить следующим образом:

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}_0\lambda^m + \mathbb{B}_1\lambda^{m-1} + \ldots + \mathbb{B}_m, \quad \mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{D}_0\lambda^m + \mathbb{D}_1\lambda^{m-1} + \ldots + \mathbb{D}_m.$$

Суммой и разностью этих тензорных многочленов называется следующий тензорный многочлен:

$$\mathbb{B}(\lambda) \pm \mathbb{D}(\lambda) = (\mathbb{B}_0 \pm \mathbb{D}_0)\lambda^m + (\mathbb{B}_1 \pm \mathbb{D}_1)\lambda^{m-1} + \ldots + (\mathbb{B}_m \pm \mathbb{D}_m).$$

Следовательно, сумма (разность) двух тензорных многочленов одного и того же порядка является тензорным многочленом степени, не превосходящей наибольшей из степеней данных тензорных многочленов.

2.1.2 Произведение двух тензорных многочленов

Пусть даны два тензорных многочлена $\mathbb{B}(\lambda)$ и $\mathbb{D}(\lambda)$ из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ степеней m и s соответственно:

$$\begin{aligned} &\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}_0\lambda^m + \mathbb{B}_1\lambda^{m-1} + \ldots + \mathbb{B}_m, \quad (\mathbb{B}_0 \neq 0), \\ &\mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{D}_0\lambda^s + \mathbb{D}_1\lambda^{s-1} + \ldots + \mathbb{D}_s, \quad (\mathbb{D}_0 \neq 0). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Тогда произведением $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$ называется тензорный многочлен вида

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\lambda)\mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{B}_0\mathbb{D}_0\lambda^{m+s} + (\mathbb{B}_0\mathbb{D}_1 + \mathbb{B}_1\mathbb{D}_0)\lambda^{m+s-1} + \\ +(\mathbb{B}_0\mathbb{D}_2 + \mathbb{B}_1\mathbb{D}_1 + \mathbb{B}_2\mathbb{D}_0)\lambda^{m+s-2} + \ldots + \mathbb{B}_m\mathbb{D}_s. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Здесь, конечно, под произведением понимается внутреннее p-произведение, т.е. $\mathbb{B}(\lambda)\mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{B}(\lambda) \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}(\lambda)$, $\mathbb{B}_r\mathbb{D}_l = \mathbb{B}_r \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}_l$, $r = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,s}$. Заметим, что внутреннее p-произведение тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ некоммутативно, т.е. если рассмотрим произведение $\mathbb{D}(\lambda)\mathbb{B}(\lambda)$, то получим, вообще говоря, другой тензорный многочлен. В отличие от произведения скалярных многочленов, произведение тензорных многочленов (2.1.3) может иметь степень, меньшую $m+s$. В самом деле, в (2.1.3) произведение тензоров $\mathbb{B}_0\mathbb{D}_0$ может равняться нулю при $\mathbb{B}_0 \neq 0$ и $\mathbb{D}_0 \neq 0$. Однако можно доказать, что если хотя бы один из тензоров $\mathbb{B}_0$ и $\mathbb{D}_0$ — невырожденный тензор и $\mathbb{B}_0 \neq 0$ и $\mathbb{D}_0 \neq 0$, то $\mathbb{B}_0\mathbb{D}_0 \neq 0$.

Таким образом, произведение двух тензорных многочленов алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ равно тензорному многочлену, степень которого меньше или равна сумме степеней сомножителей. Если хотя бы один из двух сомножителей — регулярный тензорный многочлен, то в этом случае степень произведения двух тензорных многочленов равна сумме степеней сомножителей.

Представим (2.1.1) в виде

$$\mathbb{B}(\lambda) = \lambda^m \mathbb{B}_0 + \lambda^{m-1}\mathbb{B}_1 + \ldots + \mathbb{B}_m. \tag{2.1.4}$$

Очевидно, обе записи (2.1.1) и (2.1.4) при скалярном λ дают один и тот же результат. Однако, если вместо скалярного аргумента λ в (2.1.1) и (2.1.4) подставить какой-нибудь тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то вообще говоря, получим различные значения, так как степени тензора $\mathbb{A}$ могут не быть коммутативными с тензорными коэффициентами $\mathbb{B}_0, \ldots, \mathbb{B}_m$. Подставляя $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ в (2.1.1) и (2.1.4) вместо λ, получим соответственно

$$\mathbb{B}(\mathbb{A}) = \mathbb{B}_0\mathbb{A}^m + \mathbb{B}_1\mathbb{A}^{m-1} + \ldots + \mathbb{B}_m, \tag{2.1.5}$$

$$\hat{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) = \mathbb{A}^m\mathbb{B}_0 + \mathbb{A}^{m-1}\mathbb{B}_1 + \ldots + \mathbb{B}_m. \tag{2.1.6}$$

Назовем $\mathbb{B}(\mathbb{A})$ правым, а $\hat{\mathbb{B}}(\mathbb{A})$ – левым значением тензорного многочлена $\mathbb{B}(\lambda)$ при подстановке тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ вместо λ.

Теперь представим (2.1.2) в форме

$$\mathbb{B}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{B}_{m-k}\lambda^k, \quad \mathbb{D}(\lambda) = \sum_{r=0}^{s} \mathbb{D}_{s-r}\lambda^r$$

и рассмотрим их произведение. Имеем

$$\mathbb{P}(\lambda) = \mathbb{B}(\lambda)\mathbb{D}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{B}_{m-k}\lambda^k \sum_{r=0}^{s} \mathbb{D}_{s-r}\lambda^r = \sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{s} \mathbb{B}_{m-k}\mathbb{D}_{s-r}\lambda^{k+r} = \sum_{l=0}^{m+s} \Big(\sum_{k+r=l} \mathbb{B}_{m-k}\mathbb{D}_{s-r}\Big)\lambda^l,$$

т.е.

$$\mathbb{P}(\lambda) = \sum_{l=0}^{m+s} \Big(\sum_{k+r=l} \mathbb{B}_{m-k}\mathbb{D}_{s-r}\Big)\lambda^l = \sum_{l=0}^{m+s} \lambda^l \sum_{k+r=l} \mathbb{B}_{m-k}\mathbb{D}_{s-r}$$

Отсюда, подставляя вместо λ тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, аналогично (2.1.5) и (2.1.6) получим

$$\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{B}(\mathbb{A})\mathbb{D}(\mathbb{A}), \quad \hat{\mathbb{P}}(\mathbb{A}) = \hat{\mathbb{B}}(\mathbb{A})\hat{\mathbb{D}}(\mathbb{A}). \tag{2.1.7}$$

Следует заметить, что первое соотношение (2.1.7) имеет место, если тензор $\mathbb{A}$ коммутирует со всеми тензорными коэффициентами $\mathbb{D}_{m-k}$, $k = \overline{1, m}$. Аналогично второе соотношение (2.1.7) написано с учетом того, что тензор $\mathbb{A}$ коммутирует со всеми тензорами $\mathbb{B}_{s-r}$, $r = \overline{1, s}$.

Таким образом, правое (левое) значение произведения двух тензорных многочленов равно произведению правых (левых) значений сомножителей, если тензор-аргумент $\mathbb{A}$ коммутирует со всеми тензорными коэффициентами правого (левого) сомножителя. Если $\mathbb{Q}(\lambda)$ — сумма двух тензорных многочленов $\mathbb{B}(\lambda)$ и $\mathbb{D}(\lambda)$ алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то всегда справедливы соотношения

$$\mathbb{Q}(\mathbb{A}) = \mathbb{B}(\mathbb{A}) + \mathbb{D}(\mathbb{A}), \quad \hat{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}) = \hat{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) + \hat{\mathbb{D}}(\mathbb{A}).$$

2.1.3 Правое и левое деление тензорных многочленов. Обобщенная теорема Безу. Теорема Гамильтона-Кэли

Рассмотрим два тензорных[1] многочлена $\mathbb{B}(\lambda)$ и $\mathbb{D}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ (2.1.2) и предположим, что $\mathbb{B}_0 \neq 0$ и $\det \mathbb{D}_0 \neq 0$, т.е. $\mathbb{D}(\lambda)$ — регулярный многочлен.

[1] Рассмотренные ниже вопросы и теоремы аналогичны вопросам и теоремам о матричных многочленах, приведенных в [6].

Определение 2.1.3. Будем говорить, что тензорные многочлены $\mathbb{Q}(\lambda)$ и $\mathbb{R}(\lambda)$ являются соответственно правым частным и правым остатком при делении $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$, если

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{Q}(\lambda)\mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{R}(\lambda) \tag{2.1.8}$$

и степень $\mathbb{R}(\lambda)$ меньше степени $\mathbb{D}(\lambda)$.

Определение 2.1.4. Будем говорить, что тензорные многочлены $\hat{\mathbb{Q}}(\lambda)$ и $\hat{\mathbb{R}}(\lambda)$ являются соответственно левым частным и левым остатком при делении $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$, если

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{D}(\lambda)\hat{\mathbb{Q}}(\lambda) + \hat{\mathbb{R}}(\lambda) \tag{2.1.9}$$

и степень $\hat{\mathbb{R}}(\lambda)$ меньше степени $\mathbb{D}(\lambda)$.

Следует заметить, что при правом делении, т.е. при нахождении правого частного и правого остатка, на делитель $\mathbb{D}(\lambda)$ частное $\mathbb{Q}(\lambda)$ умножается справа (2.1.8), а при левом делении на делитель $\mathbb{D}(\lambda)$ частное $\hat{\mathbb{Q}}(\lambda)$ умножается слева (2.1.9). Тензорные многочлены $\mathbb{Q}(\lambda)$ и $\mathbb{R}(\lambda)$, вообще говоря, не совпадают с многочленами $\hat{\mathbb{Q}}(\lambda)$ и $\hat{\mathbb{R}}(\lambda)$.

Теорема 2.1.1. *Как правое, так и левое деление тензорных многочленов алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ (одного и того же порядка) всегда выполнимо и однозначно, если делитель — регулярный тензорный многочлен.*

Доказательство. Рассмотрим правое деление $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$. Если $m < s$, то можно положить $\mathbb{Q}(\lambda) = 0$ и $\mathbb{R}(\lambda) = \mathbb{B}(\lambda)$. При $m \geq s$ для нахождения частного $\mathbb{Q}(\lambda)$ и остатка $\mathbb{R}(\lambda)$ используем обычную схему (обычный алгоритм) деления многочлена на многочлен. Разделим старший член делимого $\mathbb{B}_0\lambda^m$ на старший член делителя $\mathbb{D}_0\lambda^s$. Получим старший член искомого частного $\mathbb{B}_0\mathbb{D}_0^{-1}\lambda^{m-s}$. Умножая этот член на делитель $\mathbb{D}(\lambda)$ справа и полученный результат вычтя из $\mathbb{B}(\lambda)$, найдем первый остаток $\mathbb{B}^{(1)}(\lambda)$. Следовательно, можем написать

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}_0\mathbb{D}_0^{-1}\lambda^{m-s}\mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{B}^{(1)}(\lambda). \tag{2.1.10}$$

Степень m_1 тензорного многочлена $\mathbb{B}^{(1)}(\lambda)$ меньше m, где

$$\mathbb{B}^{(1)}(\lambda) = \mathbb{B}_0^{(1)}\lambda^{m_1} + \mathbb{B}_1^{(1)}\lambda^{m_1-1} + \ldots + \mathbb{B}_{m_1}^{(1)}, \quad \mathbb{B}_0^{(1)} \neq 0. \tag{2.1.11}$$

Если $m_1 \geq s$, то, повторяя этот процесс, находим

$$\begin{aligned} &\mathbb{B}^{(1)}(\lambda) = \mathbb{B}_0^{(1)}\mathbb{D}_0^{-1}\lambda^{m_1-s}\mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{B}^{(2)}(\lambda), \\ &\mathbb{B}^{(2)}(\lambda) = \mathbb{B}_0^{(2)}\lambda^{m_2} + \mathbb{B}_1^{(2)}\lambda^{m_2-1} + \ldots + \mathbb{B}_{m_2}^{(2)}, \ \ \mathbb{B}_0^{(2)} \neq 0, \ \ m_2 < m_1, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

и т.д. Так как степени тензорных многочленов $\mathbb{B}(\lambda)$, $\mathbb{B}^{(1)}(\lambda)$, $\mathbb{B}^{(2)}(\lambda), \ldots$ убывают, то на некотором шаге придем к остатку $\mathbb{R}(\lambda)$, степень которого будет меньше s, т.е. будем иметь

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{Q}(\lambda)\mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{R}(\lambda), \tag{2.1.13}$$

где в силу (2.1.10)–(2.1.12) $\mathbb{Q}(\lambda)$ имеет выражение

$$\mathbb{Q}(\lambda) = \mathbb{B}_0\mathbb{D}_0^{-1}\lambda^{m-s} + \mathbb{B}_0(\lambda)\mathbb{D}_0^{-1}\lambda^{m_1-s} + \ldots$$

Докажем однозначность правого деления от противного. Пусть кроме (2.1.13) имеем второе представление

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{Q}^*(\lambda)\mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{R}^*(\lambda), \tag{2.1.14}$$

где степень тензорного многочлена $\mathbb{R}^*(\lambda)$ меньше степени $\mathbb{D}(\lambda)$, т.е. меньше s.

Вычитая почленно (2.1.14) из (2.1.13), получаем

$$\big[\mathbb{Q}(\lambda) - \mathbb{Q}^*(\lambda)\big]\mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{R}^*(\lambda) - \mathbb{R}(\lambda). \tag{2.1.15}$$

Так как $\det \mathbb{D}_0 \neq 0$, поэтому степень левой части (2.1.15) равняется сумме степеней $\mathbb{D}(\lambda)$ и $\mathbb{Q}(\lambda) - \mathbb{Q}^*(\lambda)$, и если $\mathbb{Q}(\lambda) - \mathbb{Q}^*(\lambda) \neq 0$, будет не меньше s. Это невозможно, ибо степень тензорного многочлена в правой части (2.1.15) меньше s. Таким образом, $\mathbb{Q}(\lambda) - \mathbb{Q}^*(\lambda) = 0$. Тогда из (2.1.15) следует, что $\mathbb{R}(\lambda) - \mathbb{R}^*(\lambda) = 0$, т.е. $\mathbb{Q}(\lambda) = \mathbb{Q}^*(\lambda)$, $\mathbb{R}(\lambda) = \mathbb{R}^*(\lambda)$, что и требовалось доказать. □

Совершенно аналогично доказываются существование и единственность левого частного и левого остатка (выполнимость и однозначность левого деления). Заметим, что возможность и однозначность левого деления $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$ следуют из возможности и однозначности правого деления транспонированных тензорных многочленов $\mathbb{B}^T(\lambda)$ и $\mathbb{D}^T(\lambda)$. Очевидно, из регулярности $\mathbb{D}(\lambda)$ следует регулярность $\mathbb{D}^T(\lambda)$.

Теорема 2.1.2. *(Обобщенная теорема Безу) При правом (левом) делении тензорного многочлена* $\mathbb{F}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *на тензорный бином* $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, *остаток от деления равен* $\mathbb{F}(\mathbb{A})$ $\big(\hat{\mathbb{F}}(\mathbb{A})\big)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный тензорный многочлен $\mathbb{F}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ степени m

$$\mathbb{F}(\lambda) = \mathbb{F}_0\lambda^m + \mathbb{F}_1\lambda^{m-1} + \ldots + \mathbb{F}_{m-1}\lambda + \mathbb{F}_m, \quad \mathbb{F}_0 \neq 0,$$

и разделим его справа и слева на тензорный бином $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$, где $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Получим

$$\mathbb{F}(\lambda) = \mathbb{Q}(\lambda)\big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big) + \mathbb{R}, \quad \mathbb{F}(\lambda) = \big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\hat{\mathbb{Q}}(\lambda) + \hat{\mathbb{R}}. \tag{2.1.16}$$

В рассматриваемом случае правый остаток $\mathbb{R}$ и левый остаток $\hat{\mathbb{R}}$ не зависят от λ, так как их степень меньше степени бинома $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Заменяя в соотношениях (2.1.16) λ на тензор $\mathbb{A}$ и учитывая, что тензор $\mathbb{A}$ коммутирует с тензорными коэффициентами бинома $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$, для правого $\mathbb{F}(\mathbb{A})$ и левого $\hat{\mathbb{F}}(\mathbb{A})$ значений (2.1.7) тензорного многочлена $\mathbb{F}(\lambda)$ будем иметь

$$\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \mathbb{Q}(\mathbb{A})(\mathbb{A} - \mathbb{A}) + \mathbb{R} = \mathbb{R}, \quad \hat{\mathbb{F}}(\mathbb{A}) = (\mathbb{A} - \mathbb{A})\hat{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}) + \hat{\mathbb{R}} = \hat{\mathbb{R}},$$

Теорема Безу доказана. □

Пример. Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $P(\lambda)$ — скалярный многочлен относительно λ. Тогда тензорный многочлен $\mathbb{F}(\lambda) = P(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{P}(\mathbb{A})$ делится (слева и справа) без остатка на $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Это следует из обобщенной теоремы Безу, поскольку в рассматриваемом случае $\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \hat{\mathbb{F}}(\mathbb{A}) = 0$.

Теорема 2.1.3. *(Гамильтона–Кэли) Всякий тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ присоединенный тензорный многочлен для тензорного бинома $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Тогда в силу (1.4.16) можно написать

$$P(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \det\big(\lambda\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)\big(\lambda\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big) = \big(\lambda\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda). \tag{2.1.17}$$

Соотношение (2.1.17) показывает, что тензорный многочлен $P(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ делится справа и слева на бином $\lambda\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ без остатка. На основании обобщенной теоремы Безу это возможно тогда и только тогда, когда остаток равен нулю, т.е. $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(\mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = 0$, что требовалось доказать.

Приведем второй способ доказательства этой теоремы, предполагающий каноническое представление тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В силу определения степени тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, представленного в главных осях (1.5.20), имеем

$$\mathbb{A}^{n^p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^{n^p} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \tag{2.1.18}$$

Подставляя в (2.1.18) вместо $\lambda_k^{n^p}$ его значение, вычисленное из характеристического уравнения (1.5.9) и пользуясь определением степени тензора, получим

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{n^p} &= \sum_{k=1}^{n^p} \Big[\sum_{s=1}^{n^p} (-1)^{s+1} I_s(\mathbb{A})\lambda_k^{n^p-s}\Big]\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k = \\ &= \sum_{s=1}^{n^p} (-1)^{s+1} I_s(\mathbb{A}) \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^{n^p-s}\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k = \sum_{s=1}^{n^p} (-1)^{s+1} I_s(\mathbb{A})\mathbb{A}^{n^p-s},\end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbb{A}^{n^p} + \sum_{s=1}^{n^p} (-1)^s I_s(\mathbb{A})\mathbb{A}^{n^p-s} = \mathbb{P}(\mathbb{A}) = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Пример. Пусть $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}_2(\Omega)$. Найти присоединенный тензорный многочлен $\widetilde{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(\lambda)$ для тензорного бинома $\lambda\underset{\sim}{\mathbf{E}} - \underset{\sim}{\mathbf{A}}$.

Ответ: $\widetilde{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(\lambda) = \underset{\sim}{\mathbf{E}}\lambda^2 + \underset{\sim}{\mathbf{B}}_1\lambda + \underset{\sim}{\mathbf{B}}_2$, где $\underset{\sim}{\mathbf{B}}_1 = I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})\mathbf{E} - \underset{\sim}{\mathbf{A}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{B}}_2 = I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}})\mathbf{E} - I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})\underset{\sim}{\mathbf{A}} + \underset{\sim}{\mathbf{A}}^2$.

Теперь, прежде чем определить коэффициенты присоединенного тензора в общем случае, докажем важные теоремы.

Теорема 2.1.4. *Детерминант тензора, получающегося из произвольного скалярного полинома при замене его аргумента на любой тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, равняется произведению значений полинома на собственных числах тензора $\mathbb{A}$.*

Обозначая через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n^p}$ все собственные числа (с учетом кратностей) тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а через $F(z)$ – некоторый скалярный многочлен переменного (аргумента) z, сформулированную теорему математически можно представить следующим образом:

$$\det \mathbb{F}(\mathbb{A}) = \prod_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k). \tag{2.1.19}$$

Доказательство. Так как по условию теоремы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n^p}$ — все характеристические (собственные) числа тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то характеристический многочлен этого тензора представляется в виде

$$P(\lambda) = \det\bigl(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\bigr) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_{n^p}) = \prod_{k=1}^{n^p}(\lambda - \lambda_k). \tag{2.1.20}$$

В правой части (2.1.20) каждый множитель $\lambda - \lambda_k$, $k = \overline{1, n^p}$, повторяется столько раз, какова кратность корня λ_k.

Для нахождения собственных чисел тензора $\mathbb{F}(\mathbb{A})$ разложим $F(z)$ на линейные множители, полагая, что его степень равна s. Будем иметь

$$\begin{gathered} F(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_s) = \\ = (-1)^s a_0(z_1 - z)(z_2 - z)\ldots(z_s - z) = (-1)^s a_0 \prod_{i=1}^{s}(z_i - z). \end{gathered} \tag{2.1.21}$$

Отсюда, следовательно, находим

$$F(\lambda_k) = (-1)^s a_0 \prod_{i=1}^{s}(z_i - \lambda_k), \quad k = \overline{1, n^p}. \tag{2.1.22}$$

Подставляя в (2.1.21) вместо z тензор $\mathbb{A}$, получим

$$F(\mathbb{A}) = (-1)^s a_0(z_1 \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} (z_2 \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \ldots \overset{p}{\otimes} (z_s \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}). \tag{2.1.23}$$

Учитывая, что детерминант произведения тензоров равен произведению детерминантов этих тензоров (1.4.13), из (2.1.23) в силу (2.1.20) и (2.1.22) найдем

$$\begin{gathered} \det \mathbb{F}(\mathbb{A}) = (-1)^{sn^p} a_0^{n^p} \det(z_1 \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \det(z_2 \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \ldots \det(z_s \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = \\ = (-1)^{sn^p} a_0^{n^p} \prod_{i=1}^{s} P(z_i) = (-1)^{sn^p} a_0^{n^p} \prod_{i=1}^{s}\prod_{k=1}^{n^p}(z_i - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{n^p}\Bigl[(-1)^s a_0 \prod_{i=1}^{s}(z_i - \lambda_k)\Bigr] = \prod_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k), \end{gathered}$$

т.е.

$$\det \mathbb{F}(\mathbb{A}) = \prod_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 2.1.4.1. *Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n^p}$ — все собственные числа (с учетом кратностей) тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то для любых двух скалярных полиномов $G(z)$ и $F(z)$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &\det\bigl[\mathbb{G}(\mathbb{A}) \pm \mathbb{F}(\mathbb{A})\bigr] = \prod_{k=1}^{n^p}\bigl[G(\lambda_k) \pm F(\lambda_k)\bigr], \\ &\det\bigl[\mathbb{G}(\mathbb{A})\mathbb{F}(\mathbb{A})\bigr] = \prod_{k=1}^{n^p} G(\lambda_k)F(\lambda_k) = \prod_{k=1}^{n^p} G(\lambda_k)\prod_{i=1}^{n^p} F(\lambda_i). \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

В частности, если в качестве $G(z)$ выбрать $G(z) = \mu z^0 = \mu$, где μ — некоторый параметр, то из первого равенства (2.1.24) *получим*

$$\det\bigl[\mu \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{F}(\mathbb{A})\bigr] = \prod_{k=1}^{n^p}\bigl[\mu - F(\lambda_k)\bigr]. \tag{2.1.25}$$

Соотношение (2.1.25) можно сформулировать в виде следующего следствия.

Следствие 2.1.4.2. *Если $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$ — все собственные числа (с учетом кратностей) тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $F(z)$ — некоторый скалярный многочлен переменного z, то $F(\lambda_1)$, $F(\lambda_2)$, ..., $F(\lambda_{n^p})$ — все характеристические числа тензора $\mathbb{F}(\mathbb{A})$.*

Нетрудно заметить, что верно следствие.

Следствие 2.1.4.3. *Если тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет собственные числа λ_1, λ_2, ..., λ_{n^p}, то для любого неотрицательного целого m тензор $\mathbb{A}^m$ имеет собственные числа λ_1^m, λ_2^m, ..., $\lambda_{n^p}^m$.*

Теперь выведем формулу, выражающую присоединенный тензор $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ для $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ через тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и его инварианты (коэффициенты характеристического уравнения). Тогда тем самым определим обещанные выше его коэффициенты в общем случае. С этой целью разделим характеристический многочлен тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n^p} (-1)^k a_k \lambda^{n^p-k}, \quad a_0 = 1,$$

на $\lambda - \mu$ с остатком. Нетрудно показать, что в результате этого деления получим

$$P(\lambda) = B(\lambda, \mu)(\lambda - \mu) + P(\mu). \tag{2.1.26}$$

Здесь многочлен двух аргументов $B(\lambda, \mu)$ имеет выражение

$$B(\lambda, \mu) = \lambda^{n^p-1} + B_1 \lambda^{n^p-2} + B_2 \lambda^{n^p-3} + \ldots + B_{n^p-2}\lambda + B_{n^p-1}, \tag{2.1.27}$$

где

$$B_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_i \mu^{k-i}, \quad k = \overline{1, n^p - 1}, \ \ a_0 = 1. \tag{2.1.28}$$

Подставляя вместо λ и μ в (2.1.26) коммутирующие между собой тензоры $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ и $\mathbb{A}$ соответственно и учитывая,что по теореме Гамильтона-Кэли $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = 0$, находим

$$P(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \mathbb{P}(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}) = \mathbb{B}(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \mathbb{A})\big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big). \tag{2.1.29}$$

Сравнивая (2.1.29) с (2.1.17), в силу однозначности частного и (2.1.27) искомая формула для присоединенного тензора представится в форме

$$\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda) = \mathbb{B}\big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \mathbb{A}\big) = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \lambda^{n^p-1} + \mathbb{B}_1 \lambda^{n^p-2} + \mathbb{B}_2 \lambda^{n^p-3} + \ldots + \mathbb{B}_{n^p-2}\lambda + \mathbb{B}_{n^p-1}, \tag{2.1.30}$$

где с помощью (2.1.28) подлежащие определению коэффициенты присоединенного тензора будут иметь вид

$$\mathbb{B}_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_i \mathbb{A}^{k-i}, \quad k = \overline{1, n^p - 1}, \ \ a_0 = 1. \tag{2.1.31}$$

Учитывая (2.1.30), соотношение (2.1.29) представится в форме

$$P(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \big(\lambda\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda) = \widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)\big(\lambda\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big). \tag{2.1.32}$$

Нетрудно доказать, что тензоры $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots, \mathbb{B}_{n^p-1}$ можно вычислять последовательно из следующих рекуррентных соотношений:

$$\mathbb{B}_k = \mathbb{A}\mathbb{B}_{k-1} + (-1)^k a_k \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \quad k = \overline{1, n^p - 1}, \ \mathbb{B}_0 = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}. \tag{2.1.33}$$

При этом заметим, что

$$\mathbb{A}\mathbb{B}_{n^p-1} + (-1)^{n^p} a_{n^p} \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = 0. \tag{2.1.34}$$

Легко усмотреть, что соотношения (2.1.33) и (2.1.34) получаются из (2.1.17), если в правой и левой частях этого равенства приравнять друг другу коэффициенты при одинаковых степенях λ. Рекуррентные равенства (2.1.33) легко доказать и с помощью (2.1.31).

Подставляя в (2.1.34) выражение для $\mathbb{B}_{n^p-1}$ из (2.1.31), получим $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = 0$, т.е. другое доказательство теоремы Гамильтона-Кэли, которое явно не опирается на использование обобщенной теоремы Безу. Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — невырожденный тензор, то $a_{n^p} = \det \mathbb{A} \neq 0$ и из (2.1.34) вытекает

$$\mathbb{A}^{-1} = (-1)^{n^p-1} a_{n^p}^{-1} \mathbb{B}_{n^p-1} = (-1)^{n^p-1} I_{n^p}^{-1}(\mathbb{A})\mathbb{B}_{n^p-1}. \tag{2.1.35}$$

Пусть λ_0 — какое-нибудь собственное число тензора $\mathbb{A}$. Тогда, так как $P(\lambda_0) = 0$, из (2.1.17) следует

$$\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0) \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \lambda_0 \widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0), \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0) = \lambda_0 \widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0). \tag{2.1.36}$$

Представим тензор $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ в виде

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0) = \widetilde{B}^{i}_{\cdot j}\mathbb{A}_i \otimes \mathbb{A}^j = \widetilde{\mathbf{B}}_{\cdot j}\mathbb{A}^j = \widetilde{\mathbf{B}}^{\cdot j}\mathbb{A}_j = \widetilde{\mathbf{B}}_{\cdot j_1\ldots j_p}\mathbb{A}^{j_1\ldots j_p} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\cdot j_1\ldots j_p}\mathbb{A}_{j_1\ldots j_p}, \\ i,j = \overline{1,n^p},\ i = \text{№}(i_1,\ldots,i_p),\ j = \text{№}(j_1,\ldots,j_p),\ \ i_1,\ldots,i_p = \overline{1,n},\ j_1,\ldots,j_p = \overline{1,n}.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0) = \widetilde{B}^{i}_{\cdot j}\mathbb{A}_i \otimes \mathbb{A}^j = \mathbb{A}^i\widetilde{\mathbf{B}}_{i\cdot} = \mathbb{A}_i\widetilde{\mathbf{B}}^{i\cdot} = \widetilde{\mathbf{B}}_{\cdot j}\mathbb{A}^j = \widetilde{\mathbf{B}}^{\cdot j}\mathbb{A}_j = \mathbb{A}^{i_1\ldots i_p}\widetilde{\mathbf{B}}_{i_1\ldots i_p\cdot} = \\ = \mathbb{A}_{i_1\ldots i_p}\widetilde{\mathbf{B}}^{i_1\ldots i_p\cdot} = \widetilde{\mathbf{B}}_{\cdot j_1\ldots j_p}\mathbb{A}^{j_1\ldots j_p} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\cdot j_1\ldots j_p}\mathbb{A}_{j_1\ldots j_p}, \quad \mathbb{A}_{i_1\ldots i_p} = \mathbb{A}_{i_1} \otimes \ldots \mathbb{A}_{i_p}, \\ i,j = \overline{1,n^p},\ i = \text{№}(i_1,\ldots,i_p),\ j = \text{№}(j_1,\ldots,j_p),\ \ i_1,\ldots,i_p = \overline{1,n},\ j_1,\ldots,j_p = \overline{1,n}.\end{gathered}$$

и назовем $\widetilde{\mathbf{B}}_{i\cdot}$ ($\widetilde{\mathbf{B}}^{i\cdot}$) и $\widetilde{\mathbf{B}}_{\cdot j}$ ($\widetilde{\mathbf{B}}^{\cdot j}$) соответственно левыми и правыми ковариантными (контравариантными) составляющими тензора $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$. Тогда нетрудно заметить, что (2.1.36) для ковариантных составляющих тензора $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ можно записать в форме

$$\widetilde{\mathbf{B}}_{i\cdot}(\lambda_0) \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \lambda_0 \widetilde{\mathbf{B}}_{i\cdot}(\lambda_0), \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{B}}_{\cdot j}(\lambda_0) = \lambda_0 \widetilde{\mathbf{B}}_{\cdot j}(\lambda_0). \tag{2.1.37}$$

Отсюда, поднимая индексы i и j, получим аналогичные (2.1.37) соотношения для контравариантных составляющих тензора $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$. На основании (2.1.37) и аналогичных формул для контравариантных составляющих тензора $\mathbb{B}(\lambda_0)$ заключаем, что ненулевые левые и правые ковариантные (контравариантные) составляющие тензора $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ представляют соответственно левые и правые собственные тензоры, соответствующие собственному значению λ_0 тензора $\mathbb{A}$.

Резюмируя вышесказанное, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 2.1.5. *Если коэффициенты характеристического многочлена (уравнения) тензора* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *известны, то присоединенная матрица* $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ *для тензора* $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ *может быть найдена по формуле* (2.1.30)*, а если* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *— невырожденный тензор, то по формуле* (2.1.35) *можно найти обратный тензор* $\mathbb{A}^{-1}$*. Если* λ_0 *— собственное значение тензора* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$*, то ненулевые левые и правые ковариантные (контравариантные) составляющие тензора* $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ *являются соответственно левыми и правыми собственными тензорами тензора* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *при* $\lambda = \lambda_0$*.*

Следует отметить, что Д.К.Фадеев предложил метод одновременного определения коэффициентов характеристического многочлена и матричных коэффициентов присоединенной матрицы [6, 21]. Другой эффективный метод для вычисления коэффициентов характеристического многочлена связан с именем А.Н.Крылова [6]. Следовательно, аналогично изложенному выше материалу эти методы также нетрудно обобщить на случай тензора $\mathbb{A}$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

2.2 Минимальный многочлен тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Введем определения.

Определение 2.2.1. Скалярный многочлен $F(\lambda)$ называется аннулирующим многочленом тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если $\mathbb{F}(\mathbb{A}) = 0$.

Определение 2.2.2. Аннулирующий многочлен $G(\lambda)$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным единице, называется минимальным многочленом этого тензора.

Из теоремы Гамильтона-Кэли следует, что характеристический многочлен $P(\lambda)$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является аннулирующим для этого тензора. Однако в общем случае он не является минимальным.

Теорема 2.2.1. *Произвольный аннулирующий многочлен тензора алгебры* $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *всегда делится без остатка на его минимальный многочлен.*

Доказательство. Разделим произвольный аннулирующий многочлен $F(\lambda)$ на минимальный $G(\lambda)$. Будем иметь

$$F(\lambda) = G(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda),$$

где степень $R(\lambda)$ меньше степени $G(\lambda)$. Подставляя вместо λ в последнее соотношение $\mathbb{A}$, получим

$$\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \mathbb{G}(\mathbb{A})\mathbb{Q}(\mathbb{A}) + \mathbb{R}(\mathbb{A}). \tag{2.2.1}$$

Поскольку $\mathbb{F}(\mathbb{A}) = 0$ и $\mathbb{G}(\mathbb{A}) = 0$, то из (2.2.1) следует, что $\mathbb{R}(\mathbb{A}) = 0$. Однако степень $R(\lambda)$ меньше степени минимального многочлена $G(\lambda)$. Поэтому $R(\lambda) = 0$, ибо в противном случае существовал бы аннулирующий многочлен, степень которого была бы меньше степени минимального многочлена. Этим теорема доказана. □

Теорема 2.2.2. *(о единственности минимального многочлена) Минимальный многочлен тензора алгебры* $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *единственен.*

Доказательство. Пусть существуют два минимальных многочлена $G_1(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$ для одного и того же тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда каждый из них делится на другой многочлен без остатка и, так как эти многочлены имеют одну и ту же степень, то они отличаются друг от друга постоянным множителем. Этот постоянный множитель равен единице, поскольку равны единице старшие коэффициенты многочленов $G_1(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$, т.е. $G_1(\lambda) = G_2(\lambda)$. Теорема доказана. □

Далее получим формулу, связывающую минимальный многочлен с характеристическим. Обозначая через $D_{n^p-1}(\lambda)$ наибольший общий делитель со старшим коэффициентом, равным единице, всех компонент тензора миноров n^p-1 порядка характеристического тензора $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ для тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, т.е. наибольший общий делитель всех компонент присоединенного тензора $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ для характеристического тензора $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$, будем иметь

$$\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda) = D_{n^p-1}(\lambda)\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda), \tag{2.2.2}$$

где $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)$ — некий многочленный тензор (λ-тензор), который называется приведенным присоединенным тензором для $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Учитывая (2.2.2), из (2.1.17) получим

$$P(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)D_{n^p-1}(\lambda). \tag{2.2.3}$$

Отсюда следует, что характеристический многочлен $P(\lambda)$ делится без остатка на $D_{n^p-1}(\lambda)$. В этом можно убедиться непосредственно, разлагая характеристический определитель по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца. Вводя обозначение $K(\lambda) = P(\lambda)/D_{n^p-1}(\lambda)$ и сокращая обе части (2.2.3) на $D_{n^p-1}(\lambda)$, находим

$$K(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)\big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big). \tag{2.2.4}$$

Из (2.2.4) видно, что $K(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ делится без остатка слева и справа на $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Поэтому на основании теоремы Безу $\mathbb{K}(\mathbb{A}) = 0$. Таким образом, многочлен $K(\lambda)$ является аннулирующим для тензора $\mathbb{A}$. Докажем, что он является минимальным многочленом.

Обозначим минимальный многочлен через $K_1(\lambda)$. Тогда в силу теоремы $K(\lambda)$ делится без остатка на $K_1(\lambda)$

$$K(\lambda) = K_1(\lambda)L(\lambda). \tag{2.2.5}$$

Так как $\mathbb{K}_1(\mathbb{A}) = 0$, то в силу обобщенной теоремы Безу тензорный многочлен $K_1(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ делится, например, слева без остатка на $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$

$$K_1(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\widetilde{\mathbb{C}}_1(\lambda). \tag{2.2.6}$$

С помощью (2.2.5) и (2.2.6) получаем

$$K(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\widetilde{\mathbb{C}}_1(\lambda)L(\lambda). \tag{2.2.7}$$

Из соотношений (2.2.4) и (2.2.7) видно, что как $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)$, так и $\widetilde{\mathbb{C}}_1(\lambda)L(\lambda)$ — левые частные при делении $K(\lambda)\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ на $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Из-за однозначности деления имеем $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \widetilde{\mathbb{C}}_1(\lambda)L(\lambda)$.

Из этого равенства следует, что $L(\lambda)$ является общим делителем всех компонент многочленного тензора $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)$. С другой стороны наибольший общий делитель всех компонент приведенного присоединенного тензора $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)$ равен единице, ибо этот тензор был получен из тензора $\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)$ путем деления его компонент на $D_{n^p-1}(\lambda)$. Поэтому $L(\lambda) = \mathrm{const}$. Однако старшие коэффициенты $K(\lambda)$ и $K_1(\lambda)$ равны единице, ввиду чего из (2.2.5) следует $L(\lambda) = 1$, т.е. $K(\lambda) = K_1(\lambda)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для минимального многочлена установлена следующая формула:

$$K(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{D_{n^p-1}(\lambda)}. \tag{2.2.8}$$

Далее аналогично (2.1.26) имеем

$$K(\lambda) = C(\lambda, \mu)(\lambda - \mu) + K(\mu),$$

а для приведенного присоединенного тензора $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)$ сходное (2.1.30) соотношение получит вид

$$\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \mathbb{C}\big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \mathbb{A}\big).$$

Следовательно, подобно (2.1.32) справедливо равенство

$$K(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big)\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)\big(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}\big).$$

Переходя в последнем соотношении к детерминантам, находим

$$[K(\lambda)]^{n^p} = P(\lambda) \det \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda). \tag{2.2.9}$$

Таким образом, с помощью (2.2.8) и (2.2.9) заключаем, что характеристический многочлен $P(\lambda)$ делится без остатка на минимальный многочлен $K(\lambda)$, а некоторая степень $K(\lambda)$ делится без остатка на $P(\lambda)$. Отсюда в свою очередь следует, что совокупность всех отличных друг от друга корней многочленов $P(\lambda)$ и $K(\lambda)$ одна и та же. Другими словами, корнями $K(\lambda)$ являются все отличные друг от друга характеристические числа тензора $\mathbb{A}$.

Если

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j;\ n_i > 0,\ i, j = \overline{1, r},$$

то

$$K(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad 0 < m_k \leq n_k,\ k = \overline{1, r},$$

Следует отметить еще одно важное свойство приведенного присоединенного тензора $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)$. Пусть λ_0 — какое-нибудь характеристическое число тензора $\mathbb{A}$. Поскольку $K(\lambda_0) = 0$, то подобно (2.1.36) из (2.2.4) получим соотношение

$$\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda_0) \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \lambda_0 \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda_0), \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda_0) = \lambda_0 \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda_0). \tag{2.2.10}$$

Заметим, что всегда $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda_0) \neq 0$. В самом деле, в противном случае все компоненты приведенного присоединенного тензора $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda)$ делились бы без остатка на $\lambda - \lambda_0$, что невозможно.

Из (2.2.10) аналогично (2.1.37) будем иметь

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{i\,\cdot}(\lambda_0) \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \lambda_0 \widetilde{\mathbf{C}}_{i\,\cdot}(\lambda_0), \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \widetilde{\mathbf{C}}_{\cdot\,j}(\lambda_0) = \lambda_0 \widetilde{\mathbf{C}}_{\cdot\,j}(\lambda_0), \quad i, j = \overline{1, n^p}. \tag{2.2.11}$$

В силу (2.2.11) и подобных для контравариантных составляющих соотношений можно сказать, что ненулевые левые и правые ковариантные (контравариантные) составляющие (такие всегда имеются) тензора $\widetilde{\mathbb{C}}(\lambda_0)$ являются соответственно левыми и правыми собственными тензорами, соответствующими собственному значению λ_0 тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Далее, не останавливаясь на изучении тензорных функций тензорных аргументов, отметим только, что если $F(z)$ аналитическая функция, то соответствующую аналитическую тензорную функцию тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно определить следующим образом:

$$\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \sum_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k) \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k,$$

где представление тензора $\mathbb{A}$ дано соотношением (1.5.12). В частности,

$$\sin \mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \sin \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k, \quad e^{\mathbb{A}} = \sum_{k=1}^{n^p} e^{\lambda_k} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k$$

и т.д.

2.2.1 Минимальный многочлен тензора модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно заданного тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Минимальный многочлен. Рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся минимального многочлена тензора и модуля. Пусть $\mathbb{W}$ — произвольный тензор из модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, а $\mathbb{A}$ — некоторый тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$. Составим ряд тензоров

$$\mathbb{W},\ \mathbb{A}\mathbb{W},\ \mathbb{A}^2\mathbb{W},\ \mathbb{A}^3\mathbb{W}, \ldots, \tag{2.2.12}$$

являющихся элементами модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ $(\mathbb{A}^k\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega),\ k \in \mathbb{N}_0)$. Так как $\mathbb{C}_p(\Omega)$ — конечный модуль, то найдется такое целое число m, $(0 \le m \le n^p)$, что тензоры $\mathbb{W}, \mathbb{A}\mathbb{W}, \ldots, \mathbb{A}^{m-1}\mathbb{W}$ будут линейно независимыми, а тензор $\mathbb{A}^m\mathbb{W}$ будет их линейной комбинацией, т.е.

$$\mathbb{A}^m\mathbb{W} = -b_1\mathbb{A}^{m-1}\mathbb{W} - b_2\mathbb{A}^{m-2}\mathbb{W} - \ldots - b_m\mathbb{W}. \tag{2.2.13}$$

Рассмотрим многочлен

$$M(\lambda) = \lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\lambda + b_m. \tag{2.2.14}$$

Тогда соотношение (2.2.13) можно представить в виде

$$\mathbb{M}(\mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = 0.$$

Определение 2.2.3. Скалярный многочлен $N(\lambda)$ называется аннулирующим многочленом тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если $\mathbb{N}(\mathbb{A})\mathbb{W} = 0$.

Определение 2.2.4. Аннулирующий многочлен $M(\lambda)$ тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным единице, называется минимальным многочленом тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Нетрудно доказать, что из всех аннулирующих многочленов тенора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ построенный выше многочлен (2.2.14) — минимальный многочлен тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Теорема 2.2.3. *Произвольный аннулирующий многочлен $N(\lambda)$ тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ делится без остатка (нацело) на минимальный многочлен $M(\lambda)$ тензора $\mathbb{W}$.*

Доказательство. В самом деле, пусть

$$N(\lambda) = M(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda), \tag{2.2.15}$$

где $Q(\lambda)$ и $R(\lambda)$ — частное и остаток от деления $N(\lambda)$ на $M(\lambda)$. При этом степень $R(\lambda)$ меньше степени $M(\lambda)$. Тогда легко видеть, что из (2.2.15) получим

$$\mathbb{N}(\mathbb{A})\mathbb{W} = \mathbb{Q}(\mathbb{A})\mathbb{M}(\mathbb{A})\mathbb{W} + \mathbb{R}(\mathbb{A})\mathbb{W}.$$

Отсюда в свою очередь находим $\mathbb{R}(\mathbb{A})\mathbb{W} = 0$. Итак, $R(\lambda)$, степень которого меньше степени $M(\lambda)$, является аннулирующим многочленом тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора, что невозможно. Значит, $R(\lambda) = 0$. Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы следует, что каждому тензору $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ соответствует только один минимальный многочлен.

Рассмотрим некоторый базис $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Обозначим через $M_1(l)$, $M_2(\lambda)$, $\dots$, $M_{n^p}(\lambda)$ минимальные многочлены базисных тензоров $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\dots$, $\mathbb{A}_{n^p}$ соответственно относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а через $N(\lambda)$ – наименьшее общее кратное этих многочленов со старшим коэффициентом, равным единице. Следовательно, $N(\lambda)$ будет аннулирующим многочленом для всех базисных тензоров

$$\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i_1 \dots i_p}, \quad i = \overline{1, n^p}, \;\; i = \text{№}(i_1,\, i_2, \dots, i_p), \;\; i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}.$$

Так как произвольный тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ представляется в виде $\mathbb{W} = W^i \mathbb{A}_i = W^{i_1,\dots,i_p}\mathbb{A}_{i_1,\dots,i_p}$, то

$$\mathbb{N}(\mathbb{A})\mathbb{W} = W^i \mathbb{N}(\mathbb{A})\mathbb{A}_i = W^{i_1,\dots,i_p}\mathbb{N}(\mathbb{A})\mathbb{A}_{i_1,\dots,i_p} = 0,$$

т.е.

$$\mathbb{N}(\mathbb{A})\mathbb{W} = 0.$$

Таким образом, $M(\lambda)$ является аннулирующим многочленом всего модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Нетрудно видеть, что, если $N_*(\lambda)$ — произвольный аннулирующий многочлен всего модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то он будет аннулирующим многочленом базисных тензоров $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$. Следовательно, $N_*(\lambda)$ должен быть общим кратным минимальных многочленов $M_1(\lambda)$, $M_2(\lambda)$, $\dots$, $M_{n^p}(\lambda)$ этих базисных тензоров, ввиду чего многочлен $N_*(\lambda)$ должен делиться на наименьшее общее кратное $N(\lambda)$ без остатка. Таким образом, из всех аннулирующих многочленов всего модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ построенный выше многочлен $N(\lambda)$ имеет наименьшую степень и старший коэффициент 1. Такой многочлен однозначно определяется заданием модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и называется минимальным многочленом модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Из доказанной выше теоремы (2.2.3) следует единственность минимального многочлена модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Несмотря на то, что построение минимального многочлена $N(\lambda)$ было связано с определенным базисом $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_{n^p}$, он не зависит от выбора базиса. Это, конечно, следует из единственности минимального многочлена модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Нетрудно доказать справедливость теоремы.

Теорема 2.2.4. *Минимальный многочлен модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно некоторого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ делится без остатка на минимальный многочлен любого тензора этого модуля относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.*

Теперь рассмотрим некоторые вопросы, связанные с расщеплением модуля на инвариантные подмодули. Введем определения:

Определение 2.2.5. Подмножество $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ называется подмодулем модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, если оно само является модулем над тем же кольцом, что и $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Определение 2.2.6. Будем говорить, что модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ расщепляется на два подмодуля $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$, и писать

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}'_p(\Omega) + \mathbb{C}''{}_p(\Omega),$$

если известно, что:

1) $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$ не имеют общих тензоров, кроме нуля,

2) любой тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ представляется в виде суммы

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}' + \mathbb{W}'', \tag{2.2.16}$$

где $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$, а $\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''{}_p(\Omega)$.

Из условия 1) следует единственность представления (2.2.16). В самом деле, пусть $\mathbb{W}$ имеет другое представление

$$\mathbb{W} = \widetilde{\mathbb{W}}' + \widetilde{\mathbb{W}}'' \quad \big(\widetilde{\mathbb{W}}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega),\ \ \widetilde{\mathbb{W}}'' \in \mathbb{C}''{}_p(\Omega)\big).$$

Тогда, вычитая почленно последнее равенство из (2.2.16), получим $\mathbb{W}' - \widetilde{\mathbb{W}}' = \widetilde{\mathbb{W}}'' - \mathbb{W}''$, т.е. равенство между отличными от нуля тензорами $\mathbb{W}' - \widetilde{\mathbb{W}}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\widetilde{\mathbb{W}}'' - \mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''_p(\Omega)$, что невозможно в силу 1). Итак, условие 1) можно заменить требованием единственности представления (2.2.16).

Следовательно, определение расщепления модуля распространяется на любое число слагаемых подмодулей.

Пусть $\mathbb{A}'_1, \mathbb{A}'_2, \ldots, \mathbb{A}'_k$ и $\mathbb{A}''{}_1, \mathbb{A}''{}_2, \ldots, \mathbb{A}''{}_l$ — базисы соответственно модулей $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''_p(\Omega)$. Тогда нетрудно доказать, что все эти $k + l$ тензоров линейно независимы и составляют базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, т.е. из базисов слагаемых подмодулей составляется базис всего модуля. Очевидно, $k + l = n^p$.

Определение 2.2.7. Подмодуль $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ называется инвариантным относительно данного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если из $\mathbb{W} \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ следует $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ $\big(\mathbb{A}\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}'_p(\Omega)\big)$.

Перефразируем некоторые теоремы из [6] применительно к рассматриваемому случаю.

Теорема 2.2.5. *(1-я теорема о расщеплении модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ на инвариантные подмодули.) Если минимальный многочлен $N(\lambda)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно данного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ представляется в виде произведения двух взаимно простых многочленов $N_1(\lambda)$ и $N_2(\lambda)$ со старшими коэффициентами, равными единице, $N(\lambda) = N_1(\lambda)N_2(\lambda)$, то модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ расщепляется на два инвариантных подмодуля $\mathbb{C}_p^1(\Omega)$ и $\mathbb{C}_p^2(\Omega)$ $(\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^1(\Omega) + \mathbb{C}_p^2(\Omega))$, минимальными многочленами которых являются соответственно множители $N_1(\lambda)$ и $N_2(\lambda)$.*

Из этой теоремы следует следующая

Теорема 2.2.6. *Если минимальный многочлен модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно данного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ представляется в виде произведения некоторых степеней неприводимых многочленов $N_1(\lambda)$, $N_2(\lambda), \ldots, N_s(\lambda)$, со старшими коэффициентами, равными единице,*

$$N(\lambda) = \left[N_1(\lambda)^{m_1}\right]\left[N_2(\lambda)^{m_2}\right] \ldots \left[N_s(\lambda)^{m_s}\right],$$

то модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ расщепляется на s инвариантных подмодулей $\mathbb{C}_p^1(\Omega)$, $\mathbb{C}_p^2(\Omega), \ldots, \mathbb{C}_p^s(\Omega)$ $(\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^1(\Omega) + \mathbb{C}_p^2(\Omega) + \ldots + \mathbb{C}_p^s(\Omega))$, минимальными многочленами которых служат соответственно многочлены $N_1(\lambda)$, $N_2(\lambda), \ldots, N_s(\lambda)$.

Лемма 2.2.1. *Если минимальные многочлены тензоров $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ и $\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ взаимно просты, то минимальный многочлен суммы тензоров $\mathbb{W}' + \mathbb{W}''$ равен произведению минимальных многочленов слагаемых тензоров.*

Эта лемма применяется при доказательстве следующей теоремы:

Теорема 2.2.7. *В модуле $\mathbb{C}_p(\Omega)$ всегда существует тензор, минимальный многочлен которого совпадает с минимальным многочленом всего модуля.*

Пусть теперь $L(\lambda) = \lambda^m + C_1\lambda^{m-1} + \ldots + C_{m-1}\lambda + C_m$ — минимальный многочлен тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда нетрудно доказать, что тензоры

$$\mathbb{W},\ \mathbb{A}\mathbb{W},\ \mathbb{A}^2\mathbb{W}, \ldots, \mathbb{A}^{m-1}\mathbb{W} \tag{2.2.17}$$

линейно независимы и

$$\mathbb{A}^m\mathbb{W} = -C_1\mathbb{A}^{m-1}\mathbb{W} - C_2\mathbb{A}^{m-2}\mathbb{W} - \ldots - C_m\mathbb{W}. \tag{2.2.18}$$

Следовательно, тензоры (2.2.17) составляют базис некоторого m-мерного подмодуля $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$. В связи с специальным видом базиса (2.2.17) и равенством (2.2.18) этот подмодуль называется циклическим относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тензор $\mathbb{W}$ называется порождающим тензором подмодуля $\mathbb{C}'_p(\Omega)$. Можно также говорить, что тензор $\mathbb{W}$ порождает подмодуль $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Заметим, что тензор $\mathbb{A}$ переводит первый из тензоров (2.2.17) во второй, второй – в третий, и т.д. Согласно (2.2.18) последний базисный тензор (2.2.17) переводится тензором $\mathbb{A}$ в линейную комбинацию базисных тензоров. Итак, тензор $\mathbb{A}$ переводит любой базисный тензор в тензор из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$. Очевидно, он и произвольный тензор из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ переводит в тензор из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$. Таким образом, циклический подмодуль относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, порожденный тензором $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, всегда инвариантен относительно $\mathbb{A}$.

Любой тензор $\mathbb{X} \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ можно представить в виде линейной комбинации базисных тензоров (2.2.17)

$$\mathbb{X} = \mathbb{K}(\mathbb{A})\mathbb{W},$$

где $K(\lambda)$ — многочлен от λ степени не больше $m-1$. Перебирая возможные многочлены $K(\lambda)$ степени не больше $m-1$, получим все тензоры из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$. При этом каждый тензор $\mathbb{X} \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ получим только один раз, т.е. только при одном многочлене $K(\lambda)$.

Теорема 2.2.8. *Минимальный многочлен порождающего тензора* $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ *в то же время будет и минимальным многочленом всего циклического подмодуля* $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ *относительно* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Теорема 2.2.9. *(2- теорема о расщеплении модуля на инвариантные подмодули.) Модуль* $\mathbb{C}_p(\Omega)$ *всегда можно расщепить на циклические относительно данного тензора* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *подмодули* $\mathbb{C}^1_p(\Omega), \mathbb{C}^2_p(\Omega), \ldots, \mathbb{C}^r_p(\Omega)$, *с минимальными многочленами* $N_1(\lambda)$, $N_2(\lambda)$, $\ldots$, $N_r(\lambda)$,

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}^1_p(\Omega) + \mathbb{C}^2_p(\Omega) + \ldots + \mathbb{C}^r_p(\Omega),$$

так, чтобы $N_1(\lambda)$ *совпадал с минимальным многочленом* $N(\lambda)$ *всего модуля* $\mathbb{C}_p(\Omega)$ *и каждый* $N_i(\lambda)$ *был делителем* $N_{i-1}(\lambda)$, $i = 2, 3, \ldots, r$.

Теорема 2.2.10. *(о критерии цикличности модуля.) Модуль цикличен тогда и только тогда, когда его число измерений совпадает со степенью его минимального многочлена.*

Теорема 2.2.11. *Модуль тогда и только тогда является циклическим, когда он расщепляется на такие инвариантные подмодули, которые сами являются циклическими и имеют взаимно простые минимальные многочлены.*

Теорема 2.2.12. *Модуль не расщепляется на инвариантные подмодули тогда и только тогда, когда он циклический и его минимальный многочлен — некоторая степень неприводимого многочлена.*

Теорема 2.2.13. *(3-я теорема о расщеплении модуля на инвариантные подмодули.) Модуль всегда можно расщепить на циклические инвариантные подмодули*

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}^1_p(\Omega) + \mathbb{C}^2_p(\Omega) + \ldots + \mathbb{C}^t_p(\Omega),$$

так, чтобы минимальный многочлен каждого из этих циклических подмодулей был степенью неприводимого многочлена.

Эта теорема дает расщепление модуля на нерасщепимые далее инвариантные подмодули.

2.3 Некоторые теоремы о сопряженном, нормальном, эрмитовом и унитарном тензорах модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Введем определение, отличное от вышеприведенного определения сопряженного тензора алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Определение 2.3.1. Тензор $\mathbb{A}^*$ называется сопряженным по отношению к тензору $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$, если для любых двух тензоров $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ из $\mathbb{C}_p(\Omega)$ выполняется равенство

$$\big(\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}'\big)_x = \big(\mathbb{W}, \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'\big)_x. \tag{2.3.1}$$

Нетрудно заметить, что для любых тензоров $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ и $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеют место соотношения

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^T, \quad \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \mathbb{A}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}. \tag{2.3.2}$$

Тогда[2] с помощью первого равенства (2.3.2) получим

$$\big(\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}'\big)_x = \big(\mathbb{W}\mathbb{A}^T, \mathbb{W}'\big) = \mathbb{W}\mathbb{A}^T\overline{\mathbb{W}}' = \mathbb{W}\overline{\overline{\mathbb{A}}^T\mathbb{W}'} = \big(\mathbb{W}, \overline{\mathbb{A}}^T\mathbb{W}'\big)_x.$$

Таким образом,

$$\big(\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}'\big)_x = \big(\mathbb{W}, \overline{\mathbb{A}}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'\big)_x. \tag{2.3.3}$$

Вычитая из (2.3.1) почленно (2.3.3), находим

$$\big(\mathbb{W}, (\mathbb{A}^* - \overline{\mathbb{A}}^T) \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'\big) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ имеем $\mathbb{A}^* = \overline{\mathbb{A}}^T$. Это совпадает с вышеприведенным определением. Принимая за определение $\mathbb{A}^* = \overline{\mathbb{A}}^T$, нетрудно доказать (2.3.1). Действительно, подставляя вместо $\overline{\mathbb{A}}^T$ в правую часть (2.3.3) $\mathbb{A}^*$, получим (2.3.1).

Следовательно, для каждого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ существует сопряженный тензор $\mathbb{A}^*$ и притом только один.

Используя вторую формулу (2.3.2) и (2.3.1), не представляет труда доказать справедливость соотношения

$$\big(\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}, \mathbb{W}'\big)_x = \big(\mathbb{W}, \mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^*\big)_x.$$

Действительно,

$$\big(\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}, \mathbb{W}'\big)_x = \big(\mathbb{A}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}'\big)_x = \big(\mathbb{W}, \mathbb{A}^{*T} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'\big)_x = \big(\mathbb{W}, \mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^*\big)_x.$$

Теорема 2.3.1. *Любой тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда можно представить в виде*

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + i\mathbb{A}_2, \tag{2.3.4}$$

где $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ — эрмитовы тензоры (эрмитовы компоненты тензора $\mathbb{A}$). Эрмитовы компоненты однозначно определяются заданием тензора $\mathbb{A}$. Тензор $\mathbb{A}$ нормален тогда и только[3] *тогда, когда его эрмитовы компоненты $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ коммутируют между собой.*

---

[2] В дальнейшем часто знак внутреннего p-произведения $\overset{p}{\otimes}$ и знак локальности x будем опускать.

[3] *Рассмотренные в данной работе теоремы аналогичны теоремам о линейном операторе [6]. Вообще говоря, при отождествлении тензора четного ранга $2p$ $(p > 1)$ с эндоморфизмом тензорного пространства (модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$) многие вопросы о линейном операторе автоматически переносятся на случай пространств эндоморфизмов, порожденных тензорами четного ранга. Общие вопросы о пространствах эндоморфизмов можно смотреть в [2, 3].*

Доказательство. Пусть имеет место представление (2.3.4). Тогда, переходя в обеих частях (2.3.4) к сопряженным, получим

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{A}_1 - i\mathbb{A}_2, \tag{2.3.5}$$

Рассматривая (2.3.4) и (2.3.5) как систему уравнений относительно $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ и разрешая эту систему, найдем тензоры

$$\mathbb{A}_1 = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^*), \quad \mathbb{A}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^*), \tag{2.3.6}$$

которые, очевидно, являются эрмитовыми. Обратно, определяя эрмитовы тензоры с помощью (2.3.6), нетрудно заметить, что они связаны с $\mathbb{A}$ равенством (2.3.4).

Пусть $\mathbb{A}$ – нормальный тензор, т.е. $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$. Тогда из (2.3.6) вытекает $\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2\mathbb{A}_1$. Обратно, из $\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2\mathbb{A}_1$ с помощью (2.3.4) и (2.3.5) следует $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$. Теорема доказана. □

Определение 2.3.2. Будем говорить, что тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ ортогонален подмножеству $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ и писать $\mathbb{W} \perp \mathbb{C}'_p(\Omega)$, если он ортогонален любому тензору из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$.

Определение 2.3.3. Будем говорить, что два подмножества $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ взаимно ортогональны и писать $\mathbb{C}'_p(\Omega) \perp \mathbb{C}''{}_p(\Omega)$, если любой тензор из одного подмножества ортогонален любому тензору из другого подмножества.

Заметим, что ортогональность тензоров и множеств тензоров можно рассматривать как в произвольной точке $x \in \Omega$, так и в области Ω. Нетрудно видеть, что взаимно ортогональные подмножества $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ являются подмодулями и каждый тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ однозначно представляется в виде суммы $\mathbb{W} = \mathbb{W}' + \mathbb{W}''$, где $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''{}_p(\Omega)$, т.е. имеет место расщепление

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}'_p(\Omega) + \mathbb{C}''{}_p(\Omega), \quad \mathbb{C}'_p(\Omega) \perp \mathbb{C}''{}_p(\Omega).$$

Следовательно, сумма размерностей подмодулей $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$ равняется размерности модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Заметим, что в рассматриваемом случае $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ называется ортогональным дополнением к $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$. Очевидно, $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$ будет ортогональным дополнением к $\mathbb{C}'_p(\Omega)$.

Теорема 2.3.2. *Если некоторый подмодуль $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то ортогональное дополнение $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$ этого подмодуля инвариантно относительно $\mathbb{A}^*$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''{}_p(\Omega)$. Тогда из $\mathbb{A}\mathbb{W}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ следует $(\mathbb{A}\mathbb{W}', \mathbb{W}'') = 0$. Отсюда с помощью (2.3.1) получим $(\mathbb{W}', \mathbb{A}^*\mathbb{W}'') = 0$. Так как $\mathbb{W}'$ — произвольный тензор модуля $\mathbb{C}'_p(\Omega)$, то $\mathbb{A}^*\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''{}_p(\Omega)$, что и требовалось доказать. □

Определение 2.3.4. Тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется тензором простой структуры, если он имеет n^p линейно независимых собственных тензоров, где n^p — число измерений модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Нетрудно заметить, что имеет место утверждение.

Утверждение 2.3.1. Тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет простую структуру, если все корни характеристического уравнения различны между собой.

Заметим, что обратное утверждение неверно, т.е. существуют тензоры модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ простой структуры, характеристические уравнения которых имеют кратные корни.

Теорема 2.3.3. *Если* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *— тензор простой структуры, то сопряженный тензор* $\mathbb{A}^*$ *также имеет простую структуру, при этом можно так выбрать полные системы собственных тензоров* $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ *и* $\mathbb{W}'_1, \mathbb{W}'_2, \ldots, \mathbb{W}'_{n^p}$ *тензоров* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{A}^*$*, чтобы они были биортонормальны, т.е.* $(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}'_i) = \delta_{ki}$*,* $i, k = \overline{1, n^p}$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ — полная система нормированных собственных тензоров $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Эти тензоры выберем в качестве базиса модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Обозначим через $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ $(k = \overline{1, n^p})$ подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, образующими тензорами которого являются тензоры $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}\}\backslash\{\mathbb{W}_k\}$ $(k = \overline{1, n^p})$. Следовательно, $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ при каждом значении k является $(n^p - 1)$-мерным инвариантным подмодулем модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно $\mathbb{A}$. Тогда, рассматривая одномерный подмодуль $\mathbb{C}_p^{(k)\prime}(\Omega)$ $(k = \overline{1, n^p})$, порожденный нормированным тензором $\mathbb{W}'_k \perp \mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ $(k = \overline{1, n^p})$, нетрудно заметить, что он будет одномерным ортогональным дополнением подмодуля $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ $(k = \overline{1, n^p})$. Тогда в силу теоремы (2.3.2) $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A}^*$, т.е.

$$\mathbb{A}^*\mathbb{W}'_k = \mu_k \mathbb{W}'_k, \quad \mathbb{W}' \neq 0, \;\; k = \overline{1, n^p}.$$

Из $\mathbb{W}'_k \perp \mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ следует $(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}'_k) = 1 \neq 0$, ибо в противном случае тензор $\mathbb{W}'_k$ должен был бы равняться нулю. Таким образом,

$$(\mathbb{W}_i, \mathbb{W}'_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n^p},$$

что и требовалось доказать. □

Следует заметить, что из биортонормированности тензоров $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ и $\mathbb{W}'_1, \ldots, \mathbb{W}'_{n^p}$ вытекает линейная независимость каждой (в отдельности) из этих систем тензоров.

Теорема 2.3.4. *Общий собственный тензор* $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ *тензоров* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *и* $\mathbb{A}^* \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *соответствует комплексно сопряженным собственным значениям этих тензоров.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ — общий собственный тензор тензоров $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{A}^* \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, т.е. $\mathbb{A}\mathbb{W} = \lambda\mathbb{W}$ и $\mathbb{A}^*\mathbb{W} = \mu\mathbb{W}$, $\mathbb{W} \neq 0$. Тогда, учитывая эти равенства, из (2.3.1) при $\mathbb{W}' = \mathbb{W}$ получим $\lambda(\mathbb{W}\mathbb{W}) = \overline{\mu}(\mathbb{W}, \mathbb{W})$. Отсюда следует $\lambda = \overline{\mu}$. Теорема доказана. □

Теорема 2.3.5. *Для всякого тензора* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ *существует* $(n^p - 1)$*-мерный инвариантный подмодуль* $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ — собственный тензор $\mathbb{A}^* \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{C}_p^{(1)\prime}(\Omega)$ — одномерный подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный тензором $\mathbb{W}'$. Обозначим через $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$ ортогональное дополнение к одномерному модулю $\mathbb{C}_p^{(1)\prime}(\Omega)$. Так как $\mathbb{C}_p^{(1)\prime}(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A}^*$ и $\mathbb{A} = (\mathbb{A}^*)^*$, то в силу теоремы (2.3.2) подмодуль $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, что и требовалось доказать. □

На основании этой теоремы совершенно аналогично можно доказать существование подмодуля $\mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$, инвариантного относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Продолжая это рассуждение, построим цепочку из n^p последовательно вложенных инвариантных подмодулей тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$:

$$\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega) \subset \ldots \subset \mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p^{(n^p)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega).$$

Здесь индекс в скобках наверху указывает размерность подмодуля.

Теорема 2.3.6. *(теорема Шура) Для любого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно построить базис, в котором тензор имеет треугольную форму (матрица компонент тензора треугольна).*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W}_1$ — нормированный тензор из $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$. Выберем в $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$ нормированный тензор $\mathbb{W}_2$ такой, что $(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2) = 0$. В $\mathbb{C}_p^{(3)}(\Omega)$ рассмотрим нормированный тензор $\mathbb{W}_3$ такой, что $(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_3) = 0$ и $(\mathbb{W}_2, \mathbb{W}_3) = 0$. Продолжая этот процесс, построим ортонормированный базис $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$, обладающий тем свойством, что подмодуль $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ $(k = \overline{1, n^p})$, натянутый на первые k базисных тензоров $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_k$, инвариантен относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Обозначая через $||A_{ij}||_1^{n^p}$ матрицу тензора $\mathbb{A}$, имеем $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j = \sum\limits_{i=1}^{n^p} A_{ij}\mathbb{W}_i$, где $A_{ij} = (\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j, \mathbb{W}_i)$. Так как $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j$ принадлежит $\mathbb{C}_p^{(j)}(\Omega)$, то при $i > j$ $\;A_{ij} = (\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j, \mathbb{W}_i) = 0$. Итак, матрица компонент тензора является верхней треугольной, а тензор $\mathbb{A}$ имеет представление

$$\mathbb{A} = \sum_{i,j=1}^{n^p} A_{ij}\mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \quad A_{ij} = 0 \text{ при } \quad i > j,$$

что и требовалось доказать. □

Заметим, что теорему Шура легко доказать с помощью общей теоремы о приведении тензора к жордановой форме и последовательной ортогонализации жорданова базиса. Однако приведенное доказательство по существу использует только существование собственного тензора тензора $\mathbb{A}$.

Теперь докажем лемму, устанавливающую одно свойство коммутирующих тензоров из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Лемма 2.3.1. *Коммутирующие (перестановочные) тензоры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ $(\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} = \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A})$ из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда имеют общий собственный тензор.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ — собственный тензор тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda\mathbb{W}$, $\mathbb{W} \neq 0$, и в силу коммутативности тензоров $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеем

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B}^k \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda\mathbb{B}^k \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3.7}$$

Пусть в системе тензоров $\mathbb{W}, \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{B}^2 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \ldots$ первые m $(0 \leq m \leq n^p)$ тензоров линейно независимы, в то время как $(m+1)$-й тензор $\mathbb{B}^m \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$ уже является линейной комбинацией предыдущих тензоров. Нетрудно заметить, что подмодуль $\mathbb{C}_p^{(m)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный системой тензоров $\mathbb{W}, \mathbb{B}\mathbb{W}, \ldots, \mathbb{B}^{m-1}\mathbb{W}$, будет инвариантен относительно $\mathbb{B}$. Откуда следует, что в подмодуле $\mathbb{C}_p^{(m)}(\Omega)$ будет существовать собственный тензор $\mathbb{X}$ тензора $\mathbb{B}$, т.е. $\mathbb{B}\mathbb{X} = \mu\mathbb{X}$, $\mathbb{X} \neq 0$. С другой стороны, на основании соотношений (2.3.7) заключаем, что тензоры $\mathbb{W}$, $\mathbb{B}\mathbb{W}, \ldots, \mathbb{B}^{m-1}\mathbb{W}$ являются собственными тензорами тензора $\mathbb{A}$, соответствующими одному и тому же собственному значению λ. Следовательно, любая линейная комбинация этих тензоров, в частности, и тензор $\mathbb{X}$, будет собственным тензором тензора $\mathbb{A}$, отвечающим собственному значению λ. Итак, доказано существование общего собственного тензора перестановочных тензоров $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. $\square$

С помощью этой леммы можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.3.7. *Нормальный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}$ — произвольный[4] нормальный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В рассматриваемом случае тензоры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}^*$ коммутируют между собой и поэтому в силу доказанной выше леммы (2.3.1) имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_1 \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. Тогда на основании теоремы (2.3.4) имеем

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_1 = \lambda_1 \mathbb{W}_1, \quad \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_1 = \overline{\lambda}_1 \mathbb{W}_1, \quad \mathbb{W}_1 \neq 0.$$

Обозначим через $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$ одномерный подмодуль, порожденный тензором $\mathbb{W}_1$, а через $\mathbb{C}_p^{(1)\prime}(\Omega)$ – ортогональное дополнение для $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$, т.е.

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega) + \mathbb{C}_p^{(1)\prime}(\Omega), \quad \mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega) \perp \mathbb{C}_p^{(1)\prime}(\Omega).$$

Так как $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}^*$, то в силу теоремы (2.3.2) подмодуль $\mathbb{C}_p^{(1)\prime}(\Omega)$ также инвариантен относительно этих тензоров. Следовательно, в инвариантном подмодуле $\mathbb{C}_p^{(1)\prime}(\Omega)$ перестановочные тензоры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}^*$ имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_2$:

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2 = \lambda_2 \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2 = \overline{\lambda}_2 \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{W}_2 \neq 0.$$

Очевидно, $\mathbb{W}_1 \perp \mathbb{W}_2$. Обозначая через $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$ двумерный подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный тензорами $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$, а через $\mathbb{C}_p^{(2)\prime}(\Omega)$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$ ($\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega) + \mathbb{C}_p^{(2)\prime}(\Omega)$), $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega) \perp \mathbb{C}_p^{(2)\prime}(\Omega)$, аналогично можно установить существование в $\mathbb{C}_p^{(2)\prime}(\Omega)$ общего собственного тензора $\mathbb{W}_3$ тензоров $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}^*$. Очевидно, $\mathbb{W}_3 \perp \mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_3 \perp \mathbb{W}_2$. Продолжая этот процесс, получим n^p попарно ортогональных общих собственных тензоров $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ тензоров $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}^*$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = \overline{\lambda}_k \mathbb{W}_k, \quad \mathbb{W}_k \neq 0, \\ &(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_i) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k, \;\; i,k = \overline{1, n^p}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Заметим, что тензоры $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$, $\ldots$, $\mathbb{W}_{n^p}$ всегда можно считать нормированными, т.е. $(\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n^p}$. При этом, конечно, соотношения (2.3.8) сохраняют силу. Теорема доказана. $\square$

[4]Под полной ортонормированной системой тензоров тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ понимается ортонормированная система из n^p тензоров, где n^p — число измерений модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Более подробно об этом понятии говорится в третьей главе.

Из доказанной теоремы, в частности, из соотношений (2.3.8) вытекает

Теорема 2.3.8. *Если тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ нормален, то каждый собственный тензор тензора $\mathbb{A}$ является собственным тензором сопряженного тензора $\mathbb{A}^*$, т.е. если тензор $\mathbb{A}$ нормален, то тензоры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}^*$ имеют одни и те же собственные тензоры.*

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 2.3.9. *Если тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров, то он — нормальный тензор.*

Доказательство. Пусть тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$, т.е.

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_i = \lambda_i \mathbb{W}_i, \quad (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = \delta_{ij}, \;\; i, j = \overline{1, n^p}. \tag{2.3.9}$$

Надо доказать, что $\mathbb{A}$ — нормальный тензор. Действительно, положим $\mathbb{X}_k = \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k - \overline{\lambda}_k \mathbb{W}_k$. Тогда в силу свойств скалярного умножения имеем

$$(\mathbb{W}_i, \mathbb{X}_k) = (\mathbb{W}_i, \mathbb{A}^* \mathbb{W}_k) - \lambda_k (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_k) = (\mathbb{A}\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_k) - \lambda_k (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_k) = (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{ik} = 0, \;\; i, k = \overline{1, n^p}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{X}_k = \mathbb{A}^* \mathbb{W}_k - \overline{\lambda}_k \mathbb{W}_k = 0, \;\; k = \overline{1, n^p}.$$

т.е. имеют место соотношения

$$\mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = \overline{\lambda}_k \mathbb{W}_k, \quad (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_k) = \delta_{ik}, \;\; i, k = \overline{1, n^p}. \tag{2.3.10}$$

На основании (2.3.9) и (2.3.10) легко находим

$$(\mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_i = \lambda_i \overline{\lambda}_i \mathbb{W}_i, \quad (\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^*) \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_i = \lambda_i \overline{\lambda}_i \mathbb{W}_i, \;\; k = \overline{1, n^p},$$

откуда в свою очередь получаем $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}$, что требовалось доказать. □

Таким образом, наряду с «внешней» ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$) получена следующая «внутренняя» (спектральная) характеристика нормального тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$:

Теорема 2.3.10. *Тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тогда и только тогда является нормальным, когда этот тензор имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров.*

Нетрудно заметить, что эту теорему можно перефразировать в следующем виде:

Теорема 2.3.11. *Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тогда и только тогда является нормальным тензором, когда он имеет простую структуру.*

Следует заметить, что если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — тензор простой структуры, то его можно представить в собственном (каноническом) базисе в виде

$$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i. \tag{2.3.11}$$

Видно, что имеют место соотношения

$$\mathbb{A}^* = \sum_{j=1}^{n^p} \overline{\lambda}_j \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \overline{\lambda}_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k, \tag{2.3.12}$$

а тензор $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$ имеет неотрицательные собственные значения.

Теорема 2.3.12. *Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — нормальный тензор, то тензор $\mathbb{A}$ ($\mathbb{A}^*$) представим в виде тензорного многочлена от тензора $\mathbb{A}^*$ ($\mathbb{A}$). При этом два многочлена определяются заданием характеристических чисел тензора $\mathbb{A}$.*

Доказательство. По интерполяционной формуле Лагранжа определим два многочлена $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ из условий

$$F(\lambda_k) = \overline{\lambda}_k, \quad G(\overline{\lambda}_k) = \lambda_k, \ \ k = \overline{1, n^p},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n^p}$ — собственные значения $\mathbb{A}$. Тогда на основании этих формул, (2.3.11) и первого равенства (2.3.12) находим

$$\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \sum_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k)\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \sum_{k=1}^{n^p} \overline{\lambda}_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \mathbb{A}^*,$$
$$\mathbb{G}(\mathbb{A}^*) = \sum_{k=1}^{n^p} G(\overline{\lambda}_k)\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \mathbb{A}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{F}(\mathbb{A}), \quad \mathbb{A} = \mathbb{G}(\mathbb{A}^*),$$

что и требовалось доказать. □

Докажем и следующую теорему.

Теорема 2.3.13. *Если $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ — инвариантный подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно нормального тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{C}'_p(\Omega)$, то и $\mathbb{C}''{}_p(\Omega)$ является инвариантным подмодулем тензора $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ — инвариантный подмодуль относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{C}'_p(\Omega) + \mathbb{C}''{}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p(\Omega)$, $\mathbb{C}'_p(\Omega) \perp \mathbb{C}''{}_p(\Omega)$. Тогда согласно теореме 2.3.2 подмодуль инвариантен относительно $\mathbb{A}^*$. Однако в силу теоремы 2.3.12 $\mathbb{A} = \mathbb{G}(\mathbb{A}^*)$, где $G(\lambda)$ — многочлен. Поэтому $\mathbb{C}''{}_P(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A}$. Теорема доказана. □

Теперь рассмотрим эрмитов тензор. Так как эрмитов тензор является частным видом нормального тензора, то для него справедливы все теоремы и соотношения, относящиеся к нормальному тензору.

Докажем теорему, выражающую наряду с «внешней» ($\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$) «внутреннюю» характеристику эрмитова тензора.

Теорема 2.3.14. *Тензор $\mathbb{H}$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является эрмитовым (самосопряженным) тогда и только тогда, когда он имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров с вещественными собственными значениями.*

Доказательство. Пусть тензор $\mathbb{H} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — эрмитов тензор. Надо доказать, что он имеет вещественные характеристические числа. Действительно, так как эрмитов тензор является частным видом нормального тензора, то в силу теоремы 2.3.10 он имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров и его можно представить в форме

$$\mathbb{H} = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i, \quad (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = \mathbb{W}_i \overset{p}{\otimes} \overline{\mathbb{W}}_j = \delta_{ij}, \ \ i, j = \overline{1, n^p}. \tag{2.3.13}$$

Тогда, очевидно, имеем

$$\mathbb{H}^* = \sum_{i=1}^{n^p} \overline{\lambda}_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i, \quad \big((\mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_j)^* = \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_i\big)$$

и из равенства $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$ следует $\lambda_i = \overline{\lambda}_i$, $i = \overline{1, n^p}$. Обратно, пусть тензор $\mathbb{H} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет полную ортонормированную (ортонормальную) систему собственных тензоров с вещественными собственными значениями. Надо доказать, что он — эрмитов тензор. В самом деле, такой тензор в силу теоремы 2.3.10 — нормальный тензор и для него имеет место представление (2.3.13), откуда, учитывая $\lambda_i = \overline{\lambda}_i$, получаем

$$\mathbb{H}^* = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i. \tag{2.3.14}$$

На основании (2.3.13) и (2.3.14) заключаем, что $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$. Теорема доказана. □

Аналогичная теорема для унитарного тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, выражающая наряду с «внешней» $(\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}})$ его «внутреннюю» характеристику, формулируется следующим образом:

Теорема 2.3.15. *Тензор $\mathbb{U} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тогда и только тогда является унитарным, когда он имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров с собственными значениями, модули которых равны единице.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{U}$ — унитарный тензор. Надо доказать, что он имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров с характеристическими числами, модули которых равны единице. В самом деле, так как унитарный тензор — частный вид нормального тензора, то он на основании теоремы 2.3.10 имеет полную ортонормальную систему тензоров и представление

$$\mathbb{U} = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i, \quad (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = \delta_{ij}, \ \ i, j = \overline{1, n^p}. \tag{2.3.15}$$

Отсюда получаем

$$\mathbb{U}^* = \sum_{j=1}^{n^p} \overline{\lambda}_j \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_j. \tag{2.3.16}$$

С помощью (2.3.15), (2.3.16) и унитарности тензора $\mathbb{U}$ находим

$$\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}^* = \mathbb{U}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \overline{\lambda}_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \sum_{j,k=1}^{n^p} \delta_{jk} \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_k,$$

откуда следует

$$\lambda_i \overline{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 = 1, \quad i = \overline{1, n^p}. \tag{2.3.17}$$

Обратно, пусть тензор $\mathbb{U} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет полную ортонормальную систему собственных тензоров с характеристическими числами, по модулю равными единице. Тогда имеют место соотношения (2.3.15)–(2.3.17), из которых следует $\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}^* = \mathbb{U}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$. Теорема доказана. □

2.3.1 Неотрицательные и положительно определенные эрмитовы тензоры. Полярное разложение тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Введем следующее определение.

Определение 2.3.5. Эрмитов тензор $\mathbb{H} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется неотрицательным, если для любого тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$

$$(\mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) \geq 0,$$

и положительно определенным, если для любого тензора $\mathbb{W} \neq 0$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$

$$(\mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) > 0,$$

Теорема 2.3.16. *Эрмитов тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тогда и только тогда является неотрицательным (положительно определенным), когда все его собственные числа неотрицательны (положительны).*

Доказательство. Пусть $\mathbb{H} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — эрмитов тензор. Выбирая в качестве базиса модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ полную ортонормальную систему собственных тензоров $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ тензора $\mathbb{H}$, для любого тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ и тензора $\mathbb{H}$ будем иметь представления:

$$\mathbb{W} = \sum_{i=1}^{n^p} W_i \mathbb{W}_i, \quad \mathbb{H} = \sum_{j=1}^{n^p} \lambda_j \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_j. \tag{2.3.18}$$

Учитывая, что $(\mathbb{W}, \mathbb{W}_i) = W_i$, с помощью соотношений (2.3.18) получим

$$(\mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k |W_k|^2,$$

откуда следует справедливость теоремы. □

Эта теорема выражает «внутреннюю» характеристику неотрицательного и положительно определенного эрмитова тензора.

Нетрудно доказать, что примерами неотрицательных эрмитовых тензоров являются тензоры $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$ и $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$, где $\mathbb{A}$ — произвольный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Действительно, для произвольного тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ имеем

$$(\mathbb{A}\mathbb{A}^*\mathbb{W}, \mathbb{W}) = (\mathbb{A}^*\mathbb{W}, \mathbb{A}^*\mathbb{W}) \geq 0, \quad (\mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbb{W}, \mathbb{W}) = (\mathbb{A}\mathbb{W}, \mathbb{A}\mathbb{W}) \geq 0.$$

Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — невырожденный тензор, то $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$ и $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ — положительно определенные эрмитовы тензоры.

Тензоры $\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{A}^*}$ и $\sqrt{\mathbb{A}^*\mathbb{A}}$ называются левым и правым модулями тензора $\mathbb{A}$. У нормального тензора левый и правый модули равны.

Теорема 2.3.17. *(Теорема о полярном разложении тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$) Произвольный тензор $\mathbb{A}$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда представим в виде*

$$\mathbb{A} = \mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}, \quad \mathbb{A} = \mathbb{U}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{H}_1, \tag{2.3.19}$$

где $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}_1$ — неотрицательные эрмитовы, а $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_1$ — унитарные тензоры модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тензор $\mathbb{A}$ нормален тогда и только тогда, когда $\mathbb{H}$ и $\mathbb{U}$ ($\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{U}_1$) коммутируют.

Доказательство. Из представлений (2.3.19) следует, что $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_1$ являются соответственно левым и правым модулями тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Действительно,

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^* = \mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{H} = \mathbb{H}^2, \quad \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{H}_1\mathbb{U}_1^*\mathbb{U}_1\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_1^2.$$

Следует заметить, что достаточно доказать справедливость первого соотношения (2.3.19), ибо, применяя это разложение к тензору $\mathbb{A}^*$, будем иметь $\mathbb{A}^* = \mathbb{H}\mathbb{U}$, а отсюда находим $\mathbb{A} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{H}$, т.е. вторую формулу (2.3.19).

Сначала докажем первое равенство (2.3.19) для частного случая, когда $\mathbb{A}$ — невырожденный тензор ($\det \mathbb{A} \neq 0$). Считая, что $\mathbb{H} = \sqrt{\mathbb{A}\mathbb{A}^*}$ ($\det \mathbb{H} \neq 0$) — положительно определенный тензор, как квадратный корень из положительно определенного тензора и $\mathbb{U} = \mathbb{H}^{-1}\mathbb{A}$, докажем унитарность тензора $\mathbb{U}$. Имеем

$$\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}^* = \mathbb{H}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{A}^*\mathbb{H} = \mathbb{H}^{-1}\mathbb{H}^2\mathbb{H}^{-1} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}.$$

Таким образом в рассматриваемом случае справедливость первого равенства (2.3.19) доказана.

Заметим, что в данном случае не только $\mathbb{H}$, но и $\mathbb{U}$ однозначно определяются заданием невырожденного тензора $\mathbb{A}$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $\mathbb{A}$ может быть и вырожденным тензором. Прежде всего докажем, что полная ортонормальная система собственных тензоров тензора $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ всегда преобразуется тензором $\mathbb{A}$ снова в ортогональную же систему тензоров. Действительно, пусть

$$\mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbb{W}_k = \mu_k^2\mathbb{W}_k, \quad \mathbb{W}_k \in \mathbb{C}_p(\Omega), \quad (\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_i) = \delta_{ki}, \;\; \mu_k \geq 0, \;\; k, i = \overline{1, n^p}.$$

Тогда получаем равенства

$$(\mathbb{A}\mathbb{W}_k, \mathbb{A}\mathbb{W}_i) = (\mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_i) = \mu_k^2(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_I) = \mu_k^2\delta_{ki}, \quad k, i = \overline{1, n^p},$$

которые доказывают высказанное предложение.

Далее определяя ортонормированную систему тензоров $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_{n^p}$ соотношениями

$$\mathbb{A}\mathbb{W}_k = \rho_k\mathbb{X}_k, \quad k, i = \overline{1, n^p} \;\; (\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \rho_k\mathbb{X}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k)$$

и тензоры $\mathbb{H}$ и $\mathbb{U}$ равенствами

$$\mathbb{H} = \sum_{k=1}^{n^p} \rho_k\mathbb{X}_k \otimes \overline{\mathbb{X}}_k \quad \mathbb{U} = \sum_{k=1}^{n^p} \mathbb{X}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k, \tag{2.3.20}$$

нетрудно видеть, что

$$\mathbb{A} = \mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U},$$

где в силу (2.3.20) $\mathbb{H}$ — неотрицательный эрмитов тензор, ибо он имеет полную ортонормальную систему собственных тензоров $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_{n^p}$ и неотрицательные собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_{n^p}$, а $\mathbb{U}$ — унитарный тензор, что можно проверить непосредственно.

Таким образом, для произвольного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеют место представления (2.3.19), при этом эрмитовы тензоры $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_1$ всегда однозначно определяются заданием тензора $\mathbb{A}$ (они соответственно левый и правый модули тензора $\mathbb{A}$), а унитарные тензоры $\mathbb{U}$ и $\mathbb{U}_1$ определяются однозначно только в случае невырожденного $\mathbb{A}$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Из первого соотношения (2.3.19) находим

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{H}^2, \quad \mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{U}^*\mathbb{H}^2\mathbb{U}. \tag{2.3.21}$$

Если $\mathbb{A}$ — нормальный тензор ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$), то из (2.3.21) получим

$$\mathbb{H}^2 = \mathbb{U}^*\mathbb{H}^2\mathbb{U} = (\mathbb{U}^*\mathbb{H}\mathbb{U})^2.$$

Отсюда, извлекая квадратный корень, будем иметь

$$\mathbb{H} = \mathbb{U}^*\mathbb{H}\mathbb{U} \quad (\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*),$$

откуда приходим к соотношению $\mathbb{U}\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{U}$, доказывающему коммутативность тензоров $\mathbb{H}$ и $\mathbb{U}$. Обратно, если $\mathbb{U}$ и $\mathbb{H}$ коммутируют, то из (2.3.21) следует, что $\mathbb{A}$ — нормальный тензор. Теорема доказана. □

Собственные значения тензора $\mathbb{H} = \sqrt{\mathbb{A}\mathbb{A}^*}$, которые на основании (2.3.21) являются также собственными значениями тензора $\mathbb{H}_1 = \sqrt{\mathbb{A}^*\mathbb{A}}$, называются сингулярными числами тензора $\mathbb{A}$.

Пусть тензоры $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ из модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ — полная ортогональная система собственных тензоров произвольного унитарного тензора $\mathbb{U} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда тензор $\mathbb{U}$ можно представить в виде

$$\mathbb{U} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \sum_{k=1}^{n^p} e^{i\varphi_k}\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k, \tag{2.3.22}$$

где $\lambda_k = e^{i\varphi_k}$, ибо $|\lambda_k| = 1$ и φ_k, $k = \overline{1, n^p}$, – вещественные числа. Определим эрмитов тензор $\mathbb{F}$ следующим образом:

$$\mathbb{F} = \sum_{k=1}^{n^p} \varphi_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k. \tag{2.3.23}$$

Нетрудно заметить, что в силу (2.3.23) получим

$$e^{i\mathbb{F}} = \sum_{k=1}^{n^p} e^{i\varphi_k}\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k. \tag{2.3.24}$$

Сравнивая (2.3.22) с (2.3.24), заключаем, что

$$\mathbb{U} = e^{i\mathbb{F}}. \tag{2.3.25}$$

Таким образом, унитарный тензор $\mathbb{U} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда представим в виде (2.3.25), где $\mathbb{F} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — эрмитов тензор. Обратно, если $\mathbb{F} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — эрмитов тензор, то $\mathbb{U} = e^{i\mathbb{F}}$ — унитарный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

На основании (2.3.25) вместо (2.3.19) можно рассматривать следующие представления:

$$\mathbb{A} = \mathbb{H} \overset{p}{\otimes} e^{i\mathbb{F}}, \quad \mathbb{A} = e^{i\mathbb{F}_1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{H}_1, \tag{2.3.26}$$

где $\mathbb{H}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{F}_1$ — эрмитовы тензоры. При этом $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_1$ — неотрицательные тензоры.

Следует заметить, что соотношения (2.3.26) являются аналогом представления комплексного числа z в виде $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z| \geq 0$ и φ — вещественное число. Заметим также, что в формуле (2.3.25) тензор $\mathbb{F}$ не определяется однозначно заданием тензора $\mathbb{U}$. В самом деле, тензор $\mathbb{F}$ определяется при помощи чисел φ_k, $k = \overline{1, n^p}$, к каждому из которых можно прибавить произвольную кратность 2π, не изменяя представление (2.3.22).

В основе равенства (2.3.25) лежит тот факт, что функциональная зависимость

$$\lambda = e^{i\varphi} \quad (\lambda_k = e^{i\varphi_k}, \ \ k = \overline{1, n^p}) \tag{2.3.27}$$

отображает n^p произвольных чисел $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n^p}$ вещественной оси (вещественную ось) на некоторые числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$, лежащие на окружности $|\lambda| = 1$, и наоборот.

Трансцендентную зависимость (2.3.27) можно заменить рациональной зависимостью

$$\lambda = \frac{1 + i\varphi}{1 - i\varphi} \quad \Big(\lambda_k = \frac{1 + i\varphi_k}{1 - i\varphi_k}, \ \ k = \overline{1, n^p}\Big), \tag{2.3.28}$$

отображающей вещественную ось $\varphi = \overline{\varphi}$ на окружность $|\lambda| = 1$. При этом бесконечно удаленная точка на вещественной оси переходит в точку $\lambda = -1$. Разрешая (2.3.28) относительно φ, находим

$$\varphi = i\,\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad \Big(\varphi_k = i\,\frac{1 - \lambda_k}{1 + \lambda_k}, \ \ k = \overline{1, n^p}\Big). \tag{2.3.29}$$

Так как $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ — полная ортонормальная система собственных тензоров тензоров $\mathbb{U}$ и $\mathbb{F}$, то

$$\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad \mathbb{F} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = \varphi_k \mathbb{W}_k, \quad k = \overline{1, n^p}. \tag{2.3.30}$$

Нетрудно видеть, что соотношения (2.3.30) вытекают также из (2.3.22) и (2.3.23) соответственно.

Учитывая (2.3.28) и (2.3.29), из (2.3.30) будем иметь

$$\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = \frac{1 + i\varphi}{1 - i\varphi}\,\mathbb{W}_k, \quad \mathbb{F} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = i\,\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\,\mathbb{W}_k, \ \ k = \overline{1, n^p}. \tag{2.3.31}$$

Умножая равенства (2.3.31) тензорно справа на $\overline{\mathbb{W}}_k$ и суммируя полученные соотношения от 1 до n^p, получим

$$\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \sum_{k=1}^{n^p} (1 - i\varphi_k)\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \sum_{k=1}^{n^p} (1 + i\varphi_k)\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k,$$
$$\mathbb{F} \overset{p}{\otimes} \sum_{k=1}^{n^p} (1 + \lambda_k)\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = i \sum_{k=1}^{n^p} (1 - \lambda_k)\mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k.$$

Отсюда с помощью (2.3.22) и (2.3.23) приходим к двум взаимно обратным формулам

$$\mathbb{U} = \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + i\mathbb{F}\big) \overset{p}{\otimes} \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - i\mathbb{F}\big)^{-1}, \quad \mathbb{F} = i\big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{U}\big) \overset{p}{\otimes} \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{U}\big)^{-1}, \tag{2.3.32}$$

которые называются формулами Кэли. Формулы (2.3.32) устанавливают взаимно однозначное соответствие между произвольными эрмитовыми тензорами $\mathbb{F}$ и теми унитарными тензорами $\mathbb{U}$, у которых среди собственных чисел нет -1.

Заметим, что особую точку -1 можно заменить любым числом λ_0 ($|\lambda_0| = 1$). С этой целью вместо (2.3.28) надо рассматривать дробно-линейную функцию, отображающую вещественную ось $\varphi = \overline{\varphi}$ на окружность $|\lambda| = 1$ и переводящую точку $\varphi = \infty$ в точку $\lambda = \lambda_0$. При этом соответствующим образом изменятся соотношения (2.3.29) и (2.3.32).

2.3.2 Тензоры модуля $\mathbb{R}(\Omega)$

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Как было сказано выше, $\mathbb{R}(\Omega)$ — подкольцо кольца $\mathbb{C}(\Omega)$ и все рассуждения, относящиеся к $\mathbb{C}(\Omega)$ остаются в силе и для $\mathbb{R}(\Omega)$. В частности, то же самое относится и к модулям $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Поэтому, не останавливаясь в рассматриваемом случае на подробном изложении материала, рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся тензоров модулей $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Введем определения.

Определение 2.3.6. Тензор $\mathbb{A}^T$ называется транспонированным тензором для тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$, если для любых двух тензоров $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ из модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ имеет место соотношение

$$(\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{A}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}')_x. \tag{2.3.33}$$

Основные свойства транспонированных тензоров выражены формулами первого столбца (1.4.18).

Определение 2.3.7. Тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется нормальным, если

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^T = \mathbb{A}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}.$$

Определение 2.3.8. Симметрический тензор $\mathbb{S} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{S}^T = \mathbb{S}$) называется неотрицательным, если для любого тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$ $(\mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) \geq 0$, и положительно определенным, если для любого тензора $\mathbb{W} \neq 0$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ $(\mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) > 0$.

Заметим, что любой тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда представим, и притом однозначно, в виде $\mathbb{A} = \mathbb{S} + \mathbb{K}$, где $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}^T = \mathbb{S}$) — симметрический, а $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}^T = -\mathbb{K}$) — кососимметрический тензор.

Определение 2.3.9. Тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется ортогональным, если для любых двух тензоров $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ из модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$

$$(\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}') = (\mathbb{W}, \mathbb{W}'). \tag{2.3.34}$$

В силу (2.3.33) из (2.3.34) следует $(\mathbb{W}, \mathbb{Q}^T \mathbb{Q} \mathbb{W}') = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')$, откуда находим

$$\mathbb{Q}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}. \tag{2.3.35}$$

Обратно, из (2.3.35) для произвольных тензоров $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}'$ вытекает (2.3.34). Из (2.3.35) имеем $(\det \mathbb{Q})^2 = 1$, т.е. $\det \mathbb{Q} = \pm 1$.

Определение 2.3.10. Ортогональный тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется тензором первого рода (собственно ортогональным тензором), если $\det \mathbb{Q} = 1$, и второго рода, если $\det \mathbb{Q} = -1$.

Заметим, что ортогональные тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ образуют группу, которая называется ортогональной группой.

Симметрический, кососимметрический и ортогональный тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ суть частные виды нормального тензора.

В рассматриваемом случае теорему, аналогичную (2.3.2), можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2.3.18. *Если некоторый подмодуль $\mathbb{R}'_p(\Omega) \subset \mathbb{R}_p(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, то ортогональное дополнение $\mathbb{R}''{}_p(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}'_p(\Omega) \perp \mathbb{R}''{}_p(\Omega)\big)$ этого подмодуля инвариантно относительно $\mathbb{A}^T$.*

Для исследования тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ целесообразно расширять модули $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ соответственно до некоторых унитарных модулей $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ и $\widetilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$. Это расширение производится следующим образом:

1. Тензоры модулей $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называются вещественными тензорами.

2. Вводятся в рассмотрение комплексные тензоры $\mathbb{W} = \mathbb{U}+i\mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – вещественные тензоры из рассматриваемого вещественного модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ $(\mathbb{R}_{2p}(\Omega))$.

3. Естественным образом определяются операции сложения комплексных тензоров и умножения на комплексный скаляр.

Тогда совокупность всех комплексных тензоров образует $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$-модуль ($\widetilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$-модуль), содержащий в себе $\mathbb{R}_p(\Omega)$ $(\mathbb{R}_{2p}(\Omega))$.

4. Скалярное произведение и внутреннее r-произведение определяются аналогично введенным выше определениям.

Если выбрать вещественный базис, т.е. базис в $\mathbb{R}_p(\Omega)$ $(\mathbb{R}_{2p}(\Omega))$, то $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ $\big(\widetilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)\big)$ будет представлять собой совокупность тензоров, которые будут иметь комплексные компоненты в этом базисе, а тензоры из $\mathbb{R}_p$ $(\mathbb{R}_{2p}(\Omega))$ — вещественные компоненты. Характеристическое (вековое) уравнение вещественного тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ имеет вещественные коэффициенты, поэтому вместе с комплексным корнем λ кратности m оно имеет и корень $\overline{\lambda}$ кратности m.

Утверждение 2.3.2. Комплексно сопряженным характеристическим числам вещественного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ соответствуют комплексно сопряженные собственные тензоры модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.

Доказательство. Действительно, из $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda\mathbb{W}$ следует $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \overline{\mathbb{W}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbb{W}}$. □

Из этого утверждения следует справедливость теоремы.

Теорема 2.3.19. *Если комплексному собственному значению λ вещественного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ соответствует линейно независимая система собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_m$ из модуля $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$, то собственному числу $\overline{\lambda}$ соответствует линейная независимая система собственных тензоров $\overline{\mathbb{W}}_1, \overline{\mathbb{W}}_2, \ldots, \overline{\mathbb{W}}_m$.*

Пусть $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$ — собственный тензор из модуля $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, соответствующий собственному числу $\lambda = \mu + i\nu$, где μ и ν — действительные числа. Тогда, как легко усмотреть

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} = \mu\mathbb{U} - \nu\mathbb{V}, \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V} = \nu\mathbb{U} + \mu\mathbb{V}. \tag{2.3.36}$$

Рассмотрим тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ простой структуры с собственными значениями

$$\lambda_k = \mu_{2k-1} + i\mu_{2k}, \;\; \overline{\lambda}_k = \mu_{2k-1} - i\mu_{2k}, \;\; k = \overline{1, m}, \quad \lambda_l = \mu_l, \;\; l = \overline{2m+1, n^p}, \tag{2.3.37}$$

где μ_k $(k = \overline{1, n^p})$ – действительные числа, причем $\mu_{2k} \neq 0$ $(k = \overline{1, m})$.

Тогда соответствующие этим собственным значениям собственные тензоры $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \ldots,$ $\mathbb{W}_{n^p}$ представим в виде

$$\mathbb{W}_k = \mathbb{U}_{2k-1} + i\mathbb{U}_{2k}, \;\; \overline{\mathbb{W}}_k = \mathbb{U}_{2k-1} - i\mathbb{U}_{2k}, \;\; k = \overline{1, m}, \quad \mathbb{W}_l = \mathbb{U}_l, \;\; l = \overline{2m+1, n^p}. \tag{2.3.38}$$

Нетрудно доказать, что тензоры

$$\mathbb{U}_1,\ \mathbb{U}_2, \dots, \mathbb{U}_{n^p} \tag{2.3.39}$$

образуют базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. При этом имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}_{2k-1} = \mu_{2k-1}\mathbb{U}_{2k-1} - \mu_{2k}\mathbb{U}_{2k},\\ &\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}_{2k} = \mu_{2k}\mathbb{U}_{2k-1} - \mu_{2k-1}\mathbb{U}_{2k},\ \ k = \overline{1,m},\\ &\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}_{l} = \mu_{l}\mathbb{U}_{l},\ \ l = \overline{2m+1, n^p}, \end{aligned} \tag{2.3.40}$$

где первые два соотношения (2.3.40) выписаны с помощью (2.3.36). Заметим, что из ортонормальности базиса (2.3.38) в $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ следует ортогональность базиса (2.3.39) в $\mathbb{R}_p(\Omega)$. Теперь введем обозначения

$$\mathbb{Z}_i \equiv \mathbb{W}_i,\ \ i = \overline{1,m};\ \ \mathbb{Z}_j \equiv \overline{\mathbb{W}}_j,\ \ j = \overline{m+1, 2m};\ \ \mathbb{Z}_l \equiv \mathbb{U}_l,\ \ \lambda_l = \mu_l,\ \ l = \overline{2m+1, n^p}.$$

Тогда, очевидно, имеют место соотношения $(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_s) = \delta_{rs},\ r, s = \overline{1, n^p}$ и тензор $\mathbb{A}$ можно представить в виде (1.5.12)

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{Z}_k \otimes \overline{\mathbb{Z}}_k.$$

Отсюда, следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i + \sum_{j=m+1}^{2m} \overline{\lambda}_j \overline{\mathbb{W}}_j \otimes \mathbb{W}_j + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l =\\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda}_j \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_j + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l =\\ &= 2\sum_{i=1}^{m} Re(\lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbb{A} = 2\sum_{i=1}^{m} Re(\lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l. \tag{2.3.41}$$

Нетрудно заметить, что в силу первых двух соотношений (2.3.37) и (2.3.38)

$$Re(\lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k) = \mu_{2k-1}(\mathbb{U}_{2k-1} \otimes \mathbb{U}_{2k-1} + \mathbb{U}_{2k} \otimes \mathbb{U}_{2k}) + \mu_{2k}(\mathbb{U}_{2k-1} \otimes \mathbb{U}_{2k} - \mathbb{U}_{2k} \otimes \mathbb{U}_{2k-1}),\ \ k = \overline{1,m}.$$

Учитывая эти равенства, из (2.3.41) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{A} = &\,2\sum_{k=1}^{m} \big[\mu_{2k-1}(\mathbb{U}_{2k-1} \otimes \mathbb{U}_{2k-1} + \mathbb{U}_{2k} \otimes \mathbb{U}_{2k}) + \mu_{2k}(\mathbb{U}_{2k-1} \otimes \mathbb{U}_{2k} - \mathbb{U}_{2k} \otimes \mathbb{U}_{2k-1})\big] +\\ &+ \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l. \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

Введем обозначения:

$$\mathbb{V}_k = \sqrt{2}\,\mathbb{U}_k,\ \ k = \overline{1, 2m};\quad \mathbb{V}_l = \mathbb{U}_l,\ \ l = \overline{2m+1, n^p}. \tag{2.3.43}$$

Тогда легко показать, что из ортонормальности базиса (2.3.38) в $\mathbb{R}_p(\Omega)$ следует ортонормальность базиса (2.3.43) в $\mathbb{R}_p(\Omega)$. В силу (2.3.43) из (2.3.40) и (2.3.42) получим соответственно

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{2k-1} = \mu_{2k-1}\mathbb{V}_{2k-1} - \mu_{2k}\mathbb{V}_{2k},\\
&\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{2k} = \mu_{2k}\mathbb{V}_{2k-1} - \mu_{2k-1}\mathbb{V}_{2k}, \quad k = \overline{1, m},\\
&\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{l} = \mu_{l}\mathbb{V}_{l}, \;\; l = \overline{2m+1, n^p};
\end{aligned} \tag{2.3.44}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} = &\sum_{k=1}^{m} \big[\mu_{2k-1}(\mathbb{V}_{2k-1}\otimes\mathbb{V}_{2k-1} + \mathbb{V}_{2k}\otimes\mathbb{V}_{2k}) + \mu_{2k}(\mathbb{V}_{2k-1}\otimes\mathbb{V}_{2k} - \mathbb{V}_{2k}\otimes\mathbb{V}_{2k-1})\big] +\\
&+ \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l.
\end{aligned} \tag{2.3.45}$$

Определение 2.3.11. Представление (2.3.45) называется каноническим представлением тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ простой структуры, а тензор $\mathbb{A}$, имеющий вид (2.3.45), – каноническим тензором.

Из (2.3.45) видно, что тензор $\mathbb{A}$ в базисе (2.3.43) имеет квазидиагональную матрицу следующего вида:

$$\left(\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -\mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_3 & \mu_4 \\ -\mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mu_{2m-1} & \mu_{2m} \\ -\mu_{2m} & \mu_{2m-1} \end{pmatrix}, \mu_{2m+1}, \mu_{2m+2}, \dots, \mu_{n^p} \right). \tag{2.3.46}$$

Таким образом, для каждого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ простой структуры в $\mathbb{R}_p(\Omega)$ существует базис (2.3.43) (вообще, неортонормальный), с помощью которого можно построить базис для $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, имеющий вид $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j$, $i, j = \overline{1, n^p}$, в котором тензор $\mathbb{A}$ имеет каноническое представление (2.3.45), а матрица его компонент – квазидиагональную форму (2.3.46).

Из вышеизложенного следует справедливость теоремы.

Теорема 2.3.20. *Всякий тензор из модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ простой структуры вещественно подобен каноническому тензору.*

Итак, если $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — тензор простой структуры, а $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический тензор, то существует невырожденный тензор $\mathbb{T} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{T} = \overline{\mathbb{T}}$) такой, что имеет место соотношение

$$\mathbb{B} = \mathbb{T} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{T}^{-1} \quad (\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{T}).$$

Следует заметить, что транспонированный тензор $\mathbb{A}^T$ для $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ после расширения становится сопряженным тензором $\mathbb{A}^*$ для $\mathbb{A}$ в $\widetilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$. Очевидно, нормальный, симметрический, кососимметрический и ортогональный тензоры в $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ после расширения становятся соответственно нормальным, эрмитовым, умноженным на i эрмитовым и унитарным вещественным тензорами в $\widetilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$. Из вышесказанного следует, что для нормального тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в $\mathbb{R}_p(\Omega)$ существует система ортонормальных собственных тензоров (2.3.43) (базис $\mathbb{R}_p(\Omega)$), для которых имеют место соотношения (2.3.44). Кроме того, с помощью базиса (2.3.43) можно построить канонический базис для $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, в котором тензор $\mathbb{A}$ имеет представление (2.3.45). Поэтому верна теорема.

Теорема 2.3.21. *Всякий вещественный нормальный тензор из модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда вещественно и ортогонально подобен каноническому тензору.*

Если $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — некоторый вещественный тензор, а $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический тензор (2.3.44), то существует ортогональный тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ $\big(\underset{\sim}{\mathbb{Q}} = (\mathbb{Q}^T)^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}\big)$ такой, что

$$\mathbb{B} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} \quad (\mathbb{A} = \mathbb{Q}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}).$$

У симметрического тензора $\mathbb{S} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ все собственные значения вещественны, ибо после расширения этот тензор становится эрмитовым. Поэтому для симметрического тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в равенствах (2.3.44) и (2.3.45) следует положить $m = 0$. Тогда получим

$$\mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_l = \mu_l \mathbb{V}_l, \quad (\mathbb{V}_i, \mathbb{V}_l) = \delta_{il}, \ \ i, l = \overline{1, n^p}; \quad \mathbb{S} = \sum_{l=1}^{n^p} \mu_l \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \tag{2.3.47}$$

Определение 2.3.12. Равенство (2.3.47) называется каноническим представлением симметрического тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а сам тензор, представленный в таком виде, – каноническим симметрическим тензором.

Следовательно, матрица компонент канонического симметрического тензора диагональна.

Теорема 2.3.22. *Всякий симметрический тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда имеет ортонормированную систему собственных тензоров с вещественными собственными числами.*

Из этой теоремы вытекает теорема

Теорема 2.3.23. *Всякий вещественный симметрический тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда вещественно и ортогонально подобен каноническому симметрическому тензору.*

Если $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ $(\mathbb{B}^T = \mathbb{B})$ — произвольный симметрический тензор, а $\mathbb{S} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический симметрический тензор (последнее соотношение (2.3.47)), то на основании последней теоремы существует ортогональный тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ $\big(\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^T)^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}\big)$ такой, что

$$\mathbb{B} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} \quad (\mathbb{S} = \mathbb{Q}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}).$$

У кососимметрического тензора $\mathbb{K} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ $(\mathbb{K}^T = -\mathbb{K})$ все характеристические числа чисто мнимые (после расширения этот тензор равен произведению i на эрмитов тензор). Для этого тензора в формулах (2.3.44) и (2.3.45) надо положить $\mu_{2k-1} = 0$, $k = \overline{1, m}$; $\mu_l = 0$, $l = \overline{2m+1, n^p}$, после чего они получат вид

$$\begin{gathered}\mathbb{K} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{2k-1} = -\mu_{2k} \mathbb{V}_{2k}, \ \ \mathbb{K} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{2k} = \mu_{2k} \mathbb{V}_{2k}, \ \ \mathbb{K} \otimes \mathbb{V}_l = 0, \ \ k = \overline{1, m}, \ l = \overline{2m+1, n^p};, \\ \mathbb{K} = \sum_{k=1}^{m} \mu_{2k} (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k} - \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k-1}) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} 0 \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l.\end{gathered} \tag{2.3.48}$$

Определение 2.3.13. Последнее соотношение (2.3.48) называется каноническим представлением кососимметрического тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а сам тензор, имеющий вид (2.3.48), – каноническим кососимметрическим тензором.

Нетрудно заметить, что матрица компонент канонического кососимметрического тензора имеет вид

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \\ -\mu_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mu_4 \\ -\mu_4 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \mu_{2m} \\ -\mu_{2m} & 0 \end{pmatrix}, \underbrace{0,\, 0, \ldots, 0}_{n^p-2m} \right).$$

Так как $\mathbb{K}$ является нормальным тензором, то базис (2.3.43) можно считать ортонормальным. Следовательно, справедлива теорема

Теорема 2.3.24. *Всякий вещественный кососимметрический тензор вещественно и ортогонально подобен каноническому кососимметрическому тензору.*

Если $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ $(\mathbb{B}^T = -\mathbb{B})$ — некоторый кососимметрический тензор, а $\mathbb{K} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический кососимметрический тензор, то в силу этой теоремы существует ортогональный тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ $\big(\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^T)^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}\big)$ такой, что

$$\mathbb{B} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{K} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} \quad \big(\mathbb{K} = \mathbb{Q}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}\big). \tag{2.3.49}$$

Все характеристические числа ортогонального тензора $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ $\big(\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^T)^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}\big)$ по модулю равны единице (после расширения он становится унитарным). В связи с этим в случае ортогонального тензора в формулах (2.3.44) и (2.3.45) следует положить

$$\mu_{2k-1}^2 + \mu_{2k}^2 = 1, \;\; k = \overline{1, m}, \quad \mu_l = \pm 1, \;\; l = \overline{2m+1, n^p}.$$

При этом базис (2.3.43) можно считать ортонормальным. Полагая, что $\mu_{2k-1} = \cos\varphi_k$, $\mu_{2k} = \sin\varphi_k$, $k = \overline{1, m}$, для ортогонального тензора формулы (2.3.44) и (2.3.45) соответственно примут вид

$$\begin{aligned} &\mathbb{O} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{2k-1} = \cos\varphi_k \mathbb{V}_{2k-1} - \sin\varphi_k \mathbb{V}_{2k}, \\ &\mathbb{O} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{2k} = \sin\varphi_k \mathbb{V}_{2k-1} + \cos\varphi_k \mathbb{V}_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \\ &\mathbb{O} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_l = \pm \mathbb{V}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}; \\ &\mathbb{O} = \sum_{k=1}^{m} \big[\cos\varphi_k (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k-1} + \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k}) + \\ &\qquad\qquad + \sin\varphi_k (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k} + \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k-1}) \big] + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \pm 1 \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \end{aligned} \tag{2.3.50}$$

Определение 2.3.14. Соотношение (2.3.50) называется каноническим представлением ортогонального тензора $\mathbb{O} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а тензор $\mathbb{O}$, представленный в такой форме, – каноническим ортогональным тензором.

На основании (2.3.50) видно, что матрица компонент канонического ортогонального тензора представляется следующим образом:

$$\left(\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos\varphi_m & \sin\varphi_m \\ -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{pmatrix}, \overbrace{\pm 1,\, \pm 1, \ldots, \pm 1}^{n^p-2m} \right).$$

Следовательно, имеет место теорема

Теорема 2.3.25. *Всякий ортогональный тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда вещественно и ортогонально подобен каноническому ортогональному тензору.*

Из этой теоремы следует, что если $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — некоторый ортогональный тензор, а $\mathbb{O} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический ортогональный тензор, то существует ортогональный тензор $\mathbb{Q}_1 \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ такой, что

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{O} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}_1^{-1} \quad \big(\mathbb{O} = \mathbb{Q}_1^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}_1\big). \tag{2.3.51}$$

2.3.3 Полярное разложение тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Формулы Кэли

Выше было рассмотрено полярное разложение тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Совершенно аналогично можно рассматривать полярное разложение тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Теорема 2.3.26. *Произвольный тензор $\mathbb{A}$ модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда представим в виде произведений*

$$\mathbb{A} = \mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{O}, \quad \mathbb{A} = \mathbb{O}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{S}_1, \tag{2.3.52}$$

где $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}_1$ — неотрицательные симметрические, а $\mathbb{O}$ и $\mathbb{O}_1$ — ортогональные тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. При этом $\mathbb{S} = \sqrt{\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^T}$, $\mathbb{S}_1 = \sqrt{\mathbb{A}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}}$, причем $\mathbb{A}$ — нормальный тензор тогда и только тогда, когда $\mathbb{S}$ и $\mathbb{O}$ ($\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{O}_1$) коммутируют между собой.

Заметим, что тензоры $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}_1$ в (2.3.52) однозначно определяются заданием тензора $\mathbb{A}$. Если $\mathbb{A}$ — невырожденный тензор, то однозначно определяются и ортогональные тензоры $\mathbb{O}$ и $\mathbb{O}_1$.

Рассмотрим некоторые представления ортогонального тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Пусть $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — произвольный кососимметрический тензор ($\mathbb{B}^T = -\mathbb{B}$). Тогда

$$\mathbb{Q} = e^{\mathbb{B}} \tag{2.3.53}$$

является ортогональным тензором первого рода. Действительно,

$$\mathbb{Q}^T = e^{\mathbb{B}^T} = e^{-\mathbb{B}} = \mathbb{Q}^{-1} \quad \text{и} \quad \det \mathbb{Q} = 1.$$

Заметим, что если $k_1, k_2, \ldots, k_{n^p}$ — собственные числа тензора $\mathbb{B}$, то $\mu_1 = e^{k_1}$, $\mu_2 = e^{k_2}$, …, $\mu_{n^p} = e^{k_{n^p}}$ — собственные числа тензора $\mathbb{Q} = e^{\mathbb{B}}$. При этом

$$\det \mathbb{Q} = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_{n^p} = e^{\sum_{i=1}^{n^p} k_i} = e^0 = 1,$$

ибо $\sum_{i=1}^{n^p} k_i = 0$. Теперь покажем, что любой ортогональный тензор первого рода представим в форме (2.3.53). С этой целью представим канонический ортогональный тензор первого рода в виде (см. (2.3.41) и последнее соотношение (2.3.50))

$$\mathbb{O} = \sum_{k=1}^{m} (e^{i\varphi_k} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k + e^{-i\varphi_k} \overline{\mathbb{W}}_k \otimes \mathbb{W}_k) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} e^{i2\pi l} \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \tag{2.3.54}$$

Определим кососимметрический тензор $\mathbb{K}$ равенством

$$\mathbb{K} = \sum_{k=1}^{m} (i\varphi_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k - i\varphi_k \overline{\mathbb{W}}_k \otimes \mathbb{W}_k) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} 0 \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \tag{2.3.55}$$

Нетрудно представить, что (2.3.55) — другая форма записи канонического кососимметрического тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. последнее соотношение (2.3.48)).

Видно, что в силу (2.3.54) и (2.3.55)

$$\mathbb{O} = e^{\mathbb{K}}. \tag{2.3.56}$$

С помощью (2.3.49) и (2.3.51) из (2.3.56) будем иметь

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{O} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} e^{\mathbb{K}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} = e^{\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{K} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1}} = e^{\mathbb{B}},$$

т.е. $\mathbb{Q} = e^{\mathbb{B}}$, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим ортогональный тензор второго рода. С целью его представления введем в рассмотрение специальный тензор $\mathbb{D}$ соотношением

$$\mathbb{D} = \sum_{i=1}^{n^p-1} \mathbb{X}_i \otimes \mathbb{X}_i - \mathbb{X}_{n^p} \otimes \mathbb{X}_{n^p},$$

где $\mathbb{X}_k \in \mathbb{R}_p(\Omega)$ $(k = \overline{1, n^p})$ — некоторый ортонормированный базис, т.е. $\mathbb{X}_r \overset{p}{\otimes} \mathbb{X}_s = \delta_{rs}$ $(r, s = \overline{1, n^p})$. Нетрудно заметить, что $\det \mathbb{D} = -1$, $\mathbb{D}^{-1} = \mathbb{D} = \mathbb{D}^T$. Тогда $\mathbb{D} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}$ — ортогональные тензоры первого рода, если $\mathbb{Q}$ — ортогональный тензор второго рода. Следовательно, эти тензоры представимы в виде

$$\mathbb{D} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q} = e^{\mathbb{B}}, \quad \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D} = e^{\mathbb{B}_1},$$

где $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}_1$ — кососимметрические тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Из последних соотношений легко получим формулы представления ортогонального тензора второго рода в форме

$$\mathbb{Q} = \mathbb{D} \overset{p}{\otimes} e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{B}_1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}. \tag{2.3.57}$$

Если $\mathbb{D}$ и $\mathbb{B}$ представлены в одном и том же базисе, составленном, например, из базиса (2.3.43), то, конечно, $\mathbb{D}$ и $\mathbb{B}$ будут коммутировать между собой и вместо двух формул (2.3.57) будем иметь одну формулу

$$\mathbb{Q} = \mathbb{D} \overset{p}{\otimes} e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{B}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D} \quad (\mathbb{B}^T = -\mathbb{B},\ \mathbb{D} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} = \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}).$$

Теперь, как и в случае нахождению соотношений (2.3.32), не представляет труда получить формулы Кэли. Однако те же самые формулы можно получить из (2.3.32), если в них $\mathbb{U}$ и $\mathbb{F}$ заменить соответственно на $\mathbb{Q}$ и $i\mathbb{B}$. В результате такой замены находим

$$\mathbb{Q} = \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{B}\big) \overset{p}{\otimes} \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{B}\big)^{-1}, \quad \mathbb{B} = \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{Q}\big) \overset{p}{\otimes} \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{Q}\big)^{-1}. \tag{2.3.58}$$

Равенства (2.3.58) устанавливают взаимно однозначное соответствие между кососимметричными тензорами и теми ортогональными тензорами, которые не имеют собственного числа -1. Вместо (2.3.58) можно рассматривать формулы

$$\mathbb{Q} = -\big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{B}\big) \overset{p}{\otimes} \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{B}\big)^{-1}, \quad \mathbb{B} = \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{Q}\big) \overset{p}{\otimes} \big(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{Q}\big)^{-1}.$$

В этом случае особой точкой является число $+1$.

2.3.4 Коммутирующие нормальные тензоры

Методом математической индукции можно доказать, что лемма 2.3.1 о существовании общего собственного тензора для двух коммутирующих тензоров $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ справедлива для любого конечного и бесконечного чисел коммутирующих тензоров.

Лемма 2.3.2. *Если дано конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то эти тензоры всегда имеют общий собственный тензор.*

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда множество коммутирующих тензоров конечно. Пусть даны m попарно коммутирующих тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_m$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В силу леммы (2.3.1) для двух коммутирующих тензоров лемма (2.3.2) справедлива. Допустим ее справедливость для первых $m-1$ тензоров и докажем для m тензоров. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ — общий собственный тензор тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_{m-1}$, т.е. $\mathbb{A}_i \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda_i \mathbb{W}$ $(i = \overline{1, m-1})$, $\mathbb{W} \neq 0$. В силу коммутативности тензоров $\mathbb{A}_i$ $(i = \overline{1, m-1})$ и $\mathbb{A}_m$ имеем

$$\mathbb{A}_i \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}_m^k \otimes \mathbb{W} = \lambda_i \mathbb{A}_m^k \otimes \mathbb{W}, \quad i = \overline{1, m-1}, \;\; k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3.59}$$

Пусть теперь в системе тензоров $\mathbb{W}$, $\mathbb{A}_m \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$, $\mathbb{A}_m^2 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$, $\mathbb{A}_m^3 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \ldots$ первые r $(0 \leq r \leq n^p)$ тензоров линейно независимы, в то время как $(r+1)$-й тензор $\mathbb{A}_m^r \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$ уже является линейной комбинацией предыдущих тензоров. Легко усмотреть, что подмодуль $\mathbb{C}_p^{(r)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный системой тензоров $\mathbb{W}$, $\mathbb{A}_m \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \ldots, \mathbb{A}_m^{(r-1)} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$, будет инвариантен относительно $\mathbb{A}_m$. Откуда вытекает, что в подмодуле $\mathbb{C}_p^{(r)}(\Omega)$ будет существовать собственный тензор $\mathbb{X}$ тензора $\mathbb{A}_m$, т. е. $\mathbb{A}_m \overset{p}{\otimes} \mathbb{X} = \mu \mathbb{X}$, $\mathbb{X} \neq 0$. С другой стороны, с помощью соотношений (2.3.59) заключаем, что тензоры $\mathbb{W}$, $\mathbb{A}_m \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \ldots, \mathbb{A}_m^{(r-1)} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$ являются собственными тензорами тензора $\mathbb{A}_i$ $(i = \overline{1, m-1})$, соответствующими одному и тому же собственному значению λ_i $(i = \overline{1, m-1})$. Следовательно, любая линейная комбинация этих тензоров, в частности, и тензор $\mathbb{X}$, будет собственным тензором тензора $\mathbb{A}_i$ $(i = \overline{1, m-1})$, отвечающим собственному значению λ_i $(i = \overline{1, m-1})$. Таким образом, доказано существование общего собственного тензора $\mathbb{X} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ m попарно коммутирующих тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_m$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Теперь рассмотрим случай бесконечного множества попарно коммутирующих тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Так как такое множество может содержать только конечное число s $(0 \leq s \leq n^{2p})$ линейно независимых тензоров, то общий собственный тензор последних будет общим собственным тензором всех тензоров из рассматриваемого множества. Теорема доказана полностью. □

Для множества попарно коммутирующих нормальных тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ справедлива теорема

Теорема 2.3.27. *Если дано конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих нормальных тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то все эти тензоры имеют общую полную ортонормальную систему собственных тензоров.*

Доказательство. Пусть дано произвольное конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих нормальных тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \ldots$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В силу леммы (2.3.2) все они имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_1 \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. Обозначим подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный тензором $\mathbb{W}_1$, через $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$, а ортогональное дополнение к нему – через $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$. На основании теоремы (2.3.13) подмодуль $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ $\big(\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega) + \mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)\big)$ инвариантен относительно $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3, \ldots$. Поэтому все эти тензоры имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_2$ в $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}$. Теперь обозначим подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный тензорами $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ ($\mathbb{W}_1 \perp \mathbb{W}_2$), через $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$ и рассмотрим ортогональное дополнение к $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$, обозначаемое $\mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega)$ $\big(\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega) + \mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega)\big)$. Следовательно, согласно теореме (2.3.13) $\mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \ldots$. Поэтому они имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_3 \in \mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega)$ $\big(\mathbb{W}_3 \perp \mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_3 \perp \mathbb{W}_2\big)$. Продолжая этот процесс, получим ортогональную систему $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{(n^p)}$ общих собственных тензоров для $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \ldots$. Нормируя эти тензоры, будем иметь общую ортонормальную систему собственных тензоров для попарно коммутирующих нормальных тензоров $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3, \ldots$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Теорема доказана. □

Следует заметить, что если $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3, \ldots$ — попарно коммутирующие нормальные тензоры модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2, \ldots, \mathbb{W}_{n^p}$ — их общая система ортонормальных собственных тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то справедливы соотношения

$$\mathbb{A}_i \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j = \lambda_{ij}\mathbb{W}_j, \quad j = \overline{1, n^p},\ \ i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.3.60}$$

где λ_{ij} — собственное значение тензора $\mathbb{A}_i$, соответствующим собственным тензором которого является $\mathbb{W}_j$.

Следовательно, для каждого тензора из $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3, \ldots$ будем иметь представление

$$\mathbb{A}_i = \sum_{j=1}^{n^p} \lambda_{ij}\mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.3.61}$$

Теперь рассмотрим коммутирующие нормальные тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Сформулируем аналогичную (2.3.27) теорему.

Теорема 2.3.28. *Если дано любое множество коммутирующих нормальных тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, то все эти тензоры имеют общий канонический базис, составленный из ортонормального базиса модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_s$ $(0 \le s \le n^p)$ — линейно независимые тензоры среди рассматриваемого множества тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Расширим модули $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ соответственно до некоторых унитарных модулей $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ и $\widetilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$, подобно тому, как это было сделано выше. Тогда тензоры $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\ldots$, $\mathbb{A}_s$ согласно теореме (2.3.27) в $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ будут иметь общую полную ортонормальную систему собственных тензоров $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$, $\ldots$, $\mathbb{W}_{n^p}$. При этом будут выполняться соотношения (2.3.60) и (2.3.61).

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию тензоров $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_s$

$$\mathbb{A} = \nu_1\mathbb{A}_1 + \nu_2\mathbb{A}_2 + \ldots + \nu_s\mathbb{A}_s.$$

При любых вещественных значениях $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ тензор $\mathbb{A}$ является вещественным нормальным тензором в $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и, следовательно, будем иметь равенства

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_i = \Lambda_i\mathbb{W}_i, \quad \Lambda_i = \sum_{j=1}^{s} \mu_j\lambda_{ij}, \quad i = \overline{1, n^p}. \tag{2.3.62}$$

Собственные числа Λ_i $(i=\overline{1,n^p})$ тензора $\mathbb{A}$ являются линейными формами относительно $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$. Так как $\mathbb{A}$ – вещественный тензор, то Λ_k, $k=\overline{1,n^p}$, аналогично (2.3.37) можно разбить на попарно комплексно сопряженные и вещественные части

$$\Lambda_k=M_{2k-1}+iM_{2k},\ \ \overline{\Lambda}_k=M_{2k-1}-iM_{2k},\ \ k=\overline{1,m},\quad \Lambda_l=M_l,\ \ l=\overline{2m+1,n^p}. \tag{2.3.63}$$

Здесь M_{2k-1}, M_{2k}, $k=\overline{1,m}$, M_l, $l=\overline{2m+1,n^p}$ — вещественные линейные формы от $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$. Соответствующие собственным значениям (2.3.63) собственные тензоры в (2.3.62) аналогично (2.3.38) можно представить в виде

$$\mathbb{W}_k=\mathbb{U}_{2k-1}+i\mathbb{U}_{2k},\ \ \overline{\mathbb{W}}_k=\mathbb{U}_{2k-1}-i\mathbb{U}_{2k},\ \ k=\overline{1,m},\quad \mathbb{W}_l=\mathbb{U}_l,\ \ l=\overline{2m+1,n^p},$$

где тензоры $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2,\ldots,\mathbb{U}_{n^p}$, конечно, образуют ортогональный базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. Нормируя эти тензоры, получим ортонормальный базис $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2,\ldots,\mathbb{V}_{n^p}$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, тензоры которого определяются соотношениями (2.3.43). Далее аналогичные (2.3.44) и (2.3.45) соотношения можно записать в форме

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}\overset{p}{\otimes}\mathbb{V}_{2k-1}=M_{2k-1}\mathbb{V}_{2k-1}-M_{2k}\mathbb{V}_{2k},\ \ \mathbb{A}\overset{p}{\otimes}\mathbb{V}_{2k}=M_{2k}\mathbb{V}_{2k-1}+M_{2k-1}\mathbb{V}_{2k},\ \ k=\overline{1,m},\\
&\mathbb{A}\overset{p}{\otimes}\mathbb{V}_l=M_l\mathbb{V}_l,\ \ l=\overline{2m+1,n^p};\\
&\mathbb{A}=\sum_{k=1}^{m}\big[M_{2k-1}(\mathbb{V}_{2k-1}\otimes\mathbb{V}_{2k-1}+\mathbb{V}_{2k}\otimes\mathbb{V}_{2k})+M_{2k}(\mathbb{V}_{2k-1}\otimes\mathbb{V}_{2k}-\mathbb{V}_{2k}\otimes\mathbb{V}_{2k-1})\big]+\\
&+\sum_{l=2m+1}^{n^p}M_l\mathbb{V}_l\otimes\mathbb{V}_l.
\end{aligned}\tag{2.3.64}$$

Так как все тензоры рассматриваемого множества можно получить из $\mathbb{A}$ при конкретных значениях $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$, то тензоры $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2,\ldots,\mathbb{V}_{n^p}$, образующие ортонормальный базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, являются общими для всех тензоров $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2,\ldots,\mathbb{A}_s$. С помощью этого базиса можно построить базис модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, имеющий вид $\mathbb{V}_i\otimes\mathbb{V}_j$, $i,j=\overline{1,n^p}$, и являющийся общим каноническим базисом для рассматриваемого множества тензоров $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2,\ldots,\mathbb{A}_s$ из модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. В этом общем базисе матрицы компонент тензоров $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2,\ldots,\mathbb{A}_s$ имеют квазидиагональный вид. Следовательно, аналогичные (2.3.64) соотношения для каждого тензора из $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2,\ldots,\mathbb{A}_s$ представятся в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_i\overset{p}{\otimes}\mathbb{V}_{2k-1}=\mu_{i,2k-1}\mathbb{V}_{2k-1}-\mu_{i,2k}\mathbb{V}_{2k},\ \ \mathbb{A}_i\overset{p}{\otimes}\mathbb{V}_{2k}=\mu_{i,2k}\mathbb{V}_{2k-1}+\mu_{i,2k-1}\mathbb{V}_{2k},\ \ k=\overline{1,m},\\
&\mathbb{A}_l\overset{p}{\otimes}\mathbb{V}_l=\mu_{i,l}\mathbb{V}_l,\ \ l=\overline{2m+1,n^p},\ \ i=\overline{1,s};\\
&\mathbb{A}_i=\sum_{k=1}^{m}\big[\mu_{i,2k-1}(\mathbb{V}_{2k-1}\otimes\mathbb{V}_{2k-1}+\mathbb{V}_{2k}\otimes\mathbb{V}_{2k})+\mu_{i,2k}(\mathbb{V}_{2k-1}\otimes\mathbb{V}_{2k}-\mathbb{V}_{2k}\otimes\mathbb{V}_{2k-1})\big]+\\
&+\sum_{l=2m+1}^{n^p}\mu_{i,l}\mathbb{V}_l\otimes\mathbb{V}_l,\ \ i=\overline{1,s},
\end{aligned}\tag{2.3.65}$$

где было принято, что

$$\begin{aligned}
&\lambda_{j,k}=\mu_{j,2k-1}+i\mu_{j,2k},\ \ \overline{\lambda}_{j,k}=\mu_{j,2k-1}-i\mu_{j,2k},\ \ k=\overline{1,m},\\
&\lambda_{j,l}=\mu_{j,l},\ \ l=\overline{2m+1,n^p},\ \ j=\overline{1,s}.
\end{aligned}\tag{2.3.66}$$

Теорема доказана. □

Следствие 2.3.28.1. *Если какой-нибудь из коммутирующих нормальных тензоров* $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, ..., $\mathbb{A}_s$, *например,* $\mathbb{A}_\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq s)$ *является симметрическим, то в соответствующих формулах* (2.3.65) *и* (2.3.66) *следует положить* $\mu_{\alpha,2k} = 0$, $k = \overline{1,m}$.

Следствие 2.3.28.2. *Если какой-нибудь из коммутирующих нормальных тензоров* $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, ..., $\mathbb{A}_s$, *например,* $\mathbb{A}_\beta$ $(0 \leq \beta \leq s)$ *является кососимметрическим, то в соответствующих соотношениях* (2.3.65) *и* (2.3.66) *надо положить* $\mu_{\beta,2k-1} = 0$, $k = \overline{1,m}$.

Следствие 2.3.28.3. *Если какой-нибудь из коммутирующих нормальных тензоров* $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, ..., $\mathbb{A}_s$, *например,* $\mathbb{A}_\gamma$ $(0 \leq \gamma \leq s)$ *является ортогональным тензором, то в соответствующих равенствах* (2.3.65) *и* (2.3.66) *нужно принять* $\mu_{\gamma,2k-1} = \cos\varphi_k$, $\mu_{\gamma,2k} = \sin\varphi_k$, $k = \overline{1,m}$; $\mu_{\gamma,l} = \pm 1$, $l = \overline{2m+1, n^p}$.

Следствие 2.3.28.4. *Если среди коммутирующих нормальных тензоров* $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, ..., $\mathbb{A}_s$ *имеются какие-нибудь симметрические, кососимметрические и ортогональные тензоры, то для получения аналогичных* (2.3.65) *и* (2.3.66) *соотношений для этих тензоров следует воспользоваться следствиями* (2.3.28.1)–(2.3.28.3) *соответственно.*

Следует заметить, что вышеприведенные построения можно было производить иным путем. В частности, сохраняя используемые выше обозначения, можно было ввести определения отображения модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в модуль $\mathbb{C}_q(\Omega)$ и линейного оператора следующим образом:

Определение 2.3.15. Будем говорить, что задано отображение $\mathbb{A}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в модуль $\mathbb{C}_q(\Omega)$ и писать $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)$, если каждому элементу $\mathbb{U}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ поставлен в соответствие определенный элемент $\mathbb{V} = \mathbb{A}\mathbb{U}$, содержащийся в модуле $\mathbb{C}_q(\Omega)$.

Определение 2.3.16. Отображение $\mathbb{A}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в модуль $\mathbb{C}_q(\Omega)$ называется линейным оператором (обозначение $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)$), если выполнены следующие аксиомы:

1. $\mathbb{A}(\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2) = \mathbb{A}\mathbb{W}_1 + \mathbb{A}\mathbb{W}_2$ для любых $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ из $\mathbb{C}_p(\Omega)$;
2. $\mathbb{A}(\alpha\mathbb{W}) = \alpha\mathbb{A}\mathbb{W}$ для любого $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}_0(\Omega)$ (из кольца скаляров).

Если $p = q$, то $\mathbb{A}$ называется линейным оператором в модуле $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Далее введем понятие суммы операторов $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)$ и $\mathbb{B} : \mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)$ следующим образом: $(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{W} = \mathbb{A}\mathbb{W} + \mathbb{B}\mathbb{W}$, где $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. Очевидно, что $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ — линейный оператор, $(\mathbb{A}+\mathbb{B}) : \mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)$. Аналогично вводится понятие произведения линейного оператора $\mathbb{A}$ на скаляр $\alpha \in \mathbb{C}_0(\Omega)$, а именно $(\alpha\mathbb{A})\mathbb{W} = \alpha(\mathbb{A}\mathbb{W})$, для любого $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$.

Определим и произведение линейных операторов. Если $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)$, $\mathbb{B} : \mathbb{C}_q(\Omega) \to \mathbb{C}_r(\Omega)$, то произведение линейных операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ определяется по правилу $(\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{W} = \mathbb{B}(\mathbb{A}\mathbb{W})$, $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. Произведение $\mathbb{B}\mathbb{A}$ является линейным оператором и отображает $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в $\mathbb{C}_r(\Omega)$.

После введения этих операций можно дать важнейшее понятие – пространство линейных операторов.

Определение 2.3.17. Совокупность всех линейных операторов, отображающих модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в модуль $\mathbb{C}_q(\Omega)$, образующая модуль с введенными выше операциями сложения операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ и умножения оператора $\mathbb{A}$ на скаляр $\alpha \in \mathbb{C}_0(\Omega)$, называется модулем линейных операторов и обозначается $\big(\mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)\big)$.

Если $p = q$, то модуль линейных операторов $\big(\mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_p(\Omega)\big)$ с рассмотренными выше операциями (сложения, произведения на скаляр и произведения двух операторов) является кольцом.

Таким образом, построили новый модуль $\big(\mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)\big)$, элементами которого являются линейные операторы.

Рассмотрим теперь частный случай линейного отображения $\mathbb{A}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в $\mathbb{C}_0(\Omega)$. Дадим в связи с этим следующее определение:

Определение 2.3.18. Линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_0$ называется линейным функционалом.

Таким образом, функционал отображает модуль в кольцо скаляров.

Перефразируя и другие определения из линейной алгебры и функционального анализа [1, 6, 10, 14, 18] и др., нетрудно заметить, что изложенное выше остается в силе, если вместо тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p+q}(\Omega)$ $(\mathbb{C}_{2p}(\Omega))$ рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_q(\Omega)$ $\big(\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \to \mathbb{C}_p(\Omega)\big)$. Следовательно, аналогично изложенному выше изучение частного случая, когда вместо $\mathbb{C}_r(\Omega)$ рассматриваются $\mathbb{R}_r(\Omega)$, не представляет труда.

Наконец, дадим определение тензора, которое не зависит от выбора системы координат.

Определение 2.3.19. Комплексный (вещественный) тензор ранга $r \in \mathbb{N}_0$ — элемент модуля $\mathbb{C}_r(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}_r(\Omega)\big)$.

В конце этой главы приведем важные практические упражнения, выполнение которых позволит во многих случаях представить в удобной форме законы и уравнения МДТТ.

Упражнение 1. Найти собственные тензоры и собственные значения изотропного тензора второго ранга.

Упражнение 2. Найти собственные тензоры и собственные значения трансверсально-изотропного тензора второго ранга.

Упражнение 3. Найти собственные тензоры и собственные значения ортотропного тензора второго ранга.

Упражнение 4. Найти собственные тензоры и собственные значения изотропного тензора четвертого ранга.

Упражнение 5. Найти собственные тензоры и собственные значения трансверсально-изотропного тензора четвертого ранга.

Упражнение 6. Найти собственные тензоры и собственные значения ортотропного тензора четвертого ранга.

Упражнение 7. Найти собственные тензоры и собственные значения изотропного тензора шестого ранга.

Упражнение 8. Найти собственные тензоры и собственные значения трансверсально-изотропного тензора шестого ранга.

Упражнение 9. Найти собственные тензоры и собственные значения ортотропного тензора шестого ранга.

Упражнение 10. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}_1(\Omega)\big)$ связаны между собой соотношением $\mathbf{b} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}$, где $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — тензор второго ранга модуля $\mathbb{C}_2(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}_2(\Omega)\big)$, а $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $(\Omega \in \mathbb{R}^3)$. Представить это соотношение в собственных векторах и собственных значениях тензора $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, если: 1) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — изотропный тензор; 2) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — трансверсально-изотропный тензор; 3) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — ортотропный тензор; 4) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — произвольный тензор; 5) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — эрмитов тензор; 6) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — симметричный тензор; 7) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — кососимметричный тензор.

Упражнение 11. Два тензора второго ранга $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ модуля $\mathbb{C}_2(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}_2(\Omega)\big)$ связаны между собой соотношением $\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{Q}}$, где $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — тензор четвертого ранга модуля $\mathbb{C}_4(\Omega)$ $\big(\mathbb{R}_4(\Omega)\big)$, а $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Представить это соотношение в собственных тензорах и собственных значениях тензора $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, если: 1) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — изотропный тензор; 2) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — трансверсально-изотропный тензор; 3) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — ортотропный тензор; 4) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — произвольный тензор; 5) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — эрмитов тензор; 6) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — симметричный тензор; 7) $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ — кососимметричный тензор.

Упражнение 12. Выполнить предыдущее упражнение в тех случачх, когда компоненты тензора $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ обладают различными свойствами симметрии.

Упражнение 13. Выполнить предыдущие упражнения в том случае, когда $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

Следует заметить, что при наборе работы были использованы замечательные книги [7, 12, 20].

Литература

[1] *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979. 512 с.

[2] *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.

[3] *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966. 556 с.

[4] *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978, 296 с.

[5] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции/Под ред. О.А.Олейник и Б.В.Шабата.– 2-ое изд., перераб. М.: Наука, 1988, 512 с.

[6] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука. 1988. 552 с.

[7] *Гуссенс М., Миттельбах Ф., Самарин А.* Путеводитель по пакету LaTeX и его расширению LaTeX2_ε Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 606 с.

[8] *Димитриенко Ю.И.* Тензорое исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 575 с.

[9] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ: Методы и приложения. М.: Эдиториал. УРСС, т. 1, 1998, 336 с.; т. 2, 1998, 280 с.

[10] *Колмогоров А.Н., Фомин С.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989. 624 с.

[11] *Коренев Г.В.* Тензорное исчисление. М.: Изд-во МФТИ, 1995, 240 с.

[12] *Львовский С.М.* Набор и верстка в пакте LaTeX/ 2-ое изд., испр. и допол. М.: Космосинформ, 1995. 374 с.

[13] *Любарский Г.Я.* Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958.

[14] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965. 520 с.

[15] *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963, 411 с.

[16] *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986, 264 с.

[17] *Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И.* Алгебра и начала анализа. Современный курс для поступающих в ВУЗы. М.: 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998. 736 с.

[18] *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Дрофа, 2001, 384 с.

[19] *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971, 376 с.

[20] *Спивак М.* Восхитительный TEX: Руководство по конфортному изготовлению научных публикаций в пакете AMS-TEX/ Пер. с англ. М.: Мир, 1993. 285 с.

[21] *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984, 416 с.

Оглавление

НИКАБАДЗЕ Михаил Ушангиевич

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЧАСТЬ I

Оригинал-макет подготовлен издательской группой
механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 10.09.2007 г.
Формат 60 × 90 1/16. Объем 5,375 п.л.
Заказ 35 Тираж 50 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом
факультете МГУ, 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ.
Лицензия на издательскую деятельность ИД №04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова
и Франко-русского центра им. А.М. Ляпунова