

ВИКТОР  
ШКАДОВ  
ЗАПРЯН  
ЗАПРЯНОВ

# Динамика на вискозни флуиди

**В учебника са изложени основните съвременни въпроси, свързани с движението на вискозни флуиди. Конкретните хидродинамични течения се изследват въз основа на аналитични и числени решения на уравненията на Навие — Стокс. При изложението на материала е обърнато особено внимание на яснотата на математическата постановка на решаваните задачи и на практическия смисъл на получените решения.**

Учебникът е предназначен за студентите по математика, специализиращи механика. Той ще бъде полезен и за студентите от техническите висши учебни заведения, за научни работници, инженери и др., интересуващи се от механика на флуидите.

©

Виктор Яковлевич Шкадов  
Запрян Димитров Запрянков  
1986

c/o Jusautor, Sofia

Индекс 531/534

## ПРЕДГОВОР

В учебника последователно са изложени основните теоретични резултати за теченията на вискозни флуиди. Изследването на конкретни хидродинамични проблеми се основава на аналитични и числени решения на уравненията на Навие — Стокс. Особено внимание е отделено на яснотата при постановката на математическите задачи и практическия смисъл на техните решения.

Проблемите на хидродинамиката на вискозните флуиди са застъпени в различна степен в много учебници и монографии. Учебният материал, свързан с извеждането на уравненията на вискозните флуиди, точните решения, теченията при малки числа на Рейнолдс и граничния слой, се съдържа във фундаменталните учебници на Л. И. Седов — „Механика сплошной среды“, Н. Е. Кочин, И. А. Кибел, Н. В. Розе — „Теоретическая гидромеханика“ и монографията на Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц — „Механика сплошной среды“. В настоящата книга този материал е събран в едно и изложен кратко.

Новите направления в механиката на вискозните флуиди, свързани с численото решение на хидродинамичните задачи, с прилагането на асимптотични методи, отчитането на стенните ефекти, изследването на течения с междуфазови граници и въпросите за загуба на устойчивост, не са достатъчно застъпени в учебната литература. В предлагания учебник на тези проблеми е отделено необходимото внимание.

Динамиката на вискозните флуиди е обширна, бързо развиваща се част от хидроаеромеханиката, затова много задачи, интересни за теорията и практиката, не са засегнати.

При разглеждането на конкретни случаи бе проявен стремеж да се цитират първите публикации, въпреки че изложението се извършва на основата на съвременните изследвания. Това се отнася особено за числените решения. За да се постигне краткост, където е възможно, при решаване на основните уравнения се прилагат общи подходи. Отделните задачи следват като частни случаи.

Основното съдържание на книгата се отнася за течения на несвиваеми флуиди. Свиваеми флуиди са разгледани само при някои задачи от теорията на граничния слой и едномерните течения с ударна вълна. Широко използвани са числените методи. Много често свеждането на дадена хидродинамична задача към обикновени диференциални уравнения се счита за последен етап от

нейното решение. В отделна глава са описани методите, чрез които на ЕИМ може да се получи числено решение със зададена точност.

В учебника е отразен опитът на авторите от четенето на лекции по динамика на вискозните флуиди в Московския и Софийския университет. Техните конкретни научни интереси оказва известно влияние при подбора на материала.

На руски език книгата излезе от печат през 1984 г. В настоящото издание изложението е разширено.

Изказваме своята искрена благодарност на акад. Г. И. Петров, под чието въздействие са оформени много от нашите възгледи относно състоянието и проблемите на динамиката на вискозните флуиди.

Специална благодарност дължим и на др. Мария Великии, Жасмина Кожухарова и Пенка Калицова-Куртева за голямата помощ, оказана при редактирането и оформянето на окончателния текст на учебника.

*От авторите*



## ВЪВЕДЕНИЕ

Хидроаеродинамиката изучава течностите и газовете и тяхното взаимодействие с твърди тела или с други частици (мехури, капки и т. н.). Предмет на хидродинамичните изследвания са движенията на реалните течности и газове, срещащи се в природата или използвани при различни технологии в производството. Основната цел на тези изследвания е намирането на качествени и количествени закономерности и тяхното ефективно използване.

Течностите и газовете имат много общи физически свойства, поради което се обединяват под общото название *флуид*. Флуидите се характеризират с редица специфични свойства.

Твърдите вещества се намират в кристално и аморфно състояние. Подреждането на молекулите и атомите в пространството при твърдите тела и течностите играе важна роля в тяхното поведение и взаимодействие. Ако дадено подреждане на атомите (молекулите) се запазва на разстояния, сравними с междоатомните разстояния, казваме, че то е от „близък (малък) порядък“. Ако подреждането се повтаря и на много големи разстояния — то е от „далечен (голям) порядък“. В газовете (по-точно в идеалните газове) не съществува подреждане на атомите и молекулите. В течностите и аморфните тела подреждането е от „близък порядък“, което се характеризира с някаква закономерност в разположението на съседните атоми. В тях нямаме подреждане от „далечен порядък“, т. е. на големи разстояния подреждането на атомите се нарушава и преминава в пълен „безпорядък“.

Молекулите на твърдите тела (с изключение на аморфните) се намират на определени разстояния, трептят около местата си и са наредени в пространството в строго определен ред във вид на „кристални решетки“, т. е. при тях съществува не само „близък“, но и „далечен“ порядък във взаимното разположение на атомите. Поради това твърдите тела (с изключение на аморфните) имат определена форма и обем, които могат да се променят забележимо само под действието на значителни външни сили, необходими за преодоляване на големите междумолекулни сили.

Молекулите на флуидите нямат определени места в обема, който заемат, и могат без значителни външни сили да се разместват една спрямо друга. Деформирането на течностите и газовете се извършва сравнително лесно. Те са лесноподвижни и приемат предоставената им форма. Твърдите тела притежават свойството еластичност, т. е. след премахване на деформиращите

сили те се стремят да възстановят първоначалната си форма, докато флуидите запазват новопридадената им форма.

Течностите и газовете притежават някои общи свойства, но се различават по своята вътрешна молекулна структура. Разстоянията между молекулите в течностите са по-малки, молекулните сили на сцепление са по-големи, затова с известно приближение те могат да се разглеждат като несвиваеми флуиди.

Междумолекулните разстояния при газовете са по-големи, силите на взаимодействие между молекулите — сравнително малки, вследствие на което газовете обикновено се считат за свиваеми флуиди.

Това разграничаване има относителен характер. Понякога течностите могат да бъдат с поведение на свиваеми флуиди, например при разпространяване на подводните взривове, при хидравличен удар и др., а газовете — като несвиваеми, например при слаби изменения в налягането, при малки скорости на движение и др.

Средното разстояние между молекулите при газовете е по-голямо от радиуса на молекулното им действие, поради което те си взаимодействуват само когато се „сблъскат“. Движението им е хаотично и се нарича Брауново. Свойството на течностите да полепват по стените е резултат от действието на адхезионните сили между молекулите на стената и граниещите с тях течни молекули. Тъй като тези сили са значително по-големи от кохезионните сили между флуидните молекули, допиращите се до стените течни частици „полепват“ и не могат да се плъзгат, както се плъзгат помежду си вътре в течността.

Изследването на флуидите се улеснява, ако се пренебрегне тяхната вискозност (вътрешното им триене), т. е. ако се предположи, че те са идеални. Математическата теория на идеалните течности и газове позволи да бъдат теоретично обяснени редица явления, свързани с вълновите движения, подемната сила и индуцираното съпротивление при обтичане на крила и др. С тази теория не могат да се обяснят обаче много други наблюдавани явления и ефекти, като съпротивлението, дължащо се на триенето, откъсването на потока от обтичаните тела, загряването на флуидите при превръщането (дисипацията) на механичната енергия в топлинна, топлмасообменните процеси, загубите на налягането при движението на флуид в тръби и много други.

Съвременните приложения на хидроаеромеханиката налагат разглеждането на все по-сложни механо-математически модели, по-пълно да се отчитат реалните свойства на течностите и газовете, което води до засилване ролята на динамиката на вискозните флуиди. Едновременно с това в научните изследвания през последното десетилетие започнаха настойчиво да си пробиват път хидродинамичните проблеми, в които се отчита наличието на междофазови граници. Липсата на симетричност на действието на силите на сцепление от двете страни на междофазовите гра-

ници води до възникването на така нареченото *повърхностно напрежение*.

Основна роля в механиката на флуидите играят *тензорът на напрежението* и *тензорът на скоростта на деформацията*. Връзката (зависимостта) между тях може да бъде различна. Флуидите, за които тя е линейна, се наричат *нютони*. Много течности — водата, глицерина, течните метали и др., както и всички газове са нютони флуиди.

Течности, за които зависимостта между тензора на напрежението и тензора на скоростта на деформацията не е линейна, се наричат *ненютони*. Такива са например разтворите на полимерните материали, маслените бои, много фармацевтични и хранителни течности, кръвта, течният асфалт, нафтата и др. В настоящия учебник се разглеждат само нютони флуиди.

Основен метод за изследване движенията на флуидите е построяването на феноменологични макроскопични теории, основащи се на общи, получени от опита закономерности и хипотези. Изграждането на феноменологичната теория за движението на флуидите се основава на трите основни закона на механиката за запазване — на масата, количеството на движението и енергията. Приемайки тези закони за приложими при описване движението на флуидите и използвайки някои хипотези, специфични за отделните видове флуиди, получаваме затворена система (модел) от частни диференциални уравнения. По-нататък следва да се поставят съответни гранични условия и получените гранични задачи да се решат аналитично или числено. Пълното хидродинамично изследване изисква и експериментална проверка на резултатите.

Една от хипотезите при изучаването на флуидите е, че те не се разглеждат като дискретна система от материални точки, а като непрекъсната среда без междумолекулни пространства, т.е. като материален континуум, на всяка точка от който е съпоставено съответно число, характеризиращо плътността на средата.

Добре известно е, че движението винаги се определя по отношение на някаква координатна система. Да се познава движението на флуида само като цяло, не е достатъчно — необходимо е да се знаят хидродинамичните характеристики във всички негови точки. Затова са необходими начини за индивидуализация на частиците (точките). Когато индивидуалните точки от флуида се задават със стойностите на техните координати в началния момент, казваме, че се използва подходът на Лагранж за математическо описание на движението на непрекъсната среда. Началните координати на точките  $a, b, c$  и времето  $t$  се наричат *променливи на Лагранж*. Чрез тях може да се запише законът на движението на флуидните частици

$$x=x(a, b, c, t); \quad y=y(a, b, c, t); \quad z=z(a, b, c, t).$$

Методът на Лагранж за изучаване на течностите и газовете лежи в основата на физическите закони, тъй като те са свързани с

движението на индивидуалните материални частици. Много често обаче нас ни интересува не историята на движението на отделните флуидни частици, а движението, което става в различните моменти в дадена геометрична точка (област) от течението. Тогава ние се концентрираме върху тази точка (област) от пространството, в която с течение на времето идват различни частици от флуида. В този случай използваме подхода на Ойлер за математическо описание на движението на течностите и газовете. Геометричните координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времето  $t$  се наричат *променливи на Ойлер*. Съгласно метода на Ойлер, който се използва много често в приложенията, движението се счита за известно, ако скоростта, налягането, температурата и другите интересувачи ни величини са зададени като функции на  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . Следователно от математическа гледна точка методът на Лагранж се различава от метода на Ойлер само по това, че при първия метод за променливи се вземат параметрите, индивидуализиращи точките от флуида от даден момент нататък, и времето  $t$ , а при втория — координатите на точките от пространството, което заема флуидът, и времето  $t$

# МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА ТЕЧЕНИЯ НА ВИСКОЗНИ ФЛУИДИ

## § 1.1. ОСНОВНИ УРАВНЕНИЯ

Нека даден флуид запълва непрекъснато цялото пространство или някакъв негов обем  $G$ . Да въведем ортогонална декартова координатна система с единични вектори  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Тогава всяка точка от пространството се определя еднозначно от координатите  $x$ ,  $y$ ,  $z$  или от радиус-вектора  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

В произволен момент  $t$  движението на флуида може да се характеризира посредством векторното поле на скоростта  $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ . Тук  $\vec{v}(x, y, z, t)$  означава скоростта, която има флуидната частица, намираща се в точката  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в момента  $t$ . Наред със скоростта могат да се въведат и други хидродинамични величини — скаларни или векторни. За да се напишат основните уравнения, които описват движението на флуида, трябва да се приложат законите за запазване на масата, количеството на движението и енергията към движещия се флуиден обем.

Нека  $A(x, y, z, t)$  е някаква хидродинамична величина. Да разгледаме малка флуидна частица с координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , която се движи в полето на флуидното течение. За нея величината  $A$  ще зависи от времето  $t$  както директно, така и посредством координатите  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , които са функции на времето:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Компонентите на скоростта на флуидната частица се получават, като диференцираме тези функции относно времето  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Производната на величината  $A$  относно времето  $t$  намираме, като използваме правилото за диференциране на сложна функция

$$(1.1) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Удобно е да се използва операторът градиент

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

за да се запишат основните векторни операции

$$\text{grad } A = \nabla A;$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A};$$

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}.$$

Изразът за производната във формула (1.1) може да се запише по следния начин:

$$(1.2) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)A.$$

Тази производна на величината  $A$  се нарича *пълна (индивидуална или субстанциална)* за разлика от частната производна  $\frac{\partial A}{\partial t}$ , която се разглежда във фиксирана точка  $x, y, z$  от пространството и се нарича локална.

Да разгледаме сега някакъв обем  $\tau$ , съдържащ едни и същи частици, които се движат в него. Нека във всяка точка (флуидна частица) от този обем е дефинирана хидродинамичната величина  $A$  така, че във всеки момент от времето може да се изчисли интегралът

$$I = \int_{\tau} A d\tau.$$

Стойността на интеграла се мени с течение на времето, тъй като се изменят както обемът  $\tau$ , така и подинтегралната функция  $A$ . Разликата  $\Delta I$  от стойностите на интеграла в два близки момента на времето може да се представи по следния начин:

$$(1.3) \quad \Delta I = \int_{\tau'} A' d\tau' - \int_{\tau} A d\tau = \int_{\tau} (A' - A) d\tau + \int_{\tau' - \tau} A' d\tau'.$$

С точност до малки величини от по-висок порядък по  $\Delta t$  имаме

$$A' - A = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t, \quad d\tau' = dS v_n \Delta t.$$

Тук  $d\tau'$  е елемент от обема  $\tau' - \tau$ ,  $S$  е повърхнината, ограничаваща обема  $\tau$ ,  $v_n$  е нормалната компонента на скоростта на флуида към повърхността  $S$ . Като вземем предвид тези съотношения в (1.3), разделим двете му страни на  $\Delta t$  и устремим  $\Delta t$  към нула, получаваме

$$(1.4) \quad \frac{dI}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial A}{\partial t} d\tau + \int_S A v_n dS.$$

С помощта на формулата на Гаус — Остроградски

$$(1.5) \quad \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{Q} d\tau = \int_S Q_n dS$$

преобразуваме интеграла по повърхност в интеграл по обем.

Полагайки  $\vec{Q} = A\vec{v}$  в (1.4), получаваме

$$(1.6) \quad \frac{dI}{dt} = \int_{\tau} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div} (A\vec{v}) \right] d\tau.$$

Като използваме определението за пълна производна в (1.2), това равенство може да се запише така:

$$(1.7) \quad \frac{dI}{dt} = \int_{\tau} \left( \frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \vec{v} \right) d\tau.$$

### 1.1.1. Закони за запазване при непрекъснати среди

**Запазване на масата.** Да дефинираме плътността  $\rho$  посредством съотношението  $dm = \rho d\tau$ , където  $dm$  е масата в обема  $d\tau$ . Тогава масата  $m$  в обема  $\tau$  се изразява чрез интеграла

$$m = \int_{\tau} \rho d\tau.$$

Законът за запазване на масата гласи, че в отсъствие на вътрешни източници масата на флуидния обем не се изменя

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt} \left( \int_{\tau} \rho d\tau \right) = 0.$$

Като използваме формулата (1.6), от (1.8) намираме

$$\int_{\tau} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \right] d\tau = 0.$$

Тъй като  $\tau$  е произволен флуиден обем, получаваме уравнението

$$(1.9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0,$$

което е известно като *уравнение на непрекъснатостта*. Това уравнение се записва и във вида

$$(1.10) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Една среда се нарича *несвиваема*, когато  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho = 0.$$

Ако средата е хомогенна и несвиваема,  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  и  $\rho = \text{const}$ , ако е нехомогенна и несвиваема —  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  (въпреки че  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$  при нестационарните движения). Следователно уравнението на непрекъснатостта на хомогенна или нехомогенна несвиваема среда има вида

$$(1.11) \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

При извода на уравнението (1.9), а също и при по-нататъшните разглеждания се предполага, че функциите, характеризиращи течението, са непрекъснати и диференцируеми, което е необходимо за съответните преобразувания. Необходимо е условията върху повърхнините на прекъсване да се разглеждат отделно

**Запазване количеството на движението.** *Количеството на движението на масата  $\rho d\tau$  от флуида, заключена в елементарния обем  $d\tau$ , е равно на  $\rho d\tau \vec{v}$ .* Тогава количеството на движението  $\vec{Q}$  в обема  $\tau$  е равно на

$$\vec{Q} = \int_{\tau} \rho \vec{v} d\tau.$$

Върху флуидния обем  $\tau$  действуват масови и повърхностни сили. Да означим действащите външни масови сили с  $\vec{F}^m$ , а външните повърхностни сили с  $\vec{F}^s$ . В съответствие със закона за запазване количеството на движението

$$(1.12) \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^m + \vec{F}^s.$$

Масовите сили действуват на всеки флуиден елемент от обема  $\tau$ . Векторът

$$\vec{F} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\vec{F}^m}{m}$$

определя силата, действаща върху единица маса. Обикновено тази сила е известна функция на координатите  $x, y, z$  и времето  $t$ :  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ . На обем  $d\tau$  с маса  $dm = \rho d\tau$  действа сила  $\vec{F} dm = \vec{F} \rho d\tau$ , поради което за главния вектор на масовите сили, действащи на обем  $\tau$ , получаваме

$$\vec{F}^m = \int_{\tau} \rho \vec{F} d\tau.$$

Повърхностните сили действуват на всеки елемент от повърхността  $S$ : Да разгледаме елемента  $\Delta S$  с нормала  $\vec{n}$ . Нека  $\Delta \vec{F}_n^s$  е главният вектор на повърхностните сили, действащи на елемента  $\Delta S$ . Величината

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n^s}{\Delta S}$$

се нарича **напрежение на повърхностните сили**, действащо в разглежданата точка върху площадката с нормала  $\vec{n}$ . Векторът  $\vec{p}_n$  зависи от координатите на точката, времето и направлението



на нормалата  $\vec{n}$ . Главният вектор на повърхностните сили се получава чрез интегриране на  $\vec{p}_n$ :

$$\vec{F}^s = \int_S \vec{p}_n dS.$$

По такъв начин уравнението за количеството на движението (1.12), което е валидно за движението на произволна непрекъсната среда, се записва така:

$$(1.13) \quad \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho \vec{v} d\tau \right) = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_S \vec{p}_n dS.$$

Като използваме формулата за производна на интеграл върху движещ се обем (1.7), уравнението (1.13) добива вида

$$(1.14) \quad \int_V \left( \frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} - \rho \vec{F} \right) d\tau = \int_S \vec{p}_n dS.$$

Да предположим, че сечението  $\Sigma$  с нормала  $\vec{n}$  дели някакъв обем  $\tau$  на два обема  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Тогава могат да се напишат три уравнения за количеството на движението от вида (1.14) — за всеки от обемите  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , а също и за целия обем  $\tau$ . Като съберем първите две равенства и от полученото извадим третото, намираме

$$\int_{\Sigma} (\vec{p}_n + \vec{p}_{-n}) dS = 0.$$

Тъй като обемите са произволни, получаваме

$$(1.15) \quad \vec{p}_n = -\vec{p}_{-n}.$$

Нека обемът  $\tau$  от флуида да има форма на малък тетраедър с връх в началото на координатната система, отсечен чрез равнина с нормала  $\vec{n}$  в първия октант. Уравнението (1.14) за този обем от флуида има вида

$$(1.16) \quad \int_{S_x} \vec{p}_{-x} dS_x + \int_{S_y} \vec{p}_{-y} dS_y + \int_{S_z} \vec{p}_{-z} dS_z + \int_{S_n} \vec{p}_n dS = \int_V \vec{L} d\tau.$$

Тук с  $\vec{L}$  е означен подинтегралният израз в лявата страна на 1.14). От геометрични съображения следва

$$d\tau = \frac{1}{3} h dS,$$

$$dS_x = dS \cos(n, x), \quad dS_y = dS \cos(n, y), \quad dS_z = dS \cos(n, z).$$

Тук  $h$  е височината на тетраедъра, прекарана през началото на координатната система. Като заменим подинтегралните функции в (1.16) с техните средни величини, намираме

$$\vec{p}_n + \vec{p}_x \cos(n, x) + \vec{p}_y \cos(n, y) + \vec{p}_z \cos(n, z) = \frac{1}{3} h \vec{L}.$$

Устремявайки  $h$  към нула и вземайки предвид (1.15), получаваме известната формула на Коши

$$(1.17) \quad \vec{p}_n = \vec{p}_x \cos(n, x) + \vec{p}_y \cos(n, y) + \vec{p}_z \cos(n, z).$$

Ако в някоя точка са известни напреженията  $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ , действащи върху площадките с нормали, насочени по координатните оси, то по формула (1.17) може да се изчисли напрежение, то, което действа на произволна площадка с нормала  $\vec{n}$ , минаваща през тази точка. За да получим уравнението за количеството на движението в диференциална форма, прилагаме формула (1.17). С помощта на формулата на Гаус — Остроградски преобразуваме интеграла по повърхността от (1.14) в интеграл по обема  $\tau$

$$\int_S \vec{p}_n dS = \int_{\tau} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) d\tau.$$

Тогава от (1.14) намираме

$$\int_{\tau} \left( \frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} - \rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Тъй като обемът  $\tau$  е произволен, подинтегралната функция трябва да е равна на нула. Освен това, като вземем предвид уравнението на непрекъснатостта (1.10), получаваме

$$(1.18) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}.$$

Това е уравнението за количеството на движението, записано в диференциална форма. То е еквивалентно на уравнението за количеството на движението (1.13), записано в интегрална форма. И двете уравнения — (1.13) и (1.18), са приложими за каква да е непрекъсната среда.

**Запазване на енергията.** Пълната енергия  $U$  на обема на движещ се флуид е равна на сумата от кинетичната енергия  $K$  и вътрешната енергия  $E$

$$U = K + E.$$

Кинетичната енергия на елемент с маса  $dm = \rho d\tau$ , движещ се със скорост  $\vec{v}$ , е равна на  $\frac{1}{2} \rho v^2 d\tau$ . Тогава за кинетичната енергия на флуид с обем  $\tau$  получаваме

$$K = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho v^2 d\tau.$$

Вътрешната енергия на крайния обем  $\tau$ , която представлява енергията на топлинното движение на молекулите на флуида, е равна на

$$\mathcal{E} = \int_{\tau} \rho E d\tau.$$

Тук  $E \rho d\tau$  е вътрешна енергия на елемента с маса  $dm = \rho d\tau$ . Изразът за  $E$  се счита за известен. По такъв начин за пълната енергия можем да запишем

$$U = \int_{\tau} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + E \right) d\tau.$$

Изменението на пълната енергия  $U$  на някаква маса флуид за интервал време от  $t_1$  до  $t_2$  се дава със сбора от работата на масовите сили  $A_{\tau}$ , работата на повърхностните сили  $A_s$ , притока на топлината през повърхността  $Q_s$  и притока на топлината  $Q_{\tau}$  от обемно разпределените източници на топлина

$$(1.19) \quad U(t_2) - U(t_1) = A_{\tau} + A_s + Q_s + Q_{\tau}.$$

С това се изразява законът за запазване на енергията на движещ се флуид с обем  $\tau$ . За да не въвеждаме механичен еквивалент на топлината, ще предполагаме, че количеството топлина и другите понятия, свързани с топлината, са изразени с механични единици.

Да запишем изразите на величините в дясната страна на (1.19) по-подробно. Работата на масовите сили, действащи на елемента  $dm$  за време  $dt$ , е равна на  $(\vec{F} \rho d\tau \cdot \vec{v}) dt$ . Оттук

$$A_{\tau} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\tau} \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) d\tau.$$

Работата на повърхностните сили, действащи на елемента  $dS$  от повърхността за време  $dt$ , е равна на  $(\vec{p}_n dS \cdot \vec{v}) dt$ . Оттук

$$A_s = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_s (\vec{p}_n \cdot \vec{v}) dS.$$

Да въведем понятието плътност на потока на топлина  $q_n$  през повърхност така, че  $q_n dS dt$  да бъде количеството топлина, което постъпва в обема през елемента от повърхността  $dS$  с нормала  $\vec{n}$  за време  $dt$ . За  $Q_s$  получаваме

$$Q_s = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_s q_n dS.$$

Да въведем също скорост на обемното отделяне на топлина  $\epsilon$  така, че  $\epsilon d\tau dt$  да бъде количеството топлина, постъпващо в обема  $d\tau$  за време  $dt$ . Тогава

$$Q_{\tau} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\tau} \epsilon d\tau.$$

Заместваме намерените изрази в (1.19), разделяме на  $\Delta t$  и устремяваме  $\Delta t$  към нула. Така получаваме *уравнението на енергията в интегрална форма*

$$(1.20) \quad \frac{dU}{dt} = \int_{\tau} \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) d\tau + \int_S (\vec{p}_n \cdot \vec{v}) dS + \int_S q_n dS + \int_{\tau} \epsilon d\tau.$$

За да запишем *уравнението на енергията в диференциална форма*, преобразуваме равенството (1.20) по такъв начин, че във всеки член от него да имаме интегриране по обема  $\tau$ . Съгласно формулата за диференциране на интеграл по подвижен обем (1.7) и уравнението за непрекъснатостта (1.10) може да запишем

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + E \right) d\tau = \int_{\tau} \left( \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho \frac{dE}{dt} \right) d\tau.$$

Преобразуваме израза за работата на повърхностните сили, като приложим формула (1.17) и след това преобразуваме повърхностния интеграл в обем:

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{p}_n \cdot \vec{v}) dS &= \int_S [(\vec{p}_x \cdot \vec{v}) \cos(n, x) + (\vec{p}_y \cdot \vec{v}) \cos(n, y) + \\ &+ (\vec{p}_z \cdot \vec{v}) \cos(n, z)] dS = \int_{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\vec{p}_x \cdot \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{p}_y \cdot \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{p}_z \cdot \vec{v}) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Сега уравнението (1.20) може да се запише в следния вид:

$$(1.21) \quad \int_{\tau} \left\{ \rho \frac{dE}{dt} - \vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} - \vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} - \vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \epsilon + \left[ \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \vec{v} \cdot \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] \right\} d\tau = \int_S q_n dS.$$

Лесно се вижда съгласно уравненията за движението на непрекъснати среди, че изразът в квадратните скоби е равен на нула.

Остава да се преобразува в обемен интеграл изразът за количеството топлина, постъпващо през повърхността на обема. Могат да се извършат разсъждения, подобни на тези, които из-

ползувахме за преобразуване на вектора на повърхностните сили в уравнението за количеството на движението.

Да приложим (1.21) към флуида, намиращ се в малък тетраедър с връх в началото на координатната система. Заменяйки изразите под знака на интеграла с техните средни величини с точност до величини от по-висок порядък по  $h$ , уравнение (1.21) се записва аналогично на (1.16) по следния начин:

$$\frac{1}{3} h \left[ \rho \frac{dE}{dt} - \vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} - \vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} - \vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \varepsilon \right] = \\ = q_n + q_{-x} \cos(n, x) + q_{-y} \cos(n, y) + q_{-z} \cos(n, z).$$

Устремяваме  $h$  към нула и отчитаме, че

$$q_x = -q_{-x}, \quad q_y = -q_{-y}, \quad q_z = -q_{-z}.$$

Получаваме връзка на потока топлина през площадката с нормала  $\vec{n}$  и потоците топлина през площадките с нормали  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ :

$$(1.22) \quad q_n = q_x \cos(n, x) + q_y \cos(n, y) + q_z \cos(n, z).$$

Това съотношение позволява да се приложи формулата на Гаус — Остроградски, за да се преобразува повърхностният интеграл в (1.21) в обемен интеграл

$$\int_S q_n dS = \int_\tau \operatorname{div} \vec{q} d\tau,$$

в който векторът  $\vec{q}$  с проекции  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  е векторът на потока на топлината. По такъв начин всички членове в (1.21) са преобразувани в обемни интеграли. Тъй като  $\tau$  е произволен обем, то от (1.21) се получава уравнението на енергията за движение на непрекъсната среда в диференциална форма

$$(1.23) \quad \rho \frac{dE}{dt} = \vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \operatorname{div} \vec{q} + \varepsilon.$$

За много изотропни среди е валиден законът за топлопроводността на Фурие

$$dq = k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt.$$

Тук  $dq$  е количеството топлина, влязло вътре в обема през площадката с нормала  $\vec{n}$  за време  $dt$ . Оттук следва, че за  $q_n$  имаме

$$q_n = k \frac{\partial T}{\partial n},$$

а за вектора на потока на топлината  $\vec{q}$  —

$$(1.24) \quad \vec{q} = k \operatorname{grad} T.$$

Коефициентът на топлопроводността  $k$  зависи главно от тем-

пературата. Както е известно, изотропност на една среда означава, че нейните свойства са еднакви във всички направления. В анизотропните среди коефициентът на топлопроводността зависи от ориентацията на площадките, през които минава топлината.

## 1 1.2. Тензор на напреженията и тензор на скоростта на деформацията

Уравненията за запазване на масата (1.10), количеството на движението (1.18) и енергията (1.23) описват различни течения на течности и газове, но те не са достатъчни за решаване на конкретни задачи. Това е така, защото броят на неизвестните е по-голям от броя на уравненията. Наред с хидродинамичните величини  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $E$ , които характеризират течението, в тези уравнения участвуват и други величини, в частност силите на повърхностното напрежение  $\vec{p}_n$  и потокът на топлината, минаващ през повърхността  $\vec{q}_n$ . Необходимо е да се въведат някои допълнителни съотношения, които описват физическите свойства на средата, чието движение се изучава въз основа на законите на механиката. С други думи, необходимо е да се построи теоретичен модел на изучаваната среда, който се дава от затворена система уравнения.

**Тензор на напреженията.** Напрегнатото състояние в произволна точка от полето на течението се определя чрез тройката вектори  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$ ,  $\vec{p}_z$ , които характеризират напреженията, действащи на трите площадки, перпендикулярни на координатните оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . На всеки от тези вектори съответствуват три проекции, например

$$(1.25) \quad \vec{p}_x = p_{xx}\vec{i} + p_{xy}\vec{j} + p_{xz}\vec{k}.$$

Координатната система с начало в дадената точка може да се избере по много начини и следователно може да се въведе безкрайно множество от тройки вектори, характеризиращи напрежението. Да изясним връзката между векторите на напреженията в две координатни системи.

За по-кратко записване на формулите координатните оси ще отбелязваме с индексите 1, 2, 3. Нека  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$ ,  $\vec{x}_3$  и  $\vec{y}_1$ ,  $\vec{y}_2$ ,  $\vec{y}_3$  са единичните вектори на двете координатни системи с общо начало, а  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$ ,  $\vec{p}_3$  и  $\vec{p}'_1$ ,  $\vec{p}'_2$ ,  $\vec{p}'_3$  са векторите на напреженията, действащи на площадки с нормали в посока на координатните оси.

Положението на едната координатна система относно другата се дава със следната таблица на косинус-директорите

$$\alpha_{ij} = \cos(\vec{y}_i, \vec{x}_j), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Да приложим формула (1.17) към всеки от шрихираните вектори на напреженията

$$(1.26) \quad \vec{p}'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \vec{p}_j, \quad i=1, 2, 3.$$

Тройка вектори  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ , които са определени във всяка декартова ортогонална координатна система по такъв начин, че при прехода от една координатна система в друга те се преобразуват съгласно формулите (1.26), се наричат **тензор**. Следователно векторите  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  образуват тензор — тензор на напреженията. Тъй като всеки от векторите  $\vec{p}_i$  се изразява чрез формулите (1.25) посредством трите си проекции  $p_{ij}$ , то в матрична форма този тензор има следния вид:

$$\Pi = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \|p_{ij}\|.$$

Тензорът на напреженията е симетричен. Това следва от уравнението на момента на количеството на движението в класическия случай, когато отсъствуват вътрешни моменти на количеството на движението. При тези условия уравнението за момента на количеството на движението се записва по следния начин:

$$(1.28) \quad \frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau = \int_V \vec{r} \times \vec{F} \rho d\tau + \int_S \vec{r} \times \vec{p}_n dS.$$

Повърхностният интеграл се преобразува в обемен:

$$\int_S \vec{r} \times \vec{p}_n dS = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\vec{r} \times \vec{p}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{r} \times \vec{p}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{r} \times \vec{p}_z) \right] d\tau.$$

При условие, че масата  $dm = \rho d\tau$  се запазва, уравнението (1.28) се записва така:

$$(1.29) \quad \int_V \vec{r} \times \left( \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) d\tau = \\ = \int_V \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{p}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{p}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{p}_z \right] d\tau.$$

Съгласно уравнението за количеството на движението (1.18) лявата страна на (1.29) е равна на нула. Тъй като обемът  $\tau$  е произволен, изразът под знака на интеграла в дясната страна на (1.29) също е равен на нула:

$$(1.30) \quad \vec{i} \times \vec{p}_x + \vec{j} \times \vec{p}_y + \vec{k} \times \vec{p}_z = 0.$$

От (1.30) следват равенствата

$$p_{xy} = p_{yx}, p_{xz} = p_{zx}, p_{yz} = p_{zy},$$

или в съкратен запис  $p_{ij} = p_{ji}$ .

С всеки симетричен тензор  $\Pi$  е свързана симетрична квадратична форма

$$(1.31) \quad 2\Phi = p_{ij} x_i x_j.$$

Където има повтарящи се индекси, се предполага, че има сумиране по тях.

Както е известно, съществува главна координатна система  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ , в която квадратичната форма (1.31) има най-прост вид

$$2\Phi = p_1 \bar{x}_1^2 + p_2 \bar{x}_2^2 + p_3 \bar{x}_3^2.$$

В тази координатна система тензорът на напреженията има само диагонални членове:

$$\Pi = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}.$$

Привеждането на квадратичната форма (1.31), записана в произволна ортогонална декартова координатна система, към координатната система с главни оси  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  се осъществява чрез неизродено линейно преобразуване. Величините  $p_1, p_2, p_3$ , които се наричат *главни напрежения*, се явяват корени на уравнението

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корените на уравнението са реални, тъй като тензорът на напреженията е симетричен. Това уравнение е еквивалентно на следното:

$$(1.32) \quad \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0.$$

Оттук следва, че величините  $I_1, I_2, I_3$  не се изменят при смяна на координатната система. По такъв начин получаваме три инварианта на тензора на напреженията: *линеен*  $I_1$ , *квадратен*  $I_2$  и *кубичен*  $I_3$ . Те могат да се изразят чрез коефициентите  $p_{ij}$  или чрез корените на уравнението (1.32):

$$(1.33) \quad \begin{aligned} I_1 &= p_{11} + p_{22} + p_{33} = p_1 + p_2 + p_3, \\ I_2 &= p_2 p_3 + p_1 p_2 + p_1 p_3, \\ I_3 &= p_1 p_2 p_3. \end{aligned}$$

**Тензор на скоростта на деформацията.** Да вземем малка флуидна частица и точка  $M(x_m, y_m, z_m)$  от нея. За всяка точка  $N(x, y, z)$ , която е безкрайно близка до  $M$ , може да се запише съгласно формулата на Тейлър следното линейно приближение:



$$(1.34) \quad \vec{v} = \vec{v}_m + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right)_m \xi + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right)_m \eta + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right)_m \zeta.$$

Тук  $\xi, \eta, \zeta$  са координатите на точка  $N$  относно точката  $M$ . Следователно

$$\vec{r} - \vec{r}_m = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k} = \vec{\rho}.$$

Да разгледаме матрицата от девет елемента

$$\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Тогава (1.34) може да се запише по следния начин:

$$\vec{v} - \vec{v}_M = \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \right) \vec{\rho}.$$

Полученото равенство не зависи от координатната система, затова във всяка координатна система на вектора  $\vec{\rho}$  съответствува векторът  $\vec{v} - \vec{v}_M$ . Това свойство на равенството е необходимо и достатъчно условие, за да образува матрицата  $\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \right)$  тензор.

Да преобразуваме (1.34) към вида

$$(1.35) \quad \vec{v} = \vec{v}_M + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} + \text{grad } F.$$

Поради линейността на (1.34) относно  $\xi, \eta, \zeta$  функцията  $F$  трябва да бъде квадратна по отношение на променливите, т. е.

$$2F = \varepsilon_{xx} \xi^2 + \varepsilon_{yy} \eta^2 + \varepsilon_{zz} \zeta^2 + 2\varepsilon_{xy} \xi\eta + 2\varepsilon_{yz} \eta\zeta + 2\varepsilon_{zx} \zeta\xi.$$

Да проектираме (1.35) върху координатните оси:

$$(1.36) \quad \begin{aligned} u - u_M &= \varepsilon_{xx} \xi + \varepsilon_{xy} \eta + \varepsilon_{xz} \zeta + (\Omega_y \zeta - \Omega_z \eta), \\ v - v_M &= \varepsilon_{yx} \xi + \varepsilon_{yy} \eta + \varepsilon_{yz} \zeta + (\Omega_z \xi - \Omega_x \zeta), \\ w - w_M &= \varepsilon_{zx} \xi + \varepsilon_{zy} \eta + \varepsilon_{zz} \zeta + (\Omega_x \eta - \Omega_y \xi). \end{aligned}$$

Като сравним (1.36) с (1.34), намираме коефициентите на квадратичната форма  $F$  и проекциите на вектора  $\vec{\Omega}$ :

$$(1.37) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \Omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

По този начин тези величини се определят еднозначно. Да анализираме смисъла на формула (1.35). Предварително ще отбележим, че за абсолютно твърдо тяло  $\vec{v} = \vec{v}_M + \vec{\Omega}_T \times \vec{r}$ , където  $\vec{v}_M$  е скоростта на полюса  $M$ ,  $\vec{\Omega}_T$  е векторът на моментната ъглова скорост, с която твърдото тяло се върти относно моментната ос, минаваща през точката  $M$ . От (1.35) следва, че скоростта в произволна точка от флуида се получава като сбор от скоростта на полюса  $M$ , скоростта  $\vec{\Omega}$  на тази точка при въртателното движение на втвърдената частица около моментната ос, минаваща през точката  $M$ , и скоростта на деформация  $\vec{v}_g$ . Ъгловата скорост на въртящата се частица е равна на

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v},$$

а скоростта на деформация на частицата —

$$\vec{v}_g = \operatorname{grad} F.$$

Като използваме (1.37), тензорът  $\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \right)$  може да се представи във вид на сума от симетричен и антисиметричен тензор:

$$(1.38) \quad \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \right) = \dot{S} + T,$$

$$\dot{S} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \|\varepsilon_{ik}\|,$$

$$T = \begin{vmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{vmatrix}.$$

Симетричният тензор  $\dot{S}$  определя деформацията на флуидните частици и се нарича *тензор на скоростта на деформацията*. С този тензор е свързана симетрична квадратична форма  $F(\xi, \eta, \zeta)$ . Както при тензора на напреженията, и тук съществуват главни координатни оси  $\vec{\xi}$ ,  $\vec{\eta}$ ,  $\vec{\zeta}$ , за които квадратичната форма има най-прост вид

$$2F = \varepsilon_1 \bar{\xi}^2 + \varepsilon_2 \bar{\eta}^2 + \varepsilon_3 \bar{\zeta}^2$$

и тензорът на скоростта на деформацията се привежда във вида

$$\dot{S} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Преходът от произволна координатна система в координатна система с главни оси се извършва посредством неизродено линейно преобразуване. Главните скорости на деформацията  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  се намират като корени на векторното уравнение

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Има три инварианта на тензора на скоростта на деформацията — *линеен*  $J_1$ , *квадратен*  $J_2$  и *кубичен*  $J_3$ . По-специално за линейния инвариант получаваме

$$(1.39) \quad J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \operatorname{div} \vec{v}.$$

**Връзка между тензора на напреженията и тензора на скоростта на деформацията.** Тензорите  $\Pi$  и  $\dot{S}$  характеризират напрегнатото и деформираното състояние в дадена точка от непрекъснатата среда. За всяка конкретна среда трябва да бъде намерена връзка между тези тензори. В случая на вискозен флуид тази връзка се дава от закона на Навие—Стокс.

В основата на модела на вискозните флуиди са заложили следните предположения:

- 1) ако флуидът е в покой или се движи като твърдо тяло, в него съществуват само нормални напрежения;
- 2) флуидът е изотропен, т. е. свойствата му са еднакви във всички направления;
- 3) компонентите на тензора на напреженията са линейни функции на компонентите на тензора на скоростта на деформацията.

Най-общият вид на връзката между  $\Pi$  и  $\dot{S}$ , която удовлетворява тези условия, е

$$(1.40) \quad \Pi = 2\mu\dot{S} + b\mathcal{E}.$$

Тук  $\mathcal{E}$  е единичният тензор,  $\mu$  и  $b$  — скалярни величини. Ако няма движение,  $\Pi = b\mathcal{E}$ . Това означава, че в този случай във флуида действително съществуват само нормални напрежения, които са еднакви поради изотропността. Тъй като свойството вискозност се проявява само при движение, естествено е да считаме, че напрегнатото състояние в неподвижен вискозен флуид е същото, каквото в неподвижен идеален флуид, т. е. на всяка площадка по нормалата към нея ще действа хидростатичното на-

лягане  $p$ . Величината  $p$  се изразява посредством първата инвариантна на тензора  $\Pi$ :

$$p = -\frac{1}{3} (p_{11} + p_{22} + p_{33}).$$

Ще обобщим това съотношение, като въведем понятието *налягане във вискозен флуид* чрез формулата

$$p = -\frac{1}{3} (p_{11} + p_{22} + p_{33}) + \zeta \operatorname{div} \vec{v}.$$

От равенство (1.40) следва, че инвариантите на тензорите от двете му страни на равенството са равни. Използвайки формулите (1.33) и (1.39), приравняваме линейните инварианти на тези тензори

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = 2\mu \operatorname{div} \vec{v} + 3b.$$

Оттук намираме

$$b = \frac{1}{3} (p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}.$$

Като изразим  $b$  чрез налягането  $p$ , от (1.40) получаваме следния закон на вискозен флуид (М. Навие, 1843 г.; Стокс, 1845 г.):

$$(1.41) \quad \Pi = -p\mathcal{E} + 2\mu\dot{S} + \left[ \left( \zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] \mathcal{E}.$$

Величината  $\mu$  се нарича *коэффициент на динамична вискозност*. Коэффициентът на динамичната вискозност характеризира вътрешното триене между слоевете на флуида при тяхното относително движение. Смисълът на този коэффициент се вижда ясно от най-простия пример за слоесто течение  $u = U \frac{y}{h}$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , в който възниква сила на триене

$$p_{xy} = \mu \frac{U}{h}.$$

Този израз за първи път е бил предложен от Нютон. Поради това формула (1.41) се нарича *обобщен закон за вискозността на Нютон*, а флуидите, които го удовлетворяват, се наричат *нютониви*.

Коэффициентът  $\zeta$  характеризира обемната вискозност, която се проявява само в свиваеми флуиди.

Коэффициентите  $\mu$  и  $\zeta$  са винаги положителни — могат да бъдат функции на температурата или постоянни за дадена среда. При температура  $20^\circ\text{C}$  стойността на  $\mu$  за въздуха и водата е  $0,01 \text{ г/см. сек}$  и  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ г/см. сек}$ . Наред с  $\mu$  се използва и *кинематичен коэффициент на вискозността*  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Съответните стойности на  $\nu$  са равни на  $0,01 \text{ см}^2/\text{сек}$  и  $0,15 \text{ см}^2/\text{сек}$ . Стойностите

на  $\zeta$  са различни от нула само в особени случаи. В рамките на класическата хидродинамика ефектът на втората вискозност обикновено не се отчита. Да въведем означението  $\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu$ ; тогава от (1.41) получаваме следните уравнения за модела на вискозните флуиди, които дават връзката между компонентите на напреженията и тензора на скоростта на деформация:

$$(1.42) \quad \begin{aligned} p_{ij} &= -p + 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \operatorname{div} \vec{v}, \\ p_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Да запишем тези уравнения в ортогонална декартова координатна система:

$$(1.43) \quad \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{v}, \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \vec{v}, \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \vec{v}, \\ p_{xy} &= p_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ p_{zx} &= p_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p_{yz} &= p_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

В приложението е дадена връзката между тензора на напреженията и тензора на скоростта на деформацията в цилиндрични и сферични координати.

### 1.1.3. Уравнение на състоянието на средата

В уравнение (1.41), което свързва напрежението и деформацията, участва нова величина — налягането  $p$ , а също и коефициентите  $\mu$  и  $\lambda$ , които в общия случай не са постоянни. За затваряне на системата уравнения, описващи движението на флуидите, се използват и съотношения, характеризиращи термодинамичната същност на изучаваната среда, които се наричат *уравнения на състоянието*.

В общия случай на свиваема среда плътността е свързана с налягането и температурата, а уравнението на състоянието е съотношение от вида

$$(1.44) \quad f(p, \rho, T) = 0.$$

За вътрешната енергия  $E$  се предполага, че тя е напълно определена от параметрите на състоянието  $p$  и  $T$ :

$$E = E(p, T).$$

Най-характерният частен случай на свиваема среда е свършеният газ. *Свършен газ се нарича онзи, на който вътрешната енергия зависи само от температурата и уравнението на състоянието е уравнението на Клапейрон*

$$(1.45) \quad p = R\rho T.$$

Това уравнение е уравнение на състоянието за много реални газове, когато налягането  $p$  не е много голямо и температурата  $T$  не е много ниска. Константата  $R$  може да се представи във вида  $R = km^{-1}$ , където  $k$  е константата на Болцман, която е еднаква за всички газове, а  $m$  е средната маса молекули, изразена в грамове.

За свършените газове е изпълнено съотношението

$$E = \int c_v dT.$$

Величината  $c_v$  се нарича *специфична топлиемост при постоянен обем*. Обикновено се приема  $c_v = \text{const}$ , което за реални газове е изпълнено до много големи стойности на  $T$ . При това условие

$$(1.46) \quad E = c_v T + \text{const}.$$

Наред с  $c_v$  се въвежда величината  $c_p$ , която се нарича *специфична топлиемост при постоянно налягане*

$$c_p = c_v + R,$$

и величината  $h$ , наречена *енталпия*,

$$(1.47) \quad h = c_p T + \text{const}.$$

Зависимостта на коефициента на вискозност при газовете  $\mu$  от температурата най-често се изразява чрез формулата на Сатерленд

$$\mu = \frac{\text{const}}{T + T_0} T^{3/2}, \quad T_0 \approx 114^\circ \text{K}$$

или с приближената формула

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^n.$$

В случая на несвиваем нетоплопроводен флуид допълнителните съотношения са изключително прости —

$$\rho = \text{const}, \quad \mu = \text{const},$$

и вътрешната енергия е линейна функция на температурата:

$$E = cT + \text{const}.$$

### 1.1.4. Модели на флуидни среди

Да се построи модел на непрекъснатата среда, означава да се получи затворена система уравнения, която описва движенията и. **Моделът на вискозните топлопроводни флуиди включва следните съотношения:**

— **уравнение на непрекъснатостта** (1.10);

— **уравнение за движението на непрекъснатата среда**, записано в напрежения —

$$(1.48) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \Pi;$$

— **уравнение на енергията** (1.23);

— **закона на Навие — Стокс** (1.42), показващ връзката между тензора на напреженията  $\Pi$  и тензора на скоростта на деформацията;

— **закона за топлопроводността на Фурие** (1.24), който изразява връзката на топлинния поток  $\vec{q}$  с температурата  $T$ ;

— **уравнение на състоянието** (1.41);

— **изразяване на  $E$  чрез параметрите на състоянието**;

— **изрази за  $\mu$ ,  $k$ ,  $\lambda$** .

Масовите сили  $\rho \vec{F}$  и интензивността на вътрешните източници на топлина  $\epsilon$  са външни фактори и те трябва да бъдат зададени. Ще приемем, че  $\epsilon = 0$ . Посочените по-горе уравнения са записани във векторна форма. Те могат да бъдат записани в скаларен вид във всяка ортогонална координатна система, като се използват съответните изрази за векторните операции.

**Уравнения на Навие — Стокс.** Ако обединим уравнението за движението на непрекъснати среди (1.48) с обобщения закон на Нютон, т. е. ако заместим тензора на напреженията, изразен чрез тензора на скоростта на деформацията, ще получим уравнението за движение, което описва движението на частния вид среди — вискозните нютонови флуиди. Полученото по този начин векторно уравнение се нарича **уравнение на Навие — Стокс (в скаларна форма — уравнения на Навие — Стокс)**.

Да запишем уравненията на Навие — Стокс в декартова ортогонална координатна система  $Oxyz$ . Изразите за компонентите на тензора на напреженията се дават с формулите (1.43) и изразяват обобщения закон на Нютон в декартова координатна система. Като ги заместим в уравненията за движението, получаваме

$$(1.49) \quad \rho \frac{du}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial v}{\partial x} \Big) \Big] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \\
\rho \frac{dw}{dt} = & \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right].
\end{aligned}$$

Ако флуидът е несвиваем и  $\mu = \text{const}$ , системата (1.49) се опростява и във векторен вид се записва така:

$$(1.50) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}.$$

Пълната производна по времето се изчислява по формула (1.1).

Уравненията (1.49) и (1.50) най-напред са били изведени въз основа на теорията на молекулната структура на средата и междумолекулните сили (М. Навие, 1872 г.; С. Д. Поасон, 1831 г.). Въз основа на феноменологични представи за линейната връзка между тензора на напреженията и тензора на скоростта на деформацията, която обобщава закона на Нютон, тези уравнения са били изведени от Б. Сен—Венан през 1843 г. и Г. Г. Стокс през 1845 г.

Системата уравнения за несвиваем вискозен флуид в цилиндрична и сферична координатна система, а също и в специална ортогонална координатна система, която е свързана с гладката повърхност на обтекаемото тяло, е дадена в приложенията.

Да се възползуваме сега от обобщения закон на Нютон (1.43), за да изключим  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$ ,  $\vec{p}_z$  от уравнението на енергията:

$$\begin{aligned}
(1.51) \quad \vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = & -p \operatorname{div} \vec{v} + \Phi, \\
\Phi = & \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2.
\end{aligned}$$

Функцията  $\Phi$ , участваща в равенството, се нарича *дисипативна функция*. Очевидно  $\Phi \geq 0$  при  $\mu \geq 0$ .

Уравнението на енергията (1.23) се записва в следната еквивалентна форма:

$$(1.52) \quad \rho \frac{dE}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \Phi + \epsilon.$$

Да разгледаме два най-често използвани модела, които са частни случаи от пълната система уравнения за флуидни среди.



**Вискозен свършен газ.** Моделът на вискозния свършен газ включва уравнения на Навие — Стокс (1.49), енергията (1.52), непрекъснатостта (1.10), а също и следните съотношения:

$$p = R \rho T,$$

$$E = c_v T + \text{const},$$

$$\mu = \mu(T), \quad k = k(T).$$

Това е затворена система уравнения за неизвестните величини  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ .

С помощта на съотношенията за свършен газ (1.46) и (1.47) уравнението на енергията (1.52) може да се преобразува по следния начин:

$$(1.53) \quad \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = \text{div} (k \text{ grad } T) + \Phi + \varepsilon.$$

Наистина, тъй като е в сила съотношението

$$p \text{ div } \vec{v} = -\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{dp}{dt} + \rho \frac{dT}{dt},$$

то може да се запише

$$\rho \frac{dE}{dt} + p \text{ div } \vec{v} = \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt}.$$

**Вискозна несвиваема течност.** В случая на несвиваема течност  $\rho = \text{const}$ . Ако предположим, че  $\mu = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ ,  $E = c_v T$ , получава се следната затворена система уравнения за  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $T$ :

$$(1.54) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v},$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0;$$

$$(1.55) \quad c_v \rho \frac{dT}{dt} = k \Delta T + \Phi + \varepsilon.$$

Компонентите на скоростта и налягането се определят от уравненията (1.54), а температурата — от (1.55).

Ако  $\mu = \mu(T)$ ,  $k = k(T)$ , то полето на течението ще се определи от уравненията (1.49), а разпределението на температурата от уравнението на енергията:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi + \varepsilon.$$

Преди да разгледаме конкретни задачи, ще посочим някои общи свойства на флуидните течения, които следват от решенията на системата диференциални уравнения на съответния модел.

### 1.2.1. Дисипация на механичната енергия

Да разгледаме обем  $\tau$  от потока на вискозния флуид, който съдържа едни и същи частици и следователно се премества заедно с флуида съгласно т. 1 от § 1.1. Пълната работа на масовите и повърхностните сили, които действуват на отделения обем за време  $dt$ , е равна на

$$A_s + A_\tau = \int_{\tau} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} d\tau \cdot dt + \int_S \vec{p}_n \cdot \vec{v} dS dt.$$

По формула (1.5) повърхностният интеграл се преобразува в обем. От уравнението за запазване количеството на движението (1.18)

$$\left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Тогава за работата на повърхностните сили намираме

$$A_s = \int_{\tau} \left( \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \right) d\tau dt + \int_{\tau} \Phi d\tau dt.$$

За пълната работа на масовите и повърхностните сили окончателно получаваме

$$A_s + A_\tau = \int_{\tau} \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau dt + dt \int_{\tau} \Phi d\tau = dK + dt \int_{\tau} \Phi d\tau.$$

Тук дисипативната функция  $\Phi$  се определя съгласно формулата (1.51). Тъй като  $\Phi \geq 0$ , то работата, която извършват силите, действувачи на флуидния обем, отива само частично за увеличаване на кинетичната енергия  $K$ . Останалата част от механичната енергия се губи, превръщайки се в топлина, т. е. дисипира. Функцията  $\Phi$  представлява количеството енергия, която дисипира в единица обем за единица време.

С дисипацията на механичната енергия е свързано едно важно свойство на вискозните течения — тяхната необратимост във времето.

### 1.2.2. Пренасяне на завихреността

Ако предположим, че полето на външните масови сили е потенциално,

$$\vec{F} = -\text{grad } \varphi_m,$$

тогава векторното уравнение на Навие — Стокс (1.50) се записва в следния вид:

$$(1.56) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p + \rho \varphi_m) + \mu \Delta \vec{v}.$$

Да разгледаме вектора вихър

$$(1.57) \quad \vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v}.$$

Прилагайки операцията  $\text{rot}$  към двете страни на (1.57) и вземайки предвид уравнението на непрекъснатостта, получаваме

$$\Delta \vec{v} = -\text{rot } \vec{\omega}.$$

Тук използвахме векторното равенство

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}.$$

Като преобразуваме конвективните членове в (1.56), уравнението на Навие — Стокс се записва във формата

$$(1.58) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} = -\nabla \left( \frac{1}{\rho} p + \varphi_m + \frac{1}{2} v^2 \right) - \nu \nabla \times \vec{\omega},$$

известна като уравнение на Громеко — Ламб.

Прилагайки операцията  $\text{rot}$  към двете страни на (1.50), получаваме уравнението на завихреността (обобщеното уравнение на Хелмхолц):

$$(1.59) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega}.$$

При извеждането на (1.59) използвахме следното векторно тъждество:

$$\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v} (\nabla \cdot \vec{\omega}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v},$$

в което първият и вторият член се анулират — първият поради уравнението на непрекъснатостта, а вторият — поради това, че

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot \text{rot } \vec{v} = 0.$$

Уравнението (1.59) може да се запише и по следния начин:

$$(1.60) \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega}.$$

Едно частно решение на това уравнение е  $\vec{\omega} = 0$ . В този случай може да се въведе потенциал  $\varphi$  така, че

$$(1.61) \quad \vec{v} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi.$$

Тогава от уравнението на непрекъснатостта получаваме, че функцията  $\varphi$  удовлетворява уравнението

$$(1.62) \quad \Delta\varphi=0.$$

По такъв начин потенциалните течения удовлетворяват уравненията за движението на вискозни флуиди, но те представляват много тесен клас от решенията на тези уравнения.

**Циркулация на скоростта по затворен контур.** Понятието циркулация на скоростта по затворен контур  $\Gamma$  се дефинира с помощта на криволинейния интеграл

$$(1.63) \quad \Gamma=\int_{\Gamma}\vec{v}\cdot d\vec{r}.$$

Като приложим теоремата на Стокс, която дава връзката между криволинейните интеграли по затворена крива и интегралите по повърхности, ограничени от тази крива, получаваме

$$\int_{\Gamma}\vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_S(\operatorname{rot}\vec{A})_n dS.$$

Следователно за циркулацията  $\Gamma$  имаме

$$(1.64) \quad \Gamma=\int_S(\operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n})dS=\int_S\omega_n dS.$$

Това равенство показва, че циркулацията  $\Gamma$  е равна на потока на вихъра през повърхността, която е ограничена от кривата  $\Gamma$ .

Диференцирайки (1.63) относно времето  $t$ , получаваме съотношението

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\int_{\Gamma}\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}+\int_{\Gamma}\vec{v}\cdot d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\int_{\Gamma}\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}.$$

Тук е използвано равенството

$$\int_{\Gamma}\vec{v}\cdot d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\int_{\Gamma}\vec{v}\cdot d\vec{v}=0.$$

Като заместим ускорението на частиците  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  от уравнението на Навие — Стокс (1.56) в горното съотношение, намираме

$$(1.65) \quad \frac{d\Gamma}{dt}=\int_{\Gamma}\left[-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\varphi_m\right)+\nu\Delta\vec{v}\right]d\vec{r}=-\nu\int_{\Gamma}(\nabla\times\vec{\omega})d\vec{r}$$

От това уравнение следва, че циркулацията на скоростта по затворен контур, който се движи заедно с флуида, се изменя само поради действието на вискозността. Скоростта на изменението на циркулацията във вискозен флуид зависи от завихреността в

околността на разглеждания контур. Ако в началния момент течността е в покой, така че  $\vec{\omega}=0$ , то циркулацията в началния момент е равна на нула по всеки затворен контур. При  $t>0$  циркулация може да възникне само вследствие на дифузия през границата.

**Интеграли на уравненията на идеален флуид.** При идеален (невискозен) флуид  $\mu=0$ ,  $k=0$ , уравненията на Навие — Стокс преминават в уравнения на Ойлер:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p.$$

Тези уравнения са в сила и за идеален газ. Както следва от (1.58), уравненията на Ойлер могат да се преобразуват във формата на Громеко — Ламб:

$$(1.66) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (v^2) + \vec{\omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}.$$

Нека течението да е стационарно и външните сили да са потенциални, т. е.  $F = -\nabla \varphi_m$ . Като проектираме (1.66) по направление на скоростта, получаваме формулата

$$(1.67) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial l} (v^2) = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}.$$

В тази формула  $l$  се измерва по направление на токовите линии, допирателната към които във всяка точка съвпада с направление на скоростта.

Да предположим още, че в направление на токовите линии е изпълнено условието за баротропност, т. е. плътността е известна функция на налягането. Тогава (1.67) може да бъде интегрирано по направление на токовите линии, вследствие на което получаваме уравнение, наречено *интеграл на Бернули*:

$$(1.68) \quad \frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \varphi_m = C.$$

Тук константата  $C$  зависи от токовите линии.

Предположението за баротропност очевидно е изпълнено за несвиваема течност. То е в сила и за съвършен идеален газ при адиабатични процеси, т. е. при  $\varepsilon=0$ . Наистина, ако изразим енталпията  $h$  чрез налягането  $p$  и плътността  $\rho$ ,

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v},$$

тогава от уравнението на енергията (1.53) получаваме

$$-\gamma \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{dp}{dt} = 0.$$

При стационарни течения това уравнение приема вида

$$\vec{v} \cdot \nabla (\rho \rho^{-\gamma}) = 0.$$

Оттук следва, че върху токовите линии

$$\rho = B \rho^\gamma.$$

Това съотношение се нарича *уравнение на адиабатата*. В него константата  $B$  може да зависи от токовите линии.

Нека флуидното течение е нестационарно. Ще предположим, че течението е потенциално и баротропно  $\rho = \rho(p)$ . Тогава, ако външните сили са потенциални, съгласно (1.61) уравнението (1.66) се записва по следния начин:

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi_m + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0.$$

Оттук получаваме уравнение, което е изпълнено във всяка точка от флуидното течение и се нарича *интеграл на Коши — Лагранж*:

$$(1.69) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \varphi_m = f(t).$$

Това уравнение съдържа произволна функция  $f(t)$ . Интегралите (1.68) и (1.69) съвпадат, когато течението на идеалния флуид е стационарно и потенциално. Константата  $C$  в този случай не зависи от токовите линии.

### § 1.3. НАЧАЛНО-ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ

Движенията на вискозните несвиваеми флуиди се описват от уравненията на Навие — Стокс и уравнението на непрекъснатостта. Тези уравнения имат безбройно много частни решения. Ако е известно някакво частно решение, може да се направи опит да се определи онова течение, което му съответствува. При такъв подход може да се получи полезна информация, но не винаги на дадено частно решение съответствува реално флуидно течение. Основният подход в механиката на флуидите е друг. Той се състои в това, да се намерят онези решения, които съответствуват на разглежданото течение. Затова е необходимо да се зададат начални и гранични условия, които трябва да се удовлетворяват от търсеното решение. Тези условия дават допълнителна информация, която отразява характера на механичните процеси на границата  $S_T$  на областта  $G$ , заета от флуида, а също и началното състояние на потока.

**Външна задача на хидродинамиката.** Един от основните проблеми в механиката на флуидите е свързан с *обтичането на тела с крайни размери от однороден неограничен в пространството поток*. Нека  $S_T$  е повърхността на тялото,  $G$  — външната към повърхността на тялото област, която съдържа безкрайно от-

далечена точка. Необходимо е да се намери решение на системата (1.54) в  $G$ , съответстващо на течението, което с отдалечаване от тялото преминава в равномерен поток със скорост  $U_\infty$  по направление на оста  $x$ .

Условието за преход в равномерен поток може да се изрази със съотношението

$$(1.70) \quad \vec{v} \rightarrow U_\infty \vec{i}, \quad r \rightarrow \infty.$$

На повърхността на тялото обикновено се приема условието за полепване, съгласно което скоростта на частиците, граничещи с повърхността на тялото, е равна на скоростта  $\vec{v}_T$  на съответните точки от повърхността:

$$(1.71) \quad \vec{v} = \vec{v}_T, \quad \vec{r} \in S_T.$$

Ако твърдото тяло е в покой относно избраната координатна система, то условието за полепване приема простия вид

$$(1.72) \quad \vec{v} = 0, \quad \vec{r} \in S_T.$$

Това условие изисква да са равни на нула както нормалната, така и тангенциалната компонента на скоростта.

По-сложни условия на повърхността на тялото се налага да се поставят, когато повърхността е проницаема и през нея минава поток от флуида, когато се допуска хлъзгане на флуидните частици или когато повърхността се деформира под въздействието на потока.

Уравненията на Навие — Стокс съдържат производни по времето на търсените величини, поради което в общия случай трябва да бъдат зададени и началните разпределения на тези величини за момента  $t=0$  във всички вътрешни за областта  $G$  точки:

$$(1.73) \quad \vec{v} = \vec{v}_0(\vec{r}), \quad \vec{r} \in G, \quad t=0.$$

Съвкупността от уравненията (1.54), граничните условия (1.70), (1.72) и началните условия (1.73) дават *нестационарната гранична задача (задача на Коши)*, която съответствува на *обтичане на тела от несвиваем вискозен флуид*. Необходимо е да се намери решението

$$\vec{v}, p \quad \text{за } \vec{r} \in G, \quad t > 0.$$

Стационарното (установено) обтичане, при което полето на течението не зависи от времето, е частен случай. Съответното решение се определя напълно само от граничните условия (1.70) и (1.72).

Условието (1.70) има асимптотичен характер и практически е трудно да се използва непосредствено. Това е така, защото обикновено решението не се получава в аналитичен вид и се налага

то да се търси посредством числени методи. Пресмятанията за хидродинамичните величини в полето на течението могат да се извършат само в ограничени области, затова се въвежда условна граница  $S_B$ , която е част от  $G$ . Върху  $S_B$  се поставят условия от нестандартен вид. В общия случай смисълът на тези условия се състои в това, търсената функция и някои нейни производни по нормалата към  $S_B$ , изчислени от едната и другата страна на границата, да са непрекъснати. За да се формулират такива условия, трябва да се направят някои предположения за решението в областта, съдържаща безкрайно отдалечената точка, или да се получи асимптотично решение при  $r \rightarrow \infty$ . Конкретният избор на условията от този вид зависи от разглежданата задача и техният целесъобразен избор определя в значителна степен възможността да се реши задачата.

**Вътрешна задача.** При вътрешните задачи областта  $G$ , в която се решава задачата, не съдържа безкрайно отдалечената точка. Ако крайната област  $G$  е ограничена от твърда повърхност  $S_T$ , трябва да се решат уравненията (1.54) в областта  $G$  при следните ограничителни условия:

$$(1.74) \quad \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_T, & \vec{r} \in S_T, & t > 0, \\ \vec{v} &= \vec{v}_0(\vec{r}), & \vec{r} \in G, & t = 0. \end{aligned}$$

Важен случай са също теченията, при които областта  $G$  е ограничена от твърда повърхност само частично, например теченията в канал. Тук към условието за полепване върху твърдите граници трябва да се добавят и условията на входа и изхода на канала. Ако каналът има голяма дължина, то за гранично условие на изхода може да се използва асимптотичното решение при  $x \rightarrow \infty$ . При практическите разчети в подобни задачи често се използват така наречените „мекки“ условия, които се поставят на крайно разстояние по  $x$  и само приближено отразяват асимптотичния характер на решението.

**Условия на междуфазова граница.** Ако в потока има повърхност  $S_p$ , която разделя два флуида с различни физически свойства, то при изследването на съответната хидродинамична задача търсим решения, които са непрекъснати в областите, разположени от двете страни на междуфазовата граница. На самата разделителна повърхност се задават условия за съгласуване на решенията:

$$(1.75) \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2,$$

$$(1.76) \quad \vec{p}_{n1} = \vec{p}_{n2}, \quad \vec{r} \in S_p.$$

Кинематичното условие (1.75) изразява равенство на скоростите на допиращите се частици от двата флуида; динамичното усло-



вие (1.76) изразява равенство на напреженията, действащи от двете страни на междупазовата граница. Това условие може да се изведе, ако се приложи законът за запазване на количеството на движението (1.14) към малък обем, който включва разделителната повърхност, както беше направено при извода на (1.15). За определеност можем да считаме, че нормалата  $\vec{n}$  в (1.76) е насочена към първия флуид.

В частния случай на свободна повърхност условието (1.75) не може да бъде удовлетворено и се изпуска. В динамичното условие може да се зададе постоянно налягане върху свободната повърхност

$$(1.77) \quad \vec{p}_{n1} = p_2 \vec{n}, \quad \vec{r} \in S_p.$$

В някои задачи важно значение има повърхностното напрежение, което става причина за скок на нормалните сили към междупазовата граница. В този случай

$$(1.78) \quad \vec{p}_{n1} = \vec{p}_{n2} - \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \vec{n}, \quad \vec{r} \in S_p.$$

Тук скокът на нормалните сили се определя от формулата на Лаплас, където  $\sigma$  е коефициентът на повърхностното напрежение, а  $R_1$  и  $R_2$  са главните радиуси на кривината в дадена точка от повърхността.

Формата на разделителната повърхност не е известна и нейното определяне е една от целите на решението. Нека междупазовата граница е зададена неявно с уравнението

$$(1.79) \quad F(x, y, z, t) = 0.$$

Тъй като във всеки момент от времето няма поток на флуидите през междупазовата граница и скоростите на намиращите се върху нея флуидни частици съвпадат със скоростите на преместването на съответните точки от границата, като намерим пълната производна на лявата страна на (1.79), получаваме диференциално уравнение за определяне на  $F$ :

$$(1.80) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \vec{r} \in F.$$

### 1.3.1. Двумерни течения на хомогенен флуид

Да разгледаме по-подробно постановката на задачите при двумерни течения на еднороден несвиваем флуид, в който едната компонента на скоростта е равна на нула, а другите две компоненти и налягането зависят само от две пространствени координати. В този случай е възможно да се въведе токова функция и по този начин да се намали броят на търсените величини.

В случая на плоско паралелно течение уравнението на непрекъснатостта

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

се интегрира с помощта на токовата функция  $\Psi(x, y)$ , която се дефинира от съотношенията

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

От това определение може да се направи изводът, че при стационарните течения траекторите на флуидните частици съвпадат с токовите линии  $\Psi = \text{const}$ .

Векторът вихър в двумерните течения има само една ненулева компонента

$$\omega_z = \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Като заместим изразите за скоростта чрез  $\Psi$ , получаваме уравнението

$$(1.81) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega.$$

Уравнението за завихрянето  $\omega$  следва от (1.59):

$$(1.82) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right).$$

По такъв начин получаваме затворена система (1.81), (1.82) за функциите  $\Psi(x, y, t)$ ,  $\omega(x, y, t)$  вместо системата (1.54) за функциите  $u, v, p$ .

За да формулираме гранична задача, необходимо е да изразим граничните условия чрез функциите  $\Psi$ ,  $\omega$  и техните производни. Например в случая на напречно обтичане на цилиндрично тяло от равномерен неограничен поток уравненията (1.81), (1.82) трябва да се решават със следните гранични условия:

$$(1.83) \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \vec{r} \in S_r, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow U_\infty, \quad r \rightarrow \infty.$$

В цилиндрична координатна система  $(r, \varphi, z)$  от уравнението на непрекъснатостта и израз за завихреността следва

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = 0, \\ \omega_z = \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Аналогично на изложеното по-горе, тук се дава следната формулировка за плоско двумерно вискозно течение на несвиваем флуид в променливи  $\Psi, \omega$ :

$$(1.84) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = -\omega,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Накрая за двумерно течение с осова симетрия в сферични координати получаваме уравненията

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v)}{\partial \theta} = 0,$$

$$\omega_{\varphi} = \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Оттук извеждаме уравненията за  $\Psi$  и  $\omega$ :

$$(1.85) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -r \sin \theta \omega = D^2 \Psi,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} v \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \omega (u \sin \theta + v \cos \theta) = \nu \left( \Delta \omega - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \omega \right),$$

$$\Delta \omega = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \right],$$

$$u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Формулираните задачи във всеки от разглежданите случаи е възможно да се сведат към едно уравнение за токовата функция. За целта трябва да се изключи  $\omega$ , като се използва изразяването му чрез  $\Psi$  в съответните координати. Например в сферична координатна система

$$(1.86) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu D^2 \right) (D^2 \Psi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\Psi, D^2 \Psi)}{\partial (r, \theta)} - \frac{2 D^2 \Psi}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial (\Psi, r \sin \theta)}{\partial (r, \theta)},$$

където

$$D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

### 1.3.2. Двумерно течение с междупазова граница

Да разгледаме постановката на гранична задача за плоско двуфазово течение на вискозни несвиваеми флуиди. Да предположим, че междупазовата граница може да се запише чрез уравнението

$$y = h(x, z, t).$$

Тогава от уравнението (1.80) получаваме уравнение за  $h$

$$(1.87) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + w \frac{\partial h}{\partial z} = v, \quad \vec{r} \in h.$$

Нека  $n_i$  са косинус-директорите на нормалата към повърхността, насочена в посока към първата течност, а  $\sigma_{ik}$  са компонентите на тензора на вискозните напрежения

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma_{ik}.$$

Тогава условието върху разделителната повърхност (1.78) записваме така:

$$(1.88) \quad \left[ p_1 - p_2 - \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)}) n_k,$$

като в дясната страна се извършва сумиране по повтарящите се индекси. При плоските течения  $w=0$ ,  $R_2^{-1}=0$ ,  $R_1^{-1}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$ . От (1.88) намираме проекциите върху нормалата и върху тангенциалната равнина

$$p_1 - p_2 - \frac{\sigma}{R_1} = [\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2]_2^1,$$

$$[(\sigma_{11} - \sigma_{22})n_1n_2 - \sigma_{12}(n_2^2 - n_1^2)]_2^1 = 0.$$

Тук  $[\ ]_2^1$  означава разлика на величините, пресметнати за първия и втория флуид. Като заместим компонентите на тензора на вискозните напрежения

$$\sigma_{11} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{22} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{12} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

и косинус-директорите на нормалата

$$n_1 = \frac{\partial h}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad n_2 = \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

получаваме следните условия при  $y=h(x, t)$ :

$$(1.89) \quad \left[ -p + 2\mu \frac{1+h^2x}{1-h^2x} \frac{\partial v}{\partial y} \right]_2^1 = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}},$$

$$\left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 4 \frac{h_x}{1-h^2x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_2^1 = 0.$$

За всяка от двете течности, разделени с повърхността  $y=h(x, t)$ , са изпълнени уравненията (1.54). Към условията (1.89) трябва да се добавят граничните условия на другите повърхности, ограничаващи течението, които зависят от конкретната задача.

### 1.3.3. За съществуването и единствеността на решенията

За да се убедим, че формулираните гранични задачи са коректно поставени за реални течения и че действително ги описват, следва да се докажат съответни теореми за съществуване и единст-

веност на решението. Тези доказателства обаче не винаги могат да се извършат. На практика вместо да се докаже строго съществуването и единствеността на решението, понякога се оказва по-лесно да се получи приближено решение на задачата и чрез сравняване с експеримента да се убедим в неговата достоверност. Трудностите на математическите доказателства са свързани преди всичко с нелинейния характер на уравненията.

Отражение дава също сложността на механичните явления, развиващи се в потока при достатъчно големи скорости на теченията.

Нека вискозна несвиваема течност заема ограничен обем  $G(t)$  и границата на този обем  $S_T$  да се състои от твърди повърхности, движението на които е зададено. Да допуснем, че съществуват две полета на скоростта  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  и две налягания  $p_1, p_2$ , удовлетворяващи уравненията на Навие—Стокс и уравнението на непрекъснатостта (1.54), а също и условията (1.74) на повърхността  $S_T$ . Да разгледаме  $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ,  $p_* = p_2 - p_1$ . Тогава  $\vec{u}$  и  $p_*$  удовлетворяват уравненията

$$(1.90) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \frac{p_*}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

и условията на повърхността  $S_T$ :

$$(1.91) \quad \vec{u} = 0, \quad \vec{r} \in S_T, \quad t > 0.$$

Да умножим първото уравнение на (1.90) с  $\vec{u}$  и да преобразуваме лявата страна така, че да отделим дивергентен член от вида  $\nabla \cdot \vec{Q}$ . Така получаваме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) &= -\nu (\vec{u}_x^2 + \vec{u}_y^2 + \vec{u}_z^2) - \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}_1 + \nabla \cdot \vec{Q}, \\ \vec{Q} &= - \left( \frac{1}{\rho} p_* + \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v}_1 \vec{u}^2 + \frac{1}{2} \nu \nabla (\vec{u}^2). \end{aligned}$$

Да интегрираме полученото уравнение в областта  $G$ . Като вземем предвид, че съгласно формулата на Остроградски—Гаус (1.5) интегралът от дивергентния член ще се преобразува в интеграл по повърхността  $S_T$  и ще се анулира поради (1.91), получаваме уравнението (О. Рейнолдс, 1895 г.; В. Ор, 1907 г.):

$$(1.92) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_G \frac{1}{2} \vec{u}^2 d\tau = - \int_G \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}_1 d\tau - \nu \int_G (\vec{u}_x^2 + \vec{u}_y^2 + \vec{u}_z^2) d\tau.$$

Оказва се възможно да се получат някои оценки за интегралите от дясната страна на (1.92) за произволни векторни полета  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . В частност изпълнено е неравенството

$$-\int_G \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}_1 d\tau \leq m \int_G \vec{u}^2 d\tau, \quad m \geq 0,$$

във всяка точка от  $G$  и при всички  $t$ , за които  $0 < t < T$ . От това неравенство следва

$$\frac{\partial K}{\partial t} \leq 2mK, \quad K = \int_G \frac{1}{2} \vec{u}^2 d\tau;$$

$$\frac{d}{dt} [K(t) e^{-2mt}] \leq 0;$$

$$K(T) \leq K(0) e^{2mT}.$$

Тъй като  $K(0)=0$ , то  $K(T)=0$  при произволно  $T$ . По такъв начин, ако две течения в ограничена област имат едно и също разпределение на скоростта в момента  $t=0$  и на границата  $S_T$  при  $t>0$ , то тези течения тъждествено съвпадат.

Този резултат демонстрира доказателство за единственост на нестационарното решение, но има ограничено приложение. В последно време са получени резултати и от по-общ характер (О. А. Ладиженска, 1970 г.).

За нестационарна гранична задача с начални данни (задача на Коши) съществуването и единствеността са доказани в случая на плоски и ососиметрични течения, като се предполага ограниченост на пълната енергия. В пространствения случай дори при ограниченост на пълната енергия е доказано само съществуването, и то за ограничени интервали от време. Трудността се състои в това, че в някои случаи решението е непрекъснато диференцируемо дори при гладки начални условия само за крайни интервали от време.

За стационарни задачи са доказани теореми за съществуване в плоския и пространствения случай. Единствеността на решенията на стационарните задачи е доказана само за големи стойности на  $\nu$  или за достатъчно малки зададени сили и гранични стойности на скоростта. В противен случай решението може да бъде и неединствено. Има примери, които потвърждават възможността за неединственост.

Проблемът за единствеността на решенията е тясно свързан с по-сложния проблем за хидродинамичната неустойчивост. Ако малки отклонения в началните данни водят към големи отклонения в разпределението на хидродинамичните величини, то течението следва да се счита за неустойчиво. Както показва уравнение (1.92), енергията на смущенията  $K(t)$  може да се увеличава само в течения с достатъчно големи градиенти на скоростта  $\vec{v}_1$  и при достатъчно малко влияние на вискозността. Експериментите показват, че теченията на вискозни флуиди стават неустойчиви при увеличаване на характерната скорост.

### 1.3.4. Подобие при вискозни течения

Променливите, участващи в уравненията на вискозните флуиди и начално-граничните условия, досега разгледахме в размерен вид. Нека ги приведем в безразмерен вид. За простота ще разгледаме течения на несвиваема течност в полето на силата на тежестта  $\vec{F} = g\vec{f}$ . Да допуснем, че постановката на задачата позволява да се изберат за характерни величини дължината  $L$ , скоростта  $U$  и времето  $T$ . Полагаме

$$(1.93) \quad \vec{r} = L\vec{r}', \quad \vec{v} = U\vec{v}', \quad p = \rho U^2 p', \quad t = Tt'.$$

Величините с прим са безразмерни. Като извършим в (1.54) смяна съгласно формулите (1.93), получаваме следната система:

$$(1.94) \quad \frac{L}{TU} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{v}' = -\nabla p' + \frac{\nu}{UL} \Delta \vec{v}' + \frac{gL}{U^2} \vec{f}, \quad \nabla \cdot \vec{v}' = 0.$$

Системата (1.94) съдържа три безразмерни независими параметъра:

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad Fr = \frac{U^2}{gL}, \quad St = \frac{TU}{L},$$

съответно *числата на Рейнолдс, на Фруд и Струхал*. Първото от тях изразява отношението на инерционните сили към вискозните, второто — отношението на инерционните сили към гравитационните, третото — отношението на двата мащаба на времето  $T$  и  $LU^{-1}$ .

След като граничните условия се запишат в безразмерен вид, в тях могат да се появят безразмерни параметри, които характеризират механичните процеси на границата. Така условието на междупазовата граница (1.78) ще съдържа безразмерния параметър  $We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$ , който се нарича *число на Вебер* и изразява отношението на инерционните сили към силите на повърхностното напрежение.

Да допуснем сега, че разглеждаме два потока в геометрично подобни области  $G_1, G_2$  с характерни линейни размери  $L_1, L_2$  и характерни скорости  $U_1, U_2$ . Привеждаме съответните гранични задачи към безразмерен вид, като използваме за мащабни величини  $L_1, U_1$  при първото течение и  $L_2, U_2$  — при второто. Лесно се вижда, че безразмерната форма на тези задачи съвпада напълно с изключение на това, че в първия случай безразмерни параметри ще бъдат  $Re_1, Fr_1$ , а във втория —  $Re_2, Fr_2$  (за простота предполагаем  $T = LU^{-1}$ , поради което  $St = 1$ ).

Ако стойностите на параметрите съвпадат,

$$(1.95) \quad Re_2 = Re_1, \quad Fr_2 = Fr_1,$$

то безразмерните решения за тези два случая при еднакви гранични условия също съвпадат. По такъв начин, когато са изпъл-

нени условията (1.95), полетата на теченията в геометрично подобни области са подобни и могат да бъдат получени едно от друго с прости пресмятания.

Ако постановката на задачата включва други безразмерни параметри (например  $St$ ,  $We$ ), изисква се равенство и на тези параметри.

На това именно основание  $Re$ ,  $Fr$ ,  $St$ ,  $We$  се наричат *параметри на подобие*. Съществуването на подобни течения открива изключително важна възможност за моделиране — може експериментално да се изучи обтичането на малко тяло и получените резултати след това да се използват при обтичане на тела с големи размери. Затова освен геометрично подобие трябва да се осигури и равенство на съответните параметри на подобие.

Параметрите на подобие играят важна роля при изчисляването на интегрални величини за цялото поле на течението, например безразмерните коефициенти на хидродинамичните сили. Тези коефициенти зависят само от безразмерните параметри на подобие

$$W = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_f$$

и

$$C_f = C_f(Re, Fr).$$

Тук  $W$  е силата на съпротивлението, което тялото оказва на обтичащия го поток,  $S$  — лицето на напречното сечение на тялото,  $U$  — скоростта на потока и  $\rho$  — плътността на флуида.



## ТОЧНИ РЕШЕНИЯ НА УРАВНЕНИЯТА НА ВИСКОЗНИ ФЛУИДИ

*Традиционната представа за точни решения на уравненията на Навие — Стокс е свързана със случаите, когато интегрирането им се свежда до получаването на крайни съотношения и по-специално, когато търсените величини се изразяват чрез формули. Такива точни решения се срещат извънредно рядко. Разширявайки това понятие, точни могат да се нарекат и такива решения, които се свеждат към интегриране на обикновени диференциални уравнения. При това се предполага, че последните се решават в квадратури или числено на ЕИМ със зададена точност. Точни решения се получават за течения, които притежават някаква симетрия, поради което уравненията на Навие — Стокс значително се опростяват.*

### § 2.1. СЛОЕСТИ ТЕЧЕНИЯ

В слоестите течения само една от компонентите на скоростта не е равна на нула и полето на скоростта не зависи от координатата, насочена по направление на потока. За такива течения уравненията (1.54) в декартова координатна система се свеждат към единственото уравнение

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Тук градиентът на налягането трябва да се разглежда като зададена функция на времето.

#### 2.1.1. Дифузия на завихреността

Да се ограничим засега със случая  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  и да разгледаме слоестите течения при постоянно налягане. Да допуснем също, че полето на скоростта не зависи от координатата  $z$ ; тогава от (2.1) за  $u(y, t)$  получаваме следното уравнение на дифузията:

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Тъй като за такива течения вихърът  $\omega = \frac{\partial u}{\partial y}$ , то  $\omega$  също удовлетворява уравнението (2.2). Поради това може да се каже, че динамиката на равномерните слоести течения при постоянно налягане се свежда към дифузия на завихреността.

$$(2.3) \quad u(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}$$

е частно фундаментално решение на уравнението на дифузията. В това може да се убедим чрез заместване в уравнение (2.2).

Като вземем предвид линейността на (2.2), може да обобщим това частно решение, разглеждайки функцията

$$(2.4) \quad u(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4\nu t}} F(\alpha) d\alpha,$$

която е решение на уравнението (2.2) и удовлетворява началното условие  $u(y, 0) = F(y)$ . Действително нека вместо  $\alpha$  въведем нова променлива  $\zeta$  посредством формулата

$$\alpha = y + 2\zeta\sqrt{\nu t}.$$

Тогава функцията (2.4) добива вида

$$(2.5) \quad u(y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} F(y + 2\zeta\sqrt{\nu t}) d\zeta.$$

Като положим в (2.5)  $t=0$  и използваме формулата

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \sqrt{\pi},$$

намираме

$$u(y, 0) = F(y) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = F(y).$$

Да разгледаме сега някои конкретни задачи, като използваме формулата (2.5).

**Тангенциално прекъсване.** Нека цялото пространство е запълнено с течност и в началния момент  $t=0$  е дадено разпределение на скоростта, съответстващо на тангенциално прекъсване (*вихров слой*) при  $y=0$ :

$$u(y, 0) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & y > 0, \\ -u_0, & y < 0. \end{cases}$$

Ще решим уравнението (2.2) с това начално условие и с гранични условия  $u \rightarrow \pm u_0$  при  $y \rightarrow \pm \infty$ .

Заместваем в (2.5) даденото начално разпределение и получаваме

$$(2.6) \quad u(y, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\eta} e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Първият интеграл в този израз съответствува на отрицателни стойности на аргумента на функцията  $F(y + 2\zeta\sqrt{\nu t})$  в (2.5), а вторият — на положителни стойности на аргумента. Като вземем предвид симетрията в подинтегралната функция, получаваме

$$(2.7) \quad u(y, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\zeta^2} d\zeta = u_0 \Phi(\eta).$$

Тук за интеграла на вероятността (функцията на Крамп) е възприето означението

$$\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

В граничните точки тази функция приема стойностите  $\Phi(\infty) = 1$   $\Phi(0) = 0$ , а за междинните точки има съответни таблици. Заслужава да се отбележи, че при  $\eta = 2,0$  стойността на  $\Phi(\eta)$  се различава от 1 с по-малко от 0,01.

От формулата (2.7) следва, че решението  $u(y, t)$  е непрекъснатата функция във всеки момент  $t > 0$  — прекъсването в началния момент се изглажда мигновено. Скоростта в произволна точка намалява по абсолютна стойност от  $u_0$  при  $t = 0$  до 0 при  $t \rightarrow \infty$ . Двойно намаляване се получава например при  $t = 1,1 y^2 \nu^{-1}$ . От (2.7) за вихъра  $\omega$  получаваме израза

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_0}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}.$$

Във всеки момент  $t > 0$  максималната стойност на вихъра се получава при  $y = 0$  — мястото на първоначалното прекъсване. Във всяка точка, за която  $y \neq 0$ , стойността на вихъра се увеличава от нула до  $\omega_{\max} = \frac{u_0}{\sqrt{\pi \nu t_m e}}$  и след това намалява до нула. Вихърът

приема максимална стойност в момента  $t_m = \frac{y^2}{2\nu}$ , така че  $\omega_{\max} =$

$$= u_0 |y|^{-1} \sqrt{\frac{2}{\pi e}}.$$

Да разгледаме слой с дебелина  $\delta$ , в който скоростта на течността се изменя от  $u = -0,99 u_0$  до  $u = 0,99 u_0$ . От (2.7) следва, че дебелината на този слой се изменя с течение на времето съгласно зависимостта

$$\delta \approx 8,0 \sqrt{\nu t}.$$

**Движение на твърда повърхност.** Да разгледаме течение на вискозна течност, породено от движението на твърда равнинна повърхност  $y=0$ , която е потопена в течността и се движи със скорост  $U=U(t)$  в собствената си равнина (Г. Стокс, 1851 г.; Рейлей, 1911 г.). Лесно се вижда, че поради симетрията на разглежданото течение  $u=u(y, t)$ ,  $v=0$ ,  $w=0$  и може да се ограничим с полупространството  $y>0$ . Скоростта  $u(y, t)$  удовлетворява уравнението (2.2) и граничните условия

$$(2.8) \quad \begin{aligned} u(0, t) &= U(t), \quad t > 0, \\ u &\rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Да предположим, че равнината  $y=0$  е неподвижна и в момента  $t=0$  тя започва да се движи с постоянна скорост  $U_0$ . Тогава функцията  $u(y, t)$  трябва да удовлетворява и началното условие

$$(2.9) \quad u(y, 0) = 0, \quad y > 0.$$

Решението на уравнението (2.2), което удовлетворява граничните условия (2.8) и началното условие (2.9), има вида

$$(2.10) \quad u(y, t) = U_0 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right].$$

От (2.10) следва, че за всяко  $y>0$  скоростта  $u(y, t)$  клони към  $U_0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. *стената увеличава движението цялата течност*. Дебелината  $\sigma$  на слоя, в който  $u(y, t)$  се различава от  $U_0$  с по-малко от  $0,01 U_0$ , е приблизително равна на  $4\sqrt{\nu t}$ .

Да предположим сега, че равнината  $y=0$  извършва трептения (осцилации) със скорост  $U(t) = U_0 \cos nt$ . Решението на уравнението (2.2) търсим в комплексна форма:

$$u(y, t) = e^{int} F(y) + [e^{int} F(y)]^*.$$

Тук със звезда е означена комплексно спрегнатата функция. От (2.2) намираме, че  $F(y)$  удовлетворява уравнението

$$in F(y) = \nu F''(y).$$

Решението на това уравнение, което е ограничено при  $y \rightarrow \infty$ , има вида

$$F(y) = A \exp \left[ -(1+i) \sqrt{\frac{n}{2\nu}} y \right].$$

От условието за равенство на скоростите на течността и пластината при  $y=0$  следва, че  $A = \frac{U_0}{2}$ . Поради това

$$(2.11) \quad u(y, t) = U_0 \exp \left( -\sqrt{\frac{n}{2\nu}} y \right) \cos \left( nt - \sqrt{\frac{n}{2\nu}} y \right).$$

Решението (2.11) представлява напречна вълна, която се разпространява от границата в перпендикулярно на нея направление

Дължината на вълната е  $\lambda = 2\pi \left( \frac{2\nu}{n} \right)^{1/2}$ , а фазовата скорост  $c = (2\nu n)^{1/2}$ . Амплитудата на вълната затихва по експоненциален закон  $u \sim \exp \left( -\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} g \right)$ . Отношението на амплитудите в две най-близки точки, в които осцилациите имат една и съща фаза, е равно на  $\exp(-2\pi) \approx 0,002$ . Това свидетелствува за бързо затихване на движението с отдалечаване от повърхността.

**Течение, породено от действието на тангенциално напрежение.** Нека течността заема полупространство  $y < 0$  и в началния момент да се намира в покой:

$$(2.12) \quad u(y, 0) = 0, \quad y < 0, \quad t = 0.$$

Предполагаме, че в момента  $t = 0$  на повърхността на течността започва да действа постоянно тангенциално напрежение, което остава постоянно и при  $t > 0$ , т. е.

$$(2.13) \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau, \quad y = 0, \quad t > 0.$$

Да намерим възникналото течение. То се описва от решението на (2.2), удовлетворяващо граничното условие (2.13) и началното условие (2.12). Разглеждаме функцията  $w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , за която трябва да се реши следната задача: Да се реши уравнението

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

при следните гранични и начални условия:

$$\begin{aligned} w &= \tau, \quad y = 0; \\ w &\rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty, \quad t > 0; \\ w(y, 0) &= 0, \quad y < 0. \end{aligned}$$

Решението за  $w$  се дава от (2.10) чрез замяна на  $U_0$  с  $\tau$  и  $y$  с  $-y$ :

$$w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau - \frac{2\tau}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Диференцирайки този израз относно  $y$ , намираме  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , а след това от (2.2) определяме  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\tau}{\rho\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}},$$

$$(2.14) \quad u = \frac{\tau}{\rho\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Като въведем променливата  $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$  и интегрираме по части (2.14) получаваме

$$(2.15) \quad u(y, t) = \frac{2\tau\sqrt{\nu t}}{\mu} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} + \eta + \eta \Phi(\eta) \right].$$

Това решение показва, че *скоростта на течността върху свободната повърхност се увеличава с увеличаване на времето:*

$$u(0, t) = \frac{2\tau}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}.$$

При  $t \rightarrow \infty$  за всяка точка, в която  $y \neq 0$ , имаме

$$u(y, t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \approx \frac{2\tau}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}.$$

По такъв начин при  $t \rightarrow \infty$  скоростта на течността клони към скоростта ѝ върху свободната повърхност. Точката  $y$ , която в момента  $t_1$  има скорост, равна на половината от скоростта върху свободната повърхност, се определя от уравнението

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} + \eta + \eta \Phi(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Оттук намираме  $\eta = -0,35$ . Дълбочината на слоя, за който в даден момент  $t$  скоростта е равна на половината от скоростта на повърхността, е равна на

$$\delta \approx 0,7 \sqrt{\nu t}.$$

Разгледаната задача може да се интерпретира като най-прост модел на течение, възникнало под въздействието на вятър.

### 2.1.2. Течения, породени от надлъжен градиент на налягането

Да разгледаме случая  $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$ , в който се получават важен клас слоести течения, като се предположи, че

$$(2.16) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -p_1(t), \quad u = u(y, z, t), \quad v = 0, \quad w = 0.$$

При тези предположения системата уравнения на Навие — Стокс (1.54) се свежда към уравнението:

$$(2.17) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = p_1.$$

В това уравнение  $p_1(t)$  е дадена функция на времето.

**Стационарни течения в тръби.** Да допуснем, че градиентът на налягането не зависи от времето. За стационарното уравнение (2.17) може да се постави граничната задача, като се зададе условието за полепване върху затворената крива  $l_T$  в равнината  $(y, z)$ :

$$(2.18) \quad u=0, \quad \vec{r} \in l_T.$$

Решението на тази гранична задача може да се интерпретира като стационарно течение на вискозна течност в прага безкрайна тръба, напречното сечение  $c_1$  на която при всяко  $x$  е ограничено от контура  $l_T$ . Това течение се дължи на действието на постоянния градиент на налягането  $\frac{\partial p}{\partial x} = -p_1$ . Ако разликата в налягането на участък от канала с дължина  $L$  означим с  $\Delta p$ , то

$$p_1 = -\frac{\Delta p}{L}.$$

В частния случай, когато тръбата е кръгла ( $l_T$  е окръжност) течението е изследвано експериментално от Г. Хаген през 1839 г. и Ж. Поазьой през 1840 г.

Да разгледаме по-общия случай, когато сечението на тръбата е елипса, така че  $l_T$  има уравнение

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Чрез непосредствена проверка лесно се убеждаваме, че решението на граничната задача (2.17), (2.18) е функцията

$$(2.19) \quad u(y, z) = A \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right),$$

където

$$A = \frac{-\Delta p}{2\mu L} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Максималната стойност на скоростта в произволно сечение се достига в точката  $y=0, z=0$  и е равна на  $u_m = A$ . Като се използва (2.19), може да се пресметне обемният разход за единица време

$$(2.20) \quad Q = \iint_{c_1} u dy dz = -\frac{\pi}{4} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \cdot \frac{\Delta p}{\mu L}.$$

Средната скорост на течността в сечението се намира от съотношението

$$Q = u_c \cdot \iint_{c_1} dy dz = \pi a b u_c.$$

Оттук получаваме

$$(2.21) \quad u_c = -\frac{1}{4} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{\Delta p}{\mu L} = \frac{1}{2} u_m.$$

Да изчислим силата на триене на флуиден обем, действаща върху повърхността на тръбата с дължина единица:

$$W = \int_{l_T} \left[ p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z) \right] dl =$$

$$= 4\mu \left( \int_0^b \frac{\partial u}{\partial y} dz + \int_0^a \frac{\partial u}{\partial z} dy \right) = -\pi ab \Delta p.$$

Както трябваше и да се очаква, силата на триене се уравновесява от силите на налягането, действащи върху краищата на тръбата, отделящи разглеждания обем от течността. В приложенията обикновено се разглежда коефициентът на съпротивлението  $\lambda$ , който се дефинира чрез равенството

$$(2.22) \quad |\Delta p| = \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{2} \rho u_c^2.$$

Тук  $d$  е *хидравличният диаметър*, който се изчислява посредством лицето на съчинението  $S$  и дължината на контура по формулата

$$d = \frac{4S}{l}.$$

Очевидно в случая на кръгово сечение той съвпада с диаметъра на кръга. Като заместим в (2.21)  $\Delta p$ , получаваме

$$(2.23) \quad \lambda = \frac{8}{\text{Re}} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} d^2, \quad \text{Re} = \frac{u_c d}{\nu}.$$

Числото на Рейнолдс тук е определено чрез средната скорост и хидравличния диаметър на сечението.

Най-важният частен случай на разглежданото решение е течението в тръба с кръгово сечение. Лесно се доказва, че при дадени стойности на градиента на налягането и лицето на напречното елиптично сечение най-голям разход течност се получава при  $a = b$ . Основните формули за течения на вискозна течност в кръгли тръби имат вида

$$(2.24) \quad u = u_m \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right);$$

$$(2.25) \quad Q = -\frac{\pi a^4 \Delta p}{8\mu L}, \quad \lambda = \frac{64}{\text{Re}};$$

$$(2.26) \quad \frac{1}{2} u_m = u_f = -\frac{a^2 \Delta p}{8\mu L} = \frac{Q}{\pi a^2}, \quad \text{Re} = \frac{u_c 2a}{\nu}.$$

Флуидното течение с профил на скоростта (2.24) се нарича *течение на Поазьой*, а съотношенията (2.25) изразяват *закона на Ха-*



ген — Поазьбой. Това теоретично решение се потвърждава много добре от експерименталните данни за течения в дълги тръби както за профила на скоростта и разхода, така и за коефициента на съпротивлението. Това течение се определя от единствен безразмерен параметър — числото на Рейнолдс  $Re$ .

Съответствието между теорията и експеримента се нарушава при увеличаване числото на Рейнолдс например до  $Re \approx 2300$ . При по-големи стойности на  $Re$  вместо слоесто течение в тръбата може да се реализира много по-сложно нестационарно течение, наречено турбулентно.

Да разгледаме сега течение в тръба, сечението на която е правоъгълник, ограничен от правите  $y = \pm b$ ,  $z = \pm a$ . В този случай не съществува толкова проста формула за профила на скоростта, както (2.19) — тук решението се представя във вид на ред. Профилът на скоростта записваме във вида

$$u(y, z) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} [b^2 - y^2 + \bar{u}(y, z)].$$

Тогава от (2.17) и (2.18) за  $\bar{u}(y, z)$  получаваме следната гранична задача:

$$(2.27) \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\bar{u} = y^2 - b^2, \quad z = \pm a,$$

$$(2.28) \quad \bar{u} = 0, \quad y = \pm b.$$

Решението на задача (2.27), (2.28) се намира чрез *метода на отделяне на променливите*:

$$\bar{u}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \operatorname{ch}(\lambda_m z) \cos(\lambda_m y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \bar{u}_m,$$

$$\lambda_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{b}.$$

Тук  $u_m$  са частните решения на (2.27), които удовлетворяват граничните условия при  $y = \pm b$ . Коефициентите  $A_m$  се определят така, че да са изпълнени и граничните условия при  $z = \pm a$ :

$$\begin{aligned} y^2 - b^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \operatorname{ch} \lambda_m a \cos(\lambda_m y), \quad A_m \operatorname{ch} \lambda_m a = \\ &= \frac{2}{b} \int_0^b (y^2 - b^2) \cos(\lambda_m y) dy = (-1)^{m+1} \frac{32b^2}{(2m+1)^3 \pi^3}. \end{aligned}$$

По такъв начин разпределението на скоростта се получава от формулата

$$(2.29) \quad u(y, z) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} \left[ b^2 - y^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \lambda_m z}{\operatorname{ch} \lambda_m a} \cos(\lambda_m y) \right].$$

Важен частен случай на това решение е течението в плосък канал между две твърди равнини  $y = \pm b$ . При  $a \rightarrow \infty$  от (2.29) получаваме

$$(2.30) \quad u(y, z) = u_m \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

$$u_m = -\frac{l^2 \Delta p}{2\mu L}.$$

Решението (2.30) може да се получи и непосредствено от (2.17), ако производната по  $z$  се приравни на нула и след това се интегрира по  $y$ . Разходът на течността чрез единица ширина на канала за единица време е равен на

$$(2.31) \quad Q = \int_{-b}^b u dy = 2bu_c = \frac{4}{3} bu_m = -\frac{2b^3 \Delta p}{3\mu L}.$$

Ако коефициентът на съпротивлението се пресметне по формулата (2.23), като се положи  $d = 2b$ , то

$$(2.32) \quad \lambda = \frac{24}{\operatorname{Re}}, \quad \operatorname{Re} = \frac{u_c \cdot d}{\nu}.$$

Течението в плосък канал, което се описва от формулите (2.30), (2.31), (2.32), се нарича *равнинно течение на Поазъой*. Теоретичните формули се съгласуват добре с експерименталните данни за стойности на числото на Рейнолдс до  $\operatorname{Re} \approx 1400$ . При  $\operatorname{Re} > 1400$  в равнинен канал може да се наблюдава турбулентно течение. Както и в случая на кръгла тръба, фактическото число на Рейнолдс, при което става преход към турбулентно течение, зависи от условията в началното сечение. Ако смущенията на течението във входната тръба на канала са малки, то преходното число на Рейнолдс може да се увеличи.

Решението (2.30) може да се обобщи за случая, когато една от стените извършва движение в своята равнина в направление  $x$  с постоянна скорост  $U$ :

$$(2.33) \quad u = U, \quad y = b,$$

$$u = 0, \quad y = -b.$$

Лесно се вижда, че решението на (2.17) при условията (2.33) е функцията

$$u(y) = -\frac{b^2 \Delta p}{2\mu L} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{1}{2} U \left( 1 + \frac{y}{b} \right).$$

Ако едната стена се движи и няма надлъжен градиент на налягането, получаваме *равнинното течение на Кует* с линеен профил на скоростта:

$$(2.34) \quad u(y) = \frac{1}{2} U \left( 1 + \frac{y}{b} \right).$$

**Нестационарни течения в тръби.** Да разгледаме случая, когато *градиентът на налягането зависи от времето*. Задачата за нестационарното течение в дългата тръба с кръгово сечение се формулира по следния начин:

Да се реши уравнението

$$(2.35) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

при следните гранични и начални условия:

$$(2.36) \quad u(a, t) = 0, \quad t > 0;$$

$$(2.37) \quad u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 \leq r \leq a.$$

Тук *градиентът на налягането е зададена функция на времето*  $-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma(t)$ , а уравнението (2.35), описващо слоестото течение в тръбата, следва от уравненията на Навие — Стокс (вж. т. 1 от приложението).

Решението на тази задача при произволно разпределение на началната скорост и изменящ се с времето градиент на налягането е изследвано от И. С. Громеко през 1882 г. Частни случаи от тази задача са разглеждани от различни автори.

Да допуснем, че отначало течността в тръбата се намира в покой. В момента  $t=0$  се задава градиент на налягането  $\gamma$ , който след това се поддържа постоянен (Ф. Шимански, 1930 г.). Да въведем нова променлива

$$(2.38) \quad w = \frac{\gamma}{4\nu} (a^2 - r^2) - u.$$

Тогава за  $w$  получаваме задачата (2.35), (2.36) с начално условие

$$(2.39) \quad w(r, 0) = \frac{\gamma}{4\nu} (a^2 - r^2).$$

В уравнение (2.35) следва да положим  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ . Решението на (2.35) търсим по метода за отделяне на променливите:

$$(2.40) \quad w = \frac{1}{4\nu} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} A_n w_n(r, t),$$

$$w_n(r, t) = J_0 \left( \lambda_n \frac{r}{a} \right) \exp \left( -\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2} \right).$$

Тук  $w_n(r, t)$  са частни решения, които удовлетворяват граничните условия, ако  $\lambda_n$  са корени на уравнението  $J_0(\lambda) = 0$ .

Ще използваме следното свойство на функцията на Бесел  $J_s\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)$ . Нека  $\lambda_n$  са корени на уравнението

$$J_s(\lambda) = 0.$$

Тогава при  $\nu > -1$  функциите  $J_s\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)$  образуват пълна система в интервала  $0 \leq r \leq a$  и удовлетворяват условието за ортогоналност

$$(2.41) \quad \int_0^a r J_s\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) J_s\left(\lambda_m \frac{r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_{s+1}^2(\lambda_n) \delta_{nm}.$$

Тъй като системата от функции  $J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)$  е пълна, разлагането (2.40) има най-общ вид и остава само константите  $A_n$  да се подберат така, че да се удовлетвори началното условие (2.39) —

$$a^2 - r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right).$$

Като използваме условието за ортогоналност (2.41), намираме

$$A_n = \frac{2a^2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 x (1-x^2) J_0(\lambda_n x) dx = \frac{8a^2}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}.$$

Тогава от (2.38) получаваме решение за  $u$ :

$$(2.42) \quad u(r, t) = \frac{1}{4\nu} \gamma (a^2 - r^2) - \frac{2\gamma a^2}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2}\right).$$

С увеличаване на времето течението клони към стационарното течение на Поазьой, което се описва от първия член в (2.42). Останалите членове намаляват експоненциално с растене на времето  $t$ ; отклонението от профила на Поазьой се определя главно от първия член в разлагането, за който  $\lambda_1 = 2,41$ . На фиг. 1 е показано разпределението на пресметната по формула (2.42) скорост, когато за характерен мащаб се вземе  $u_{\max} = \frac{\gamma a^2}{4\nu}$ . При малки  $t$ , близо до стената се формира тънък граничен слой, а в ядрото на течението скоростта е почти постоянна. С течение на времето профилът на скоростта бързо се приближава до параболичен профил на Поазьой. Интересно е да се намери необходимото време за преминаване към стационарен режим. При  $t \cong \frac{a^2}{\nu}$  различието на профила на скоростта от асимптотичния профил на Поазьой е

в границите на 1%. За случая на поток от въздух в кръгов тръба с диаметър 30 см получаваме, че необходимото време за преминаване към стационарен режим е 25 мин.

Нека градиентът на налягането зависи от времето по хармоничен закон (Т. Зексъл, 1930 г.):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k \cos(nt), \quad k = \text{const}$$

Да намерим периодично решение на уравнението (2.35) което да удовлетвори и граничното условие за полепване върху стената. За да се опростят пресмятанията, решението ще търсим в комплексен вид:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k e^{int}$$

$$u(r, t) = f(r) e^{int}.$$

Ясно е, че физически смисъл има само реалната част на решението. За функцията  $f(r)$  от (2.35) получаваме уравнението

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{in}{\nu} f = -\frac{k}{\nu}.$$

Решението на това уравнение, удовлетворяващо условието за полепване, води към профила на скоростта

$$(2.43) \quad u(r, t) = -i \frac{k}{n} e^{int} \left[ 1 - \frac{J_0(r\eta)}{J_0(a\eta)} \right], \quad \eta = \sqrt{-\frac{in}{\nu}}.$$

При малки стойности на  $x$  функцията на Бесел се разлага в следния ред:

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4} x^2 + \dots$$

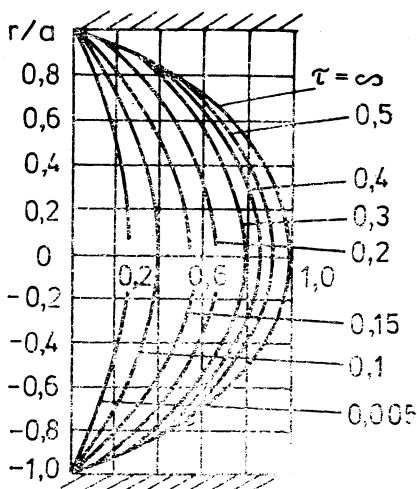
Като се ограничим само с първите два члена от разлагането и отделим реалната от имажинерната част за малки  $\eta$ , получаваме

$$(2.44) \quad u(r, t) = \frac{k}{4\nu} (a^2 - r^2) \cos nt.$$

При големи  $\eta$  за функцията на Бесел получаваме следното асимптотично представяне:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi xi}} e^{ix}, \quad x = r\eta.$$

Следователно за големи  $\eta$



Фиг. 1

$$(2.45) \quad u(r, t) = \frac{k}{n} \left\{ \sin nt - \sqrt{\frac{a}{r}} \exp \left[ -\sqrt{\frac{n}{2\nu}} (a-r) \right] \sin \left[ nt - \sqrt{\frac{n}{2\nu}} (a-r) \right] \right\}.$$

Така получаваме, че нискочестотните (2.44) и високочестотните (2.45) трептения се различават значително. При нискочестотните трептения скоростта и налягането имат една и съща фаза. Във всеки момент профилът на скоростта е параболичен. При високочестотните трептения (2.45) вторият член бързо затихва с отдалечаването от стената, затова високочестотните трептения в ядрото на тръбата са като в идеален флуид и са изместени по фаза на половин период. Средната величина  $\bar{u}^2$  характеризира интензивността на трептенията.

От (2.45) получаваме

$$\bar{u}^2 = \frac{k^2}{2n^2} [1 - 2 \cos \eta \exp(-\eta) + \exp(-2\eta)].$$

Оттук следва, че  $\bar{u}^2$  достига своя максимум на разстояние от стената  $y_*$ , което се определя от равенството

$$\eta_* = y_* \sqrt{\frac{n}{2\nu}} = 2,98.$$

Този теоретичен резултат се съгласува добре с експерименталните данни за осцилиращи течения в тръби (Е. Г. Ричардсън, Е. Тайлер, 1929 г.).

Да разгледаме нестационарно течение на Кует. Нека имаме течност, ограничена от две равнинни твърди граници  $y=0$  и  $y=b$ , която се намира отначало в покой. Да предположим, че в момента  $t=0$  долната граница започва да се движи с постоянна скорост  $U$ . Трябва да се намери решение на уравнението (2.2), удовлетворяващо условията

$$(2.46) \quad u(0, t) = U, \quad u(b, t) = 0, \quad t > 0;$$

$$u(y, 0) = 0, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Полагаме  $w = U \left(1 - \frac{y}{b}\right) - u$ . Тогава  $w$  удовлетворява уравнението (2.2), хомогенните гранични условия при  $y=0$  и  $y=b$  и началното условие

$$(2.47) \quad w(y, 0) = U \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Решението търсим по метода на отделяне на променливите:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n w_n,$$

$$w_n = \exp \left( -\pi^2 n^2 \frac{\nu t}{b^2} \right) \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Тук частните решения  $w_n$  удовлетворяват хомогенните гранични условия и функциите  $\sin \frac{\pi n y}{b}$  образуват пълна система. Константите  $A_n$  се определят от началното условие (2.47):

$$U\left(1 - \frac{y}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

$$A_n = \frac{2}{b} \int_0^b U\left(1 - \frac{y}{b}\right) \sin \frac{\pi n y}{b} dy = \frac{2U}{\pi n}.$$

Следователно решението  $u(y, t)$  приема вида

$$(2.48) \quad u(y, t) = U\left(1 - \frac{y}{b}\right) - \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\pi^2 n^2 \frac{\nu t}{b^2}\right) \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Този ред е бавно сходящ при  $\nu t \ll b^2$ , т.е. в началния период от развитието на течението, когато има прекъсване при  $y=0$ . С растежа на времето течението клони към линейно разпределение на скоростта. Затихването на отклонението от линейния профил се определя от първия доминиращ член при  $n=1$ , който затихва, както  $\exp\left(-\frac{\pi^2 \nu}{b^2} t\right)$ .

### 2.1.3. Течения, породени от действието на силата на тежестта

Да разгледаме някои течения, които се формират под действието на силата на тежестта. Нека тънък слой течност с дебелина  $h$  тече по твърда равнинна повърхност под действието на силата на тежестта (В. Нуселт, 1916 г.). Предполагаме, че равнината е наклонена към хоризонта под ъгъл  $\alpha$ . Нека оста  $Ox$  на координатната система е насочена по посока на потока. Тогава за единствената ненулева компонента на скоростта основната система уравнения (1.54) добива следния вид:

$$(2.49) \quad \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g \sin \alpha = 0,$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} - g \cos \alpha = 0.$$

Тук  $g \sin \alpha$  и  $-g \cos \alpha$  са проекциите върху осите  $Ox$  и  $Oy$  на външната сила на тежестта.

Повърхността на слоя е свободна, затова върху нея действа атмосферното налягане  $p_a$  и тангенциалното напрежение е равно на нула. Следователно от (1.89) извеждаме следните гранични условия:

$$(2.50) \quad \mu \frac{du}{dy} = 0, \quad y = h;$$

$$p = p_a, \quad y = h.$$

Решението на системата (2.49) с гранични условия (2.50) върху свободната повърхност и условието за полепване върху равнината  $y=0$  има следния вид:

$$(2.51) \quad u = -\frac{1}{\mu} \rho g \sin \alpha \left( \frac{y^2}{2} - hy \right),$$

$$p = p_a - \rho g \cos \alpha (y - h).$$

За разхода на течността в слоя

$$(2.52) \quad Q = \int_0^h u dy = \frac{1}{3\mu} \rho h^3 g \sin \alpha.$$

Важно свойство на решението (2.51) е неговата неустойчивост, която води до образуването на вълни по повърхността на слоя. Експериментално е показано, че в слой, който тече върху наклонена равнина, вълнообразуването трябва да се има предвид дори за течения с разход от порядъка  $Q \approx (1 \div 5) \nu$  (П. Л. Капица, 1949 г.). Започвайки от тези стойности на разхода, формулата (2.52) дава отклонения от експерименталните данни. При  $Q \approx 10 \nu$  вълните в слоя стават случайни и тримерни.

Нека тънък слой течност тече по повърхността на вертикално разположен кръгов цилиндър. В цилиндрична координатна система  $r, \varphi, z$  за единствената ненулева компонента на скоростта  $u$  (вж. т. 1 от приложението) получаваме уравнението

$$(2.53) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g.$$

Граничните условия върху повърхността на цилиндъра и свободната повърхност се записват така:

$$u = 0, \quad r = a,$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = a + h.$$

В стационарния случай за решение на уравнението (2.53) получаваме

$$(2.54) \quad u = \left( -\frac{1}{4} \rho g r^2 + C_1 \ln \frac{r}{a} + C_2 \right) \frac{1}{\mu}.$$

Като използваме граничните условия, намираме

$$(2.55) \quad C_1 = \frac{1}{2} \rho g (a + h)^2, \quad C_2 = \frac{1}{4} \rho g a^2.$$

Ако течността тече между два коаксиални вертикални кръ-



гови цилиндъра, то условието заотсъствие на триене върху свободната повърхност се заменя с условието за полепване

$$u=0, y=a+h.$$

В този случай за константите  $C_1$  и  $C_2$  намираме

$$C_1 = \frac{1}{4} \rho g [(a+h)^2 - a^2] \left[ \ln \left( 1 + \frac{h}{a} \right) \right]^{-1}, \quad C_2 = \frac{1}{4} \rho g a^2.$$

Следователно за профила на скоростта на течението между цилиндрите получаваме

$$(2.56) \quad u(r) = \frac{1}{4\mu} \rho g \left\{ a^2 - r^2 + [(a+h)^2 - a^2] \ln^{-1} \left( 1 + \frac{h}{a} \right) \ln \frac{r}{a} \right\}.$$

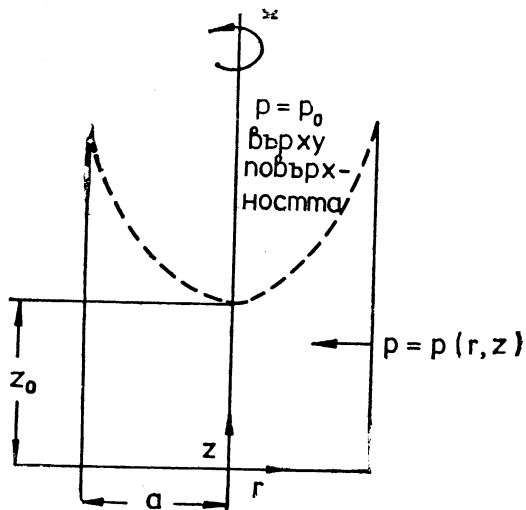
**Определяне формата на свободната повърхност във вискозен въртящ се флуид.** Да разгледаме кръгов цилиндричен контейнер с радиус  $a$ , в който се намира вискозен флуид. Нека цилиндърът се върти с постоянна ъглова скорост  $\Omega$  около собствената си ос. Предполагаме, че при определяне формата на свободната повърхност може с известно приближение да пренебрегнем влиянието на дъното му. Въвеждаме цилиндрична координатна система  $(r, \varphi, z)$  така, че оста  $z$  да бъде насочена вертикално нагоре по оста на цилиндъра (фиг. 2).

Тогава компонентите на земното ускорение  $g$  са:  $g_r=0$ ,  $g_\varphi=0$ ,  $g_z=-g$ . Ще предполагаме, че индуцираното от въртенето на контейнера течение е ососиметрично и кръгово, така че  $v_r=v_z=0$ . От уравнения на Навие—Стокс получаваме

$$\rho \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0.$$



Фиг. 2

След интегриране на второто уравнение намираме

$$v_\varphi = C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

където  $C_1$  и  $C_2$  са произволни константи. При  $r=0$  скоростта  $v_\varphi$

е крайна, от което следва, че  $C_2 = 0$ . Тъй като частиците на флуида полепват по стените на цилиндъра,  $v_\varphi = a\Omega$ . Определяйки  $C_1$  от това условие, за  $v_\varphi$  получаваме

$$v_\varphi = \Omega r.$$

Това означава, че всяка флуидна частица се върти като твърдо тяло. Тогава за компонентите на градиента на налягането имаме

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega r,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

След заместване на  $\frac{\partial p}{\partial r}$  и  $\frac{\partial p}{\partial z}$  в равенството

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

намираме

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + C.$$

Като вземем предвид, че налягането на и над свободната повърхност е равно на  $p_0$ , т.е.  $p = p_0$  при  $r = 0$  и  $z = z_0$ , получаваме

$$C = p_0 + \rho g z_0.$$

Следователно за налягането  $p$

$$p - p_0 = -\rho g (z - z_0) + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2}.$$

Тъй като върху свободната повърхност  $p = p_0$ , от последното равенство намираме следното уравнение за формата ѝ:

$$0 = -\rho g (z - z_0) + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2},$$

т.е. формата на свободната повърхност е параболична:

$$z - z_0 = \frac{\Omega^2}{2g} r^2.$$

## § 2.2. ТЕЧЕНИЯ С ОСОВА СИМЕТРИЯ

За теченията с осова симетрия в цилиндрична координатна система  $r, \varphi, z$

$$v_z = u(r, t), \quad v_r = 0, \quad v_\theta = v(r, t), \quad p = p(r, t).$$

В частния случай, когато частиците се движат по окръжност,  $v_z$  също се анулира и уравненията на Навие—Стокс (вж. т. 1 от приложението) се опростяват значително:

$$(2.57) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{2}.$$

Уравнението за скоростта не зависи от налягането и се решава самостоятелно, а налягането се определя по известно поле на скоростта.

Най-простите частни решения на (2.57) са

$$(2.58) \quad v_1 = A \frac{1}{r}, \quad v_2 = Br, \quad A = \text{const}, \quad B = \text{const}.$$

Първото от тези решения е интересно с това, че то определя безвихрово течение, защото

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0.$$

Това решение съответствува на поле на скоростта, формирано от кръгов цилиндър с радиус  $a$ , който се върти във вискозна течност с ъглова скорост  $Aa^{-2}$ . Циркулацията на скоростта в това течение по всяка окръжност  $\frac{r}{2\pi} = \text{const}$  е постоянна и е равна на

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v r d\varphi = 2\pi A.$$

Второто решение от (2.58) съответствува на вихрово течение.

### 2.2.1. Дифузия на вихрова нишка

Нека в началния момент е зададено следното разпределение на скоростта:

$$(2.59) \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad t = 0.$$

Ще намерим решение, в което

$$v = 0, \quad r = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad t > 0.$$

Да предположим, че в безвихровото течение (2.58) в началото на координатната система в началния момент е поставен източник на завихряне — *вихрова нишка* (К. Озеен, 1911 г.; Г. Хамел, 1916 г.).

Търсим частно нестационарно решение на уравнението (2.57) в следния вид:

$$(2.60) \quad v = Br^k f(\zeta), \quad \zeta = rt^\alpha.$$

Замествайки в уравнение (2.57), получаваме

$$r^2 t^{-1} \alpha f' = v [\zeta f'' + (2k+1) f' + \zeta^{-1} (k^2 - 1) f].$$

Оттук следва, че при  $\alpha = -\frac{1}{2}$  има автомоделност, а за да се съгласува търсеното решение с началното разпределение на скоростта

(2.59), трябва  $k = -1$ . При тези стойности на  $\alpha$  и  $k$  получаваме

$$(2.61) \quad v(\zeta f'' - f') = -\frac{1}{2} \zeta^2 f'.$$

Това уравнение има следното решение, затихващо при  $\zeta \rightarrow \infty$ :

$$(2.62) \quad f = e^{-m\zeta^2}, \quad m = \frac{1}{4v}.$$

Като комбинираме (2.59) и (2.60), намираме решението на поставената задача:

$$(2.63) \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right).$$

За вихъра и циркулацията  $\Gamma_{(r)}$  по окръжността  $r = \text{const}$  от (2.63) получаваме

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}},$$

$$\Gamma_{(r)} = \Gamma \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right).$$

Следователно завихреността, която е съсредоточена в началния момент в началото на координатната система, се разпространява с нарастването на времето по цялата течност. При всяко  $r$  завихреността расте от нула до максимума си, а след това отново намалява до нула. Максималната завихреност е равна на

$$\omega_{\max} = \frac{\Gamma}{\pi e r^2}.$$

Да определим радиуса на окръжността, по която циркулацията е равна на  $\frac{1}{2} \Gamma$ . От (2.63) следва, че  $\Gamma_{(r)} = \frac{1}{2} \Gamma$  при  $r = 1,665 \sqrt{\nu t}$ .

Ще отбележим, че може да се построи нестационарно решение, което да се съгласува с второто решение от (2.58). За тази цел следва в (2.60) да се положи  $\alpha = -\frac{1}{2}$  и  $k = 1$ . Тогава получаваме уравнението

$$v(\zeta f'' + 3f') = -\frac{1}{2} f' \zeta^2,$$

което има решение

$$f' = \zeta^{-3} e^{-\frac{1}{4\nu} \zeta^2}.$$

## 2.2.2. Течение между въртящи се цилиндри

Нека имаме вискозна течност между два коаксиални кръгови цилиндъра с радиус  $r_1$  и  $r_2$ , които се въртят с постоянни ъгли

скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Тогава може да се намери стационарно решение на уравнението (2.57) с гранични условия

$$(2.64) \quad \begin{aligned} v &= \omega_1 r_1, \quad r = r_1, \\ v &= \omega_2 r_2, \quad r = r_2. \end{aligned}$$

Тъй като  $v_1 = \frac{1}{r}$  и  $v_2 = r$  са две частни решения на стационарното уравнение (2.57), общото му решение има вида

$$(2.65) \quad v = Ar + Br^{-1}.$$

От граничните условия (2.64) за константите  $A$  и  $B$  намираме

$$(2.66) \quad A = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Течението (2.65) става неустойчиво с увеличаване на  $\omega_1$ . При  $\delta \ll 1$  критичната стойност на  $\omega_1$  се намира от условието  $\omega_1^2 r_1^4 \delta^3 \nu^{-2} \approx 1700$  (Дж. Тейлър, 1923 г.)  $\left( \delta = \frac{r_2 - r_1}{r_1} \right)$ .

Ако  $r_2 \rightarrow \infty$  и  $\omega_2 \rightarrow 0$ , получаваме

$$(2.67) \quad v_1 = \frac{\omega_1 r_1^2}{r}.$$

В другия граничен случай — при  $r_1 = 0$  и  $\omega_1 = 0$ ,

$$v_2 = \omega_2 r.$$

Разпределението на налягането може да се намери от второто уравнение на (2.57). Да пресметнем силите на триене, действащи върху цилиндрите. Пълният момент на силите на триене, които действуват върху цилиндрична повърхност с радиус  $r$  и единична дължина, е равен на

$$M = - \int_0^{2\pi} p_{r\varphi} r^2 d\varphi.$$

В цилиндрична координатна система

$$p_{r\varphi} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = - \frac{2\mu B}{r^3},$$

откъдето

$$(2.68) \quad M = 4\pi\mu B.$$

В частност за създаване на безвихровото движение (2.67) в неограничена течност необходимо е да се поддържа момент  $M = 4\pi\mu\omega_1 r_1^2$ .

Разглежданата задача има приложения в теорията на лагери-те. Така например в ролковия лагер се върти вътрешният цилиндър и разликата между радиусите на цилиндрите е малка  $r_1 \delta =$

$=r_2-r_1 \ll r_1$ . Като положим в (2.68)  $r_2^2-r_1^2 \approx 2r_1^2\delta$  и  $\omega_1 r_1 = U$ , за малки  $\delta$  получаваме формулата (Н. П. Петров, 1883 г.)

$$M = \mu S \frac{U}{\delta},$$

в която  $S = 2\pi r_1$  е лицето на цилиндрична повърхност с единица височина. За да се получи по-точен резултат, трябва да се разгледат неконцентрични цилиндри.

Решението (2.65) допуска обобщение, когато между цилиндри-  
те има поток по направление на оста на цилиндрите. В това ком-  
бинирано течение различни от нула са две проекции на скорост-  
та —  $v(r)$ ,  $u(r)$ , и градиентът на налягането, на който се дължи  
потокът по направление на оста. За  $v(r)$  решението (2.65) се за-  
пазва. Компонентата на скоростта  $u(r)$  следва да се намери като  
решение на граничната задача

$$(2.69) \quad v \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L} = 0,$$

$$u = 0, \quad r = r_1, \quad r = r_2.$$

По такъв начин въртеливото и постъпателното течение се разде-  
лят. Като решим (2.69), намираме

$$(2.70) \quad u = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} \left[ (r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - (r^2 - r_1^2) \right].$$

Ако  $\delta = r_2 - r_1 \ll r_1$ , като положим  $r = r_1(1 + \delta y)$  и разложим (2.70)  
по  $\delta$ , получаваме в линейно приближение формулата

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} (r_2 - r_1)^2 (y - y^2),$$

която е еквивалентна на формулата (2.30) за равнинното течение  
на Поазьой. За ротационната компонента на скоростта  $v(r)$  в то-  
ва приближение получаваме формулата

$$v = r_1 \omega_1 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) y \right],$$

която е еквивалентна на формулата (2.34) за равнинното течение  
на Кует. Накрая при  $r_1 \rightarrow 0$  от (2.70) получаваме формулата (2.24)  
за течението на Хаген — Поазьой.

### 2.2.3. Нестационарно въртене на цилиндър

Нестационарни течения възникват при изменения на скоростта на  
въртене, например при възникване на движения от състояние на  
покой и при внезапно спиране.

Да разгледаме движението на течност, намираща се отначало  
в покой вътре в кръгов цилиндър, който внезапно започва да се

върти с постоянна ъглова скорост. Трябва да се намери решение на уравнението (2.57) с начални и гранични условия

$$v(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$V(a, t) = \omega_0 a, \quad t > 0.$$

Като положим  $v = \omega_0 r - w(r, t)$ , за  $w$  получаваме хомогенна гранична задача с начално условие

$$w(r, 0) = \omega_0 r, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Решението търсим по метода на отделяне на променливите във вид на ред:

$$w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n w_n(r, t),$$

$$w_n(r, t) = J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{vt}{a^2}\right).$$

Тук  $w_n(r, t)$  са частни решения на (2.57); числата  $\lambda_n$  се подбират така, че да са удовлетворени условията  $w_n(a, t) = 0$ , т. е.  $\lambda_n$  са корени на уравнението

$$J_1(\lambda_n) = 0.$$

Коефициентите  $A_n$  се определят от началното условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) = \omega_0 r, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Функциите на Бесел от първи род и от първи ред  $J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)$  образуват пълна система и удовлетворяват условието за ортогоналност (2.41). Като използваме това условие, получаваме

$$A_n = \frac{2}{J_2^2(\lambda_n) a^2} \int_0^a \omega_0 r^2 J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) dr = \frac{2\omega_0 a}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}.$$

Тогава за скоростта намираме

$$(2.71) \quad v(r, t) = \omega_0 r - 2\omega_0 a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{vt}{a^2}\right).$$

При  $t \rightarrow \infty$  нестационарните членове затихват и течността започва да се върти като твърдо тяло. Ще отбележим, че за първия нестационарен член от реда (2.71) съответствува  $\lambda_1 = 3.83$ .

## 2.2.4. Нестационарно ротационно течение на Кует

Нестационарното течение на Кует между два концентрични цилиндъра с радиуси  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), което се появява след като вътрешният цилиндър започне да се върти с постоянна ъглова скорост  $\omega$ , се описва от уравнението (2.57) и граничните условия (2.72)

$$\begin{aligned}v(r_1, t) &= \omega r_1, \quad v(r_2, t) = 0, \quad t > 0, \\v(r, 0) &= 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2.\end{aligned}$$

Полагаме

$$(2.73) \quad v = v_s(r) + w(r, t),$$

където  $v_s$  е решението на стационарната задача, т. е.

$$v_s = Ar + B \frac{1}{r}.$$

Тогава функцията  $w(r, t)$  удовлетворява уравнението (2.57) и следните гранични и начални условия:

$$\begin{aligned}w(r_1, t) &= 0, \quad w(r_2, t) = 0, \quad t > 0, \\w(r, 0) &= -v_s(r).\end{aligned}$$

Като приложим метода на отделяне на променливите, намираме, че решението на тази задача се представя във вида

$$(2.74) \quad w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' e^{-\lambda_n^2 \tau} [J_1(\lambda_n \xi) + \beta_n N_1(\lambda_n \xi)].$$

Тук  $\tau = \frac{\nu t}{r_1^2}$ ,  $\xi = \frac{r}{r_1}$ ,  $J_1(\xi)$  и  $N_1(\xi)$  са съответно функции на Бесел и Нойман от първи ред, а  $\lambda_n$  и  $\beta_n$  са корени на системата уравнения

$$(2.75) \quad \begin{aligned}J_1(\lambda) + \beta N_1(\lambda) &= 0, \\J_1\left(\frac{r_2}{r_1} \lambda\right) + \beta N_1\left(\frac{r_2}{r_1} \lambda\right) &= 0.\end{aligned}$$

При  $r_2 = 2r_1$  за първите четири корена получаваме

$n$	1	2	3	4
$\lambda_n$	3,1966	6,3124	9,4445	12,5812
$\beta_n$	-0,7100	-0,8380	-0,8884	-0,9117

Решението (2.74) удовлетворява граничните условия, затова константите  $A_n$  определяме от началното условие. Като заместим (2.74) и (2.73) в (2.72), получаваме



$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n z_1(\lambda_n \xi) = -v_s,$$

където

$$z_1(\lambda_n \xi) = J_1(\lambda_n \xi) + \beta_n N_1(\lambda_n \xi).$$

От условието за ортогоналност

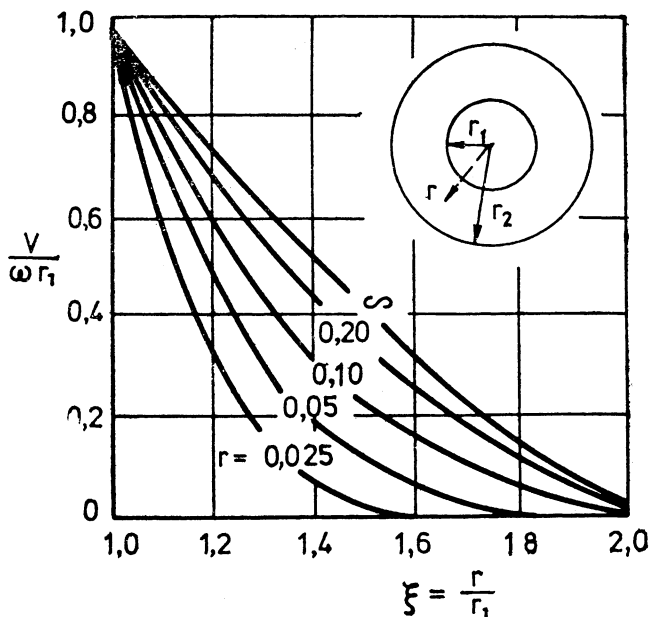
$$\int_1^{\frac{r_2}{r_1}} \xi z_1(\lambda_n \xi) z_1(\lambda_m \xi) d\xi = 0, \quad m \neq n$$

намираме

$$A_n \int_1^{\frac{r_2}{r_1}} \xi z_1^2(\lambda_n \xi) d\xi = - \int_1^2 \xi v_s z_1(\lambda_n \xi) d\xi,$$

т. е.

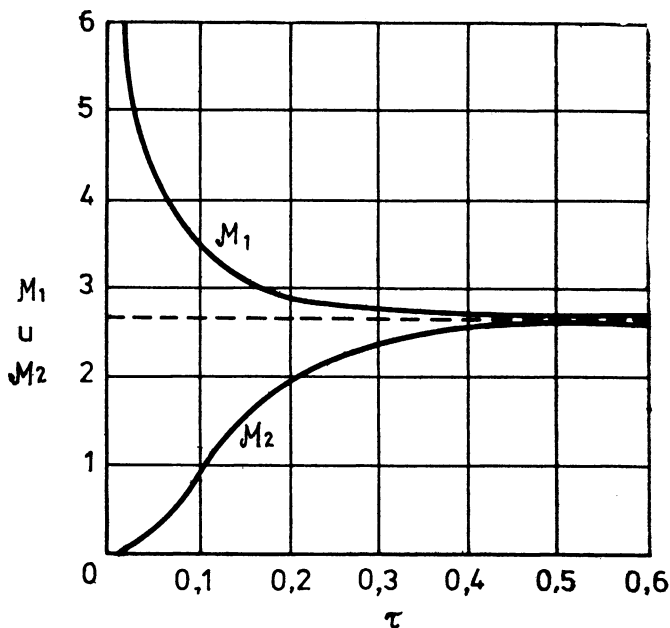
$$A_n = \frac{2\omega r_1 z_0(\lambda_n)}{\lambda_n \left[ \frac{r_2^2}{r_1^2} z_0^2\left(\frac{r_2}{r_1} \lambda_n\right) - z_0^2(\lambda_n) \right]}.$$



Фиг. 3

На фиг. 3 е показано разпределението на скоростта в областта между цилиндрите, а на фиг. 4 са дадени моментите, действава-

щи върху двата цилиндъра в зависимост от времето. При малки стойности на времето  $t$  течността близо до външния цилиндър е в покой, но поради вискозността с течение на времето тя започва да се движи. Стационарният режим на течението се определя главно от първия член на разлагането, при който  $\lambda_1 = 3,1966$ .



Фиг. 4

### 2.2.5. Нестационарно надлъжно течение между два концентрични кръгови цилиндъра

Да разгледаме течението между два концентрични кръгови цилиндъра, породено от постоянен надлъжен градиент на налягането  $\Delta p$ , който започва да действа в момента  $t=0$ . Разпределението на скоростта  $u(r, t)$  се определя от следната начално-гранична задача:

$$(2.76) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ u(r, 0) &= 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \\ u(r_1, t) &= 0, \quad u(r_2, t) = 0. \end{aligned}$$

Отделяйки стационарната част (2.73) на решението, аналогично на 2.2.4 получаваме

$$u = u_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z_0(\lambda_n \xi) e^{-\lambda_n^2 \tau},$$

където

$$u_s = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} \left[ (r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - (r^2 - r_1^2) \right],$$

$$z_0(\lambda_n \xi) = J_0(\lambda_n \xi) + \beta_n N_0(\lambda_n \xi).$$

От началното условие за константите  $A_n$  намираме

$$A_n = \frac{2 \left( -\frac{\Delta p}{\mu L} r_1^2 \right)}{\lambda_n^3 [L z_1(\alpha \lambda_n) + z_1(\lambda_n)]},$$

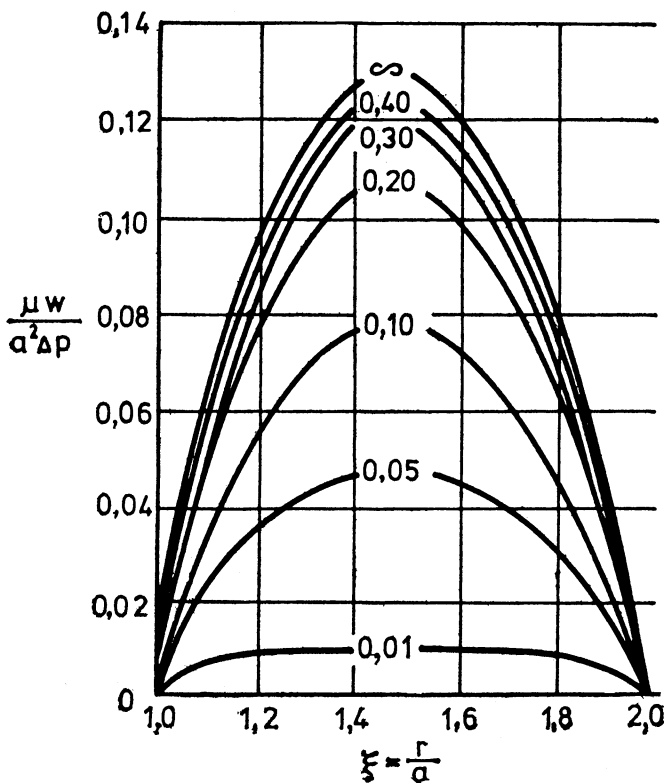
където  $L = \frac{r_2}{r_1}$  и  $\lambda_n, \beta_n$  са корени на системата уравнения

$$z_0(\lambda_n) = 0, \quad z_0(\alpha \lambda_n) = 0.$$

При  $\alpha = 2$  за първите четири корена получаваме:

$n$	1	2	3	4
$\lambda_n$	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614
$\beta_n$	0,8922	0,9430	0,9610	0,9703

Разпределението на скоростта е дадено на фиг. 5.



Фиг. 5

## 2.2.6. Ротационни осцилации на кръгов цилиндър

Нека кръгов цилиндър с радиус  $a$  се намира в безкраен вискозен флуид. Да разгледаме движението на флуида, породено от ротационните осцилации на цилиндъра около собствената му ос. Въвеждаме цилиндрична координатна система  $(r, \varphi, z)$ , чиято ос  $z$  съвпада с оста на цилиндъра. Като предположим, че движението на флуида е ососиметрично и кръгово ( $v_r = v_z = 0$ ), намираме, че скоростта  $v_\varphi$  удовлетворява уравненията

$$(2.77) \quad -\frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right),$$

където  $p$  е налягането. Скоростта  $v_\varphi$  намираме, като използваме второто уравнение и граничните условия

$$\begin{aligned} v_\varphi(r, t) &= v e^{i\omega t} \text{ при } r=a, \\ v_\varphi &\rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Полагаме  $v_\varphi = F(r) \cdot e^{i\omega t}$ . Тогава  $F(r)$  удовлетворява уравнението

$$(2.78) \quad \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{\nu} \right) F = 0$$

и условията

$$F(a) = v, \quad F(\infty) = 0.$$

Ако допуснем, че  $y = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} r$ , получаваме беселово обикновено диференциално уравнение с комплексен аргумент

$$(2.79) \quad \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dF}{dy} - \left( 1 + \frac{1}{y^2} \right) F = 0,$$

общото решение на което има вида

$$F(y) = A I_1(y) + B K_1(y).$$

Или

$$(2.80) \quad F(r) = A I_1 \left( r \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right) + B K_1 \left( r \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right),$$

където  $I_1(x)$  е функция на Бесел от първи род с имажинерен аргумент, а  $K_1(x)$  е функция на Макдоналд от първи род. Прилагайки граничните условия и като вземем предвид, че  $|I_1(x)| \rightarrow \infty$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ , за компонентите  $A$  и  $B$  намираме

$$A = 0, \quad B = \frac{v}{k_1 \left( a \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)}.$$

Като означим с  $k_{er_1}(x)$  реалната, а с  $k_{ei_1}(x)$  имагинерната част на функцията на Макдоналд, получаваме

$$B = \frac{v \left[ k_{er_1} \left( a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) - i k_{ei_1} \left( a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) \right]}{k_{er_1}^2 \left( a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) + k_{ei_1}^2 \left( a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right)}.$$

Следователно

$$(2.81) \quad v_\varphi = \frac{v}{k_{er_1}^2 \left( a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) + k_{ei_1}^2 \left( a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right)} \times \\ \times \left\{ \cos \omega t k_{er_1} \left( r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) - \sin \omega t k_{ei_1} \left( r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) \right\}.$$

### § 2.3. НЕЛИНЕЙНИ АВТОМОДЕЛНИ РЕШЕНИЯ

*Явления, развиващи се във времето, се наричат автомоделни, ако разпределението на характеристиките им в различни моменти се получават едно от друго чрез преобразувания на подобие (афинни преобразувания).* Разбира се, вместо времето  $t$  може да стои коя да е друга геометрична координата или физическа величина. Като се използва автомоделността на задачата, много често съответните частни диференциални уравнения се свеждат към обикновени диференциални уравнения. Решенията на тези уравнения се наричат също *точни*, защото решението на всяко обикновено диференциално уравнение може да се получи с произволно зададена точност с помощта на добре изучени методи. Това решение не е задължително да се представи в аналитичен вид, то може да бъде числено, което в редица случаи е за предпочитане.

Разгледаните в § 2.1 нестационарни решения за преноса на завихреността са най-простият пример от този вид. Решението (2.3) съдържа функция само на променливата  $\zeta$ , която представлява безразмерен комплекс, съставен от две независими променливи  $y$ ,  $t$  и физическата константа  $\nu$ :

$$\zeta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}.$$

С помощта на тази нова променлива бе намалена размерността на задачата — броят на независимите променливи бе намален от две на една. Този подход за преминаване към нови променливи и намаляване на размерността на задачата е типичен за автомоделните решения.

### 2.3.1. Разтичане на течност близо до твърда повърхност

Нека двумерен поток от вискозна течност се движи в перпендикулярна посока към твърда повърхност. Да разгледаме движението на течността в околността на линиите на разтичане (К. Хименц, 1911 г.; Л. Хоуърт, 1935 г.).

Въвеждаме координатна система  $Oxy$ , в която  $y=0$  съответствува на твърдата повърхност, а  $x=0$ ,  $y=0$  — на критичната точка. Да предположим, че далече от повърхността

$$(2.82) \quad u(x, y) = ax, \quad y \rightarrow \infty.$$

Това разпределение на скоростта се съгласува с решението на задачата за разтичане на идеална течност. Решението на уравненията на Ойлер за този случай има вида

$$u = ax, \quad v = -ay, \quad p = p_a - \frac{1}{2} \rho a^2 (x^2 + y^2).$$

Върху твърда повърхност вследствие условието за полепване компонентите на скоростта са равни на нула:

$$(2.83) \quad u = 0, \quad v = 0, \quad y = 0.$$

Трябва да се намери решение на двумерните уравнения на Навие — Стокс:

$$(2.84) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

което да удовлетвори граничните условия (2.82), (2.83).

Формулировката на тази задача не съдържа характерен линейен размер, а решението се определя от два параметъра  $\nu$  и  $a$  с размерности  $[\nu] = \text{см}^2/\text{сек}$ ,  $[a] = 1/\text{сек}$ . От тези параметри може да се получи мащаб на дължината  $\sqrt{\nu a^{-1}}$  и мащаб на скоростта  $\sqrt{\nu a}$ . Да преминем към безразмерни променливи

$$\eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad \zeta = x \sqrt{\frac{a}{\nu}}$$

и да търсим решение от вида

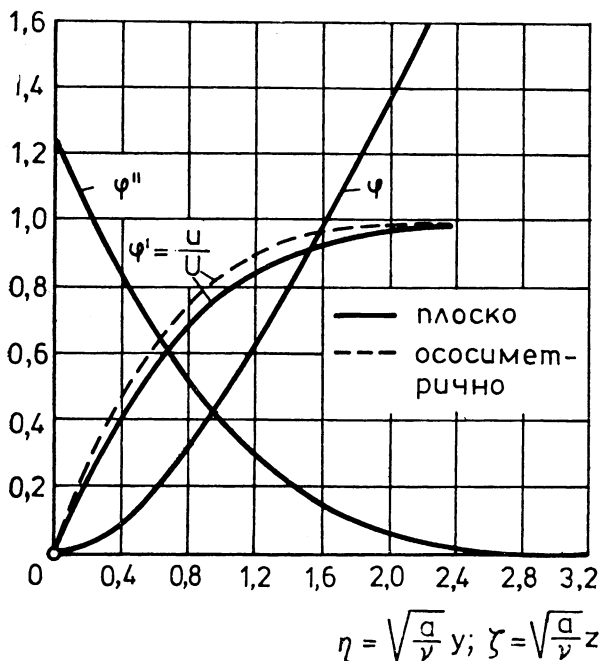
$$(2.85) \quad u = \sqrt{a\nu} \zeta \varphi'(\eta); \quad v = -\sqrt{a\nu} \varphi(\eta); \quad p = p_a - \frac{1}{2} \rho a \nu [\zeta^2 + F(\eta)].$$

След заместване в (2.84) получаваме следните уравнения:

$$(2.86) \quad \begin{aligned} \varphi''' + \varphi \varphi'' - \varphi'^2 + 1 &= 0, \\ \frac{1}{2} F' &= \varphi'' + \varphi \varphi'. \end{aligned}$$

Уравнението на непрекъснатостта се удовлетворява тъждествено. Граничните условия за  $\varphi$  трябва да осигуряват съгласуване с условията (2.82) и (2.83):

$$(2.87) \quad \begin{aligned} \varphi=0, \quad \varphi'=0, \quad \eta=0, \\ \varphi' \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$



Фиг. 6

Функцията  $F(\eta)$  се определя, след като бъде намерено скоростното поле.

Решението на граничната задача (2.86), (2.87) се извършва числено. При изследванията в механика на флуидите много често се среща численото решаване на гранични задачи за нелинейни обикновени диференциални уравнения. Този проблем е достатъчно добре изучен. Съществуват надеждни алгоритми, за всеки от които може да се състави програма за ЕИМ и да се извършат необходимите изчисления. Някои от тези общи методи са дадени в глава VI. Обикновено резултатите от численото решаване се представят във вил на таблици или графики. На фиг. 6 са дадени резултатите от решението на задача (2.86), (2.87).

Ще отбележим, че при  $\eta=2,4$  функцията  $\varphi'(\eta)$  се различава от 1 с по-малко от 0,01, затова от  $\eta=y\sqrt{\frac{a}{\nu}}$  следва, че за дебелина на вискозния слой около твърдата повърхност може да се приеме

$$\delta \approx 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{a}}.$$

Решението (2.85) може да се обобщи и за ососиметрично течение в околността на точката на разтичане (Ф. Хоман, 1936 г.). Вместо (2.84) трябва да се използва системата уравнения на Навие — Стокс и уравнението на непрекъснатостта в цилиндрични координати (вж. т. 1 от приложението), като вземем предвид, че  $v_\theta = 0$  и че решението зависи само от  $r$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \\ (2.88) \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rv)}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Тук са използвани означенията  $u$  и  $v$  вместо  $v_r$  и  $v_z$ .

По аналогия с равнинния случай решението за ососиметричното движение търсим във вида

$$\begin{aligned} (2.89) \quad u &= \sqrt{a\nu} \zeta f'(\eta), \quad v = -2\sqrt{a\nu} f(\eta), \\ p &= p_a - \frac{1}{2} \rho a \nu [\zeta^2 + F(\eta)], \\ \zeta &= r \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad \eta = z \sqrt{\frac{a}{\nu}}. \end{aligned}$$

Тук вместо  $x$  и  $y$  се използват  $r$  и  $z$  и в израза за  $v$  е въведен множител, за да се удовлетвори тъждествено уравнението на непрекъснатостта за ососиметричните течения. Като заместим в (2.88), получаваме следната задача за  $f(\eta)$ :

$$\begin{aligned} (2.90) \quad f''' + 2ff'' - f'^2 + 1 &= 0, \\ f &= 0, \quad f' = 0, \quad \eta = 0, \\ f' &\rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Разликата между двата случая — плоския и ососиметричният, е само един коефициент. Функцията  $f(\eta)$  е показана с пунктирна линия на фиг. 6 и, както се вижда, малко се различава от  $\varphi(\eta)$ .

Решенията (2.85) и (2.89) са валидни и при обтичане на крайни тела, но в малка околност на линиите (точките) на разтичане, тъй като с отдалечаването от тях повърхността на тялото се отклонява силно от равнината.

Задачата за разтичане на течността близо до твърда повърхност допуска интересни обобщения, позволяващи демонстрирането на важни свойства на уравненията на Навие — Стокс, които са свързани със съществуването и единствеността на решенията.



Да разгледаме течението на вискозна течност между две равнини  $y = \pm l$ , като допуснем, че компонентите на скоростта са зададени върху тях по следния начин:

$$(2.91) \quad u = ax, \quad v = 0, \quad y = \pm l.$$

Трябва да се определи двумерното течение между равнините при тези условия (Дж. Брейди, А. Акривос, 1981 г.).

Да изберем за характерен линеен размер и характерна скорост съответно  $l$  и  $al$ . Тогава от уравнение (2.84) по аналогия на (2.85)

$$(2.92) \quad \begin{aligned} u &= al\zeta f'(\eta), \quad v = -alf(\eta), \\ p &= \frac{1}{2} \rho a^2 v [\beta \zeta^2 + F(\eta)]. \end{aligned}$$

Заместваме в (2.84) и получаваме за определянето на функцията  $f$  уравнението

$$(2.93) \quad f''' - \beta = \text{Re} (f'^2 - ff'').$$

Като вземем предвид, че поради симетрията може да разглеждаме решението само в половината ивица  $0 \leq \eta \leq 1$ , от (2.91) намираме граничните условия

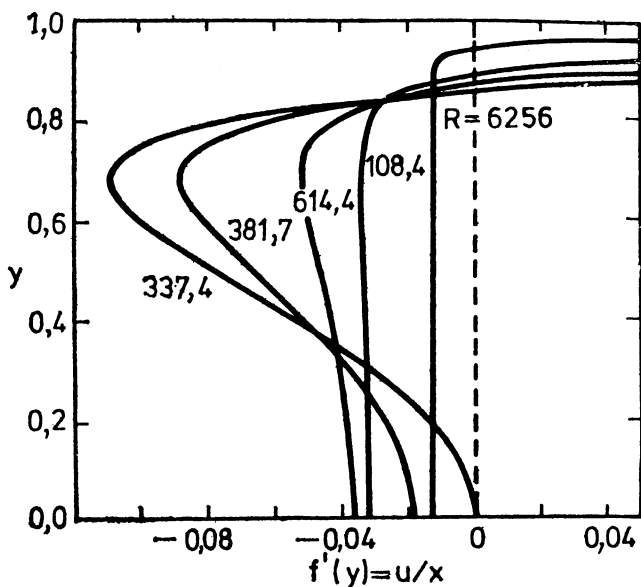
$$(2.94) \quad \begin{aligned} f(0) &= f''(0) = 0, \\ f(1) &= 0, \quad f'(1) = 1. \end{aligned}$$

Тук  $x = l\zeta$ ,  $y = l\eta$ ,  $\text{Re} = al^2v^{-1}$ . Граничната задача (2.93), (2.94) зависи от единствен параметър — числото на Рейнолдс. Параметърът  $\beta$  трябва да се определя в процеса на решението, тъй като уравнението (2.93) има трети порядък, а допълнителните условия (2.94) са четири.

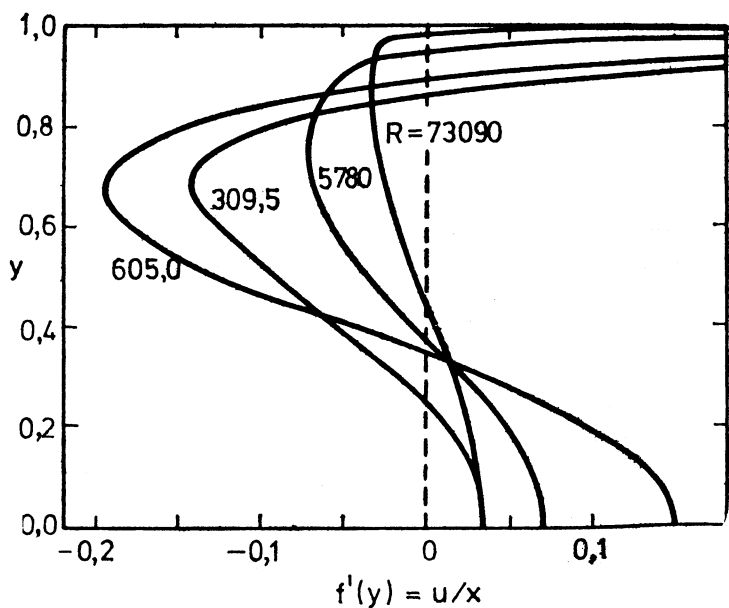
Решението (2.92) може да се разглежда като течение в равнинен канал, стените на който извършват ускорено движение в собствените си равнини, съгласно закона (2.91). Течността се разтича от равнината  $x=0$  и се движи в централната част на канала по направлението  $x=0$ . Като изоставим въпроса за хидродинамичния смисъл на това решение, ще разглеждаме (2.92) като точно решение на уравненията на Навие—Стокс, които се свеждат към граничната задача (2.93), (2.94) за обикновено диференциално уравнение. Пълното изследване на тази задача може да се извърши само числено. В шеста глава е описан числен алгоритъм за намиране съответната стойност на  $\beta$  и за пресмятане на  $\text{Re}$ .

Численият анализ показва, че за всяка стойност на  $\text{Re}$  от интервала  $0 < \text{Re} < 310$  съществува единствена стойност на  $\beta$  и единствена функция  $f(\eta)$ . При  $\text{Re} > 310$  за всяко  $\text{Re}$  съществуват три стойности на  $\beta$  и три решения  $f(\eta)$ . Това свойство на граничната задача се запазва за всяка стойност на числото на Рейнолдс  $310 < \text{Re} < 90400$ , за която са извършени числени пресмятания и се потвърждава от асимптотичните изследвания при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ .

На фиг. 7, 8, 9 са показани три семейства профили на надлъжната компонента на скоростта  $u/xa = f'(\eta)$ . Характерна особеност е наличието на зони на обратно течение.

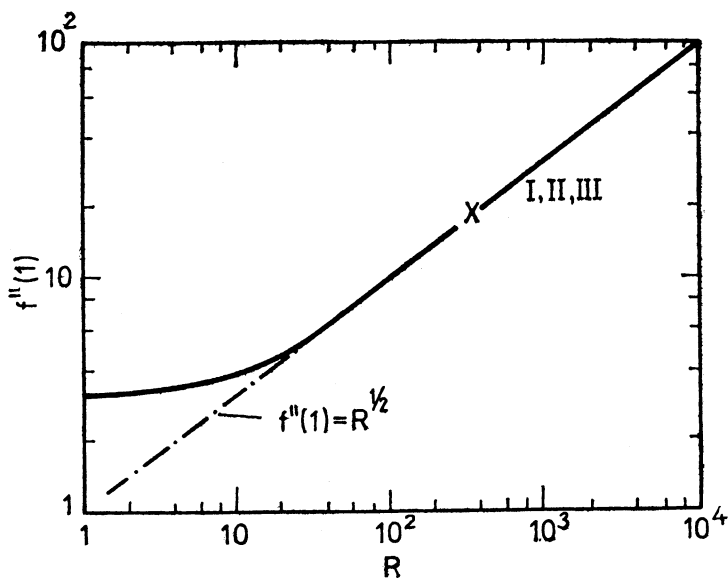
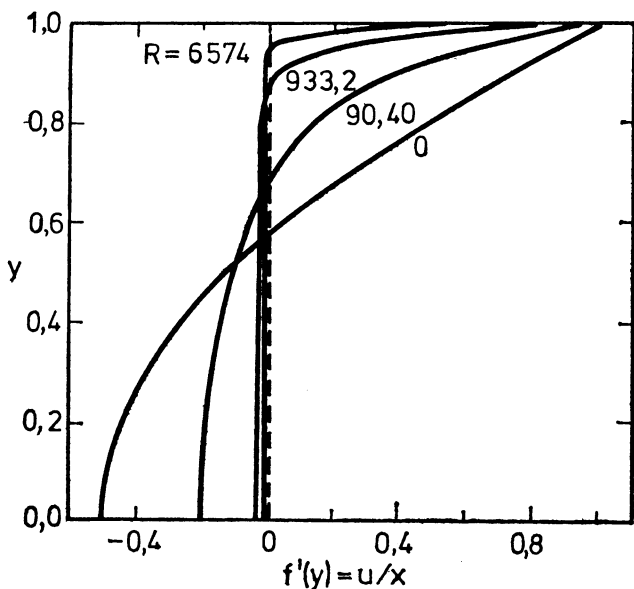


Фиг. 7



Фиг. 8

В теченията, които съответствуват на първото и второто семейство, скоростта е положителна в слоевете до граничните повърхнини и отрицателна в централната част на ивицата. При



Фиг. 9

малки  $Re$  профилите от второто семейство имат инфлексна точка, а профилите от първото — нямат. При по-големи  $Re$  първото и второто семейство имат еднакво асимптотично поведение — скоростта е почти еднаква в централното ядро и рязко се изменя в слоевете близо до границите. Профилите от третото семейство са по-сложни — в централната част се формира една зона на обратно течение и две зони на разтичане. Близо до границите се образуват тънки слоеве.

Още по-сложно поведение имат автомоделните решения от разглеждания вид в ососиметричния случай, когато условията за разтичане се поставят на повърхността на тръбата:

$$v_z = az, \quad v_r = 0, \quad r = l.$$

За компонентите на скоростта тук записваме

$$\eta v_z = al\zeta f'(\eta), \quad \eta v_r = -alf(\eta), \quad p = \frac{1}{2} \rho a v [\beta \zeta^2 + F(\eta)],$$

където  $r = l\eta$ ,  $l\zeta = z$ . Тогава уравнението на непрекъснатостта се удовлетворява тъждествено и за функцията  $f(\eta)$  получаваме уравнението

$$(2.95) \quad \frac{1}{\eta} \left( \eta \left( \frac{1}{\eta} f' \right)' \right)' - \beta = Re \frac{1}{\eta^3} [\eta (f'^2 - ff'') + ff'],$$

Граничните условия се поставят на оста и на повърхността на тръбата:

$$(2.96) \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 1.$$

Численото изследване на граничната задача (2.95), (2.96) показва, че при  $Re \leq 10,25$  има две решения: при  $10,25 < Re < 147$  решение не може да се получи; при  $Re > 147$  има няколко решения. Въпреки че числените решения не притежават силата на строго доказателство, анализът на поведението на решенията дава основание да се направи изводът, че в интервала  $10,25 < Re < 147$  не съществуват решения.

Задачата за разтичане на течност отразява сложните свойства на уравненията на Навие — Стокс за съществуване и единственост на решенията в случаите, когато скоростта на течението расте неограничено с отдалечаването към безкрайност.

### 2.3.2. Течение в разширяващ се канал

Съдържателен клас точни решения се получава в случая, когато флуидното течение е заключено между две равнинни стени, които сключват ъгъл, равен на  $2\alpha$ . Свойствата на течението силно се променят в зависимост от потока (свиващ се или разширяващ се канал) и големината на  $\alpha$  (Г. Джефри, 1915 г.; Г. Хамел, 1916 г.).

Нека има две равнинни стени  $\varphi = \pm\alpha$ . Да разгледаме чисто радиалното течение между тях. В този случай уравненията на

Навие — Стокс (вж. т. 1 от приложението), записани в цилиндрична координатна система  $r, \varphi, z$ , значително се опростяват:

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{v}{r^2} \right),$$

$$(2.97) \quad 0 = -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0.$$

Като интегрираме най-напред третото уравнение, а след това второто, получаваме

$$(2.98) \quad rv = F(\varphi),$$

$$\frac{1}{\rho} p = \frac{2\nu}{r^2} F(\varphi) + f_1(r).$$

След заместване на  $v$  и  $p$  в първото уравнение намираме

$$(2.99) \quad \nu F'' + F^2 + 4\nu F = r^3 f_1'(r) \equiv C.$$

Тук е използвана единствената възможност за избор на функцията  $f_1(r)$  — дясната страна на (2.99) трябва да бъде константа. Това уравнение може да се интегрира веднъж, ако го умножим по  $F'$ :

$$(2.100) \quad \frac{1}{2} \nu F'^2 + \frac{1}{3} F^3 + 2\nu F^2 - CF = C_1.$$

Тъй като съгласно условието за полепване върху твърда повърхност  $F(\pm\alpha) = 0$ , трябва да съществува поне една точка  $\varphi_*$  в областта  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ , за която  $F'(\varphi_*) = 0$ . Ако означим с  $F_0$  стойността на  $F$  в точката  $\varphi_*$ , в която  $F$  достига максимума си, тогава за константата на интегриране  $C_1$  получаваме

$$C_1 = -\frac{1}{3} F_0^3 + 2\nu F_0^2 - CF_0.$$

Нека въведем безразмерни променливи  $\eta$  и  $f(\eta)$  по следния начин:

$$\alpha\eta = \varphi, \quad F_0 f = F.$$

Записваме уравнението (2.100) във вида

$$(2.101) \quad f'^2 = (1-f) \left[ \frac{2}{3} \text{Re} \alpha^2 (f^2 + f) + 4\alpha^2 f + b \right].$$

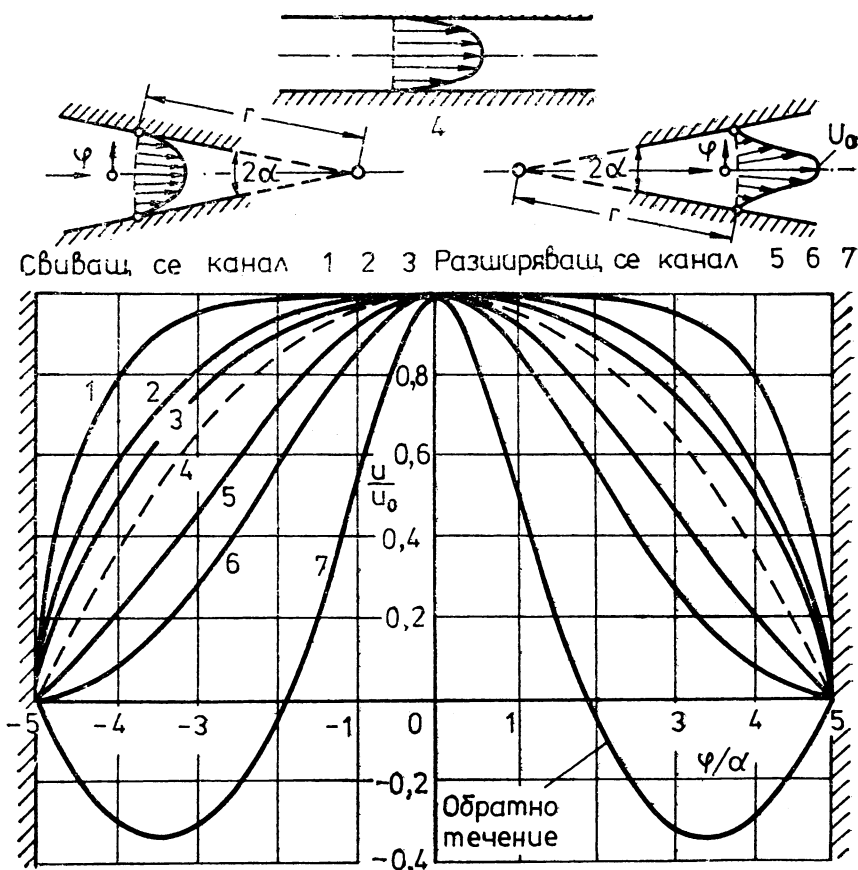
Като вземем предвид избора на  $F_0$ , получаваме, че решението на (2.101) трябва да удовлетворява условията

$$f = 0, \quad \eta = \pm 1, \quad f = 1, \quad f' = 0.$$

Тъй като  $b = f'^2$  при  $\eta = \pm 1$ , константата от интегрирането  $b$  е неотрицателна. Решението на уравнението (2.101) се определя от два параметъра —  $\alpha$  и  $\text{Re} = F_0 \nu^{-1}$ . На теченията в свиващ се канал съответствуват стойности на  $\text{Re} < 0$ , а на течения в разширяващ се канал — стойности на  $\text{Re} > 0$ .

Интегрирането на уравнение (2.101) води до разглеждане на елиптични функции. На фиг. 10 са дадени числените решения за  $f(\eta)$  при различни стойности на  $\alpha Re$  и  $\alpha = 5^\circ$  (К. Милсапс, К. Полхаузен, 1953 г.), като на кривите 1—7 съответствуват следните стойности:

$$\alpha Re = -38,0; -10,31; -5,20; 0; 5,20; 10,31; 38,0.$$



Фиг. 10

Както аналитичното, така и численото изследване показват, че теченията в свиващ се ( $Re < 0$ ) и разширяващ се ( $Re > 0$ ) канал се различават много. В свиващ се канал флуидните частици близо до твърди стени се ускоряват, а в разширяващ се канал — се забавят. В първия случай за всяка стойност на  $Re$  съществува симетрично решение. С увеличаването на  $|Re|$  близо до стени-те се образуват тънки зони, в които скоростта рязко намалява

до нула, а в централната част на канала скоростта е почти постоянна.

Във втория случай, съответстващ на разширяващ се канал, решението съществува само до някаква немного голяма стойност на  $Re$ . При по-натъшното увеличаване на  $Re$  близо до стените се появяват обратни течения, в които течността се движи в обратно направление — в посока към началото на координатната система. За решенията, представени на фиг. 10, критичната стойност на числото на Рейнолдс се определя от равенството  $\alpha Re = 10,31$ . Този резултат е типичен и за много други течения на вискозни флуиди — при увеличаване числото на Рейнолдс в разширяващи се потоци се образуват обратни течения. При големи положителни стойности на  $\alpha Re$  се появява още едно важно свойство на решението — неединственост, когато могат да се построят решения с няколко зони с обратно течение.

В реалните разширяващи се потоци между твърди стени зоната на обратното течение се формира в някоя точка, отдалечена от началото, и не се простира по цялата стена. В такива случаи автомоделните решения не са приложими.

### 2.3.3. Течение близо до въртящ се диск

Да разгледаме ососиметричното течение, предизвикано от въртенето на безкрайна твърда стена в собствената си равнина около неподвижна точка (Т. Карман, 1921 г.). В цилиндрична координатна система  $r, \varphi, z$ , чиято ос  $Oz$  минава през центъра на въртенето, течението зависи само от  $r$  и  $z$ . Тогава системата уравнения (1.54) се опростява и приема вида

$$(2.102) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \nu \left( \Delta v - \frac{v}{r^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Тук са използвани означенията  $u, v, w$  вместо  $v_r, v_\varphi, v_z$  и

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничните условия изразяват полепване на течността по повърхност и затихване на движението далече от диска:

$$(2.103) \quad \begin{aligned} u=0, \quad v=r\omega, \quad w=0, \quad z=0, \\ u=0, \quad v=0, \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Така, както може да се очаква, условие на затихване за  $w$  не

се поставя, а и от самото решение следва, че течността се увеличава към диска по направление на оста  $Oz$ .

В тази задача няма характерен линейен размер, но има два размерни параметъра  $\nu$  и  $\omega$ . От тях може да се състави мащаб за дължина  $\sqrt{\nu\omega^{-1}}$  и мащаб за скорост  $\sqrt{\nu\omega}$ . Да преминем към безразмерни променливи

$$\zeta = z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad \bar{r} = r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

и да търсим решение на задачата във вида

$$(2.104) \quad u = \bar{r}\sqrt{\nu\omega} F(\zeta), \quad v = \bar{r}\sqrt{\nu\omega} G(\zeta), \\ \omega = \sqrt{\nu\omega} H(\zeta), \quad p = \rho\nu\omega p_1(\zeta).$$

След като заместим тези изрази в уравненията (2.102), получаваме следната система обикновени диференциални уравнения:

$$(2.105) \quad \begin{aligned} H' + 2F &= 0, \\ F'' + G^2 + F'H - F^2 &= 0, \\ G'' - G'H - 2FG &= 0, \\ H'' - H'H - p_1' &= 0. \end{aligned}$$

Гранични условия за функциите  $F, G, H$  извеждаме от (2.103):

$$(2.106) \quad \begin{aligned} F=0, \quad G=1, \quad H=0, \quad \zeta=0. \\ F \rightarrow 0, \quad G \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Уравнението за функцията на налягането  $p_1(\zeta)$  може да бъде решено, след като се намери полето на скоростта.

На фиг. 11 са представени резултатите, получени от численото решение на задача (2.105), (2.106) (В. Кохрен, 1934 г.). Както следва от численото решение,  $H \rightarrow -0,886$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Това означава, че далече от диска има течение, насочено към него. При това идващата към диска флуидна маса се изтласква от центробежните сили. За всяко  $r$  ротационната скорост  $v_\varphi$  намалява в направление  $z$  и на разстояние  $\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$  тя е равна на половината от стойността си върху диска. Ако  $\delta$  е малко, то течение фактически съществува само в тънък слой близо до диска. Частиците на течността се движат по спирални траектории. Ъгълът  $\theta$  между траекторията на частицата и окръжността  $r = \text{const}$  от диска се определя от равенството

$$\text{tg } \theta = -\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\partial u}{\partial z} / \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{F'(0)}{G'(0)}.$$

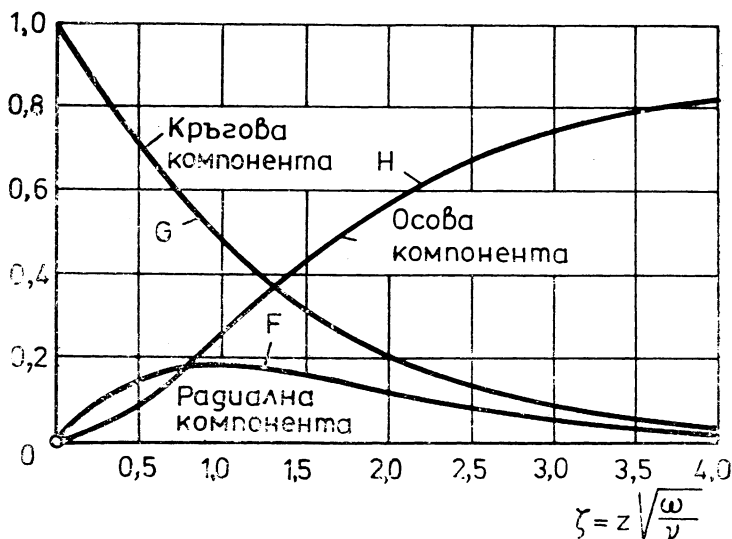
От числените резултати  $F'(0) = 0,510$ ,  $G'(0) = -0,616$ . Следователно  $\theta = 39,6^\circ$  независимо от големината на скоростта на въртене и вискозния коефициент  $\nu$ .

Моментът на силите на съпротивление, които действуват на повърхността на кръг с радиус  $R$ , е равен на



$$M = -2\pi \int_0^R r^2 p_{z\varphi} dr.$$

Тъй като от полученото решение за  $P_{z\varphi}$  при  $z=0$



Фиг. 11

$$p_{z\varphi} = M \frac{\partial v}{\partial z} = \rho r \sqrt{\frac{1}{2} \omega} \frac{3}{2} G'(0),$$

то за момента  $M$  получаваме

$$M = 0,616\pi\rho R^4 \sqrt{\frac{1}{2} \omega} \frac{3}{2}.$$

Ако има течност и от двете страни на диска, то тази величина следва да се удвои. Да въведем *коэффициент на съпротивлението*  $C_M$  посредством равенството

$$2M = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^5 C_M.$$

Тогава

$$C_M = 3,87 \text{Re}^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{Re} = \frac{R^2 \omega}{\nu}.$$

Тази теоретична формула се потвърждава от експеримента много добре до  $\text{Re}_k \approx 3 \cdot 10^5$ . При  $\text{Re} > \text{Re}_k$  течението става неустойчиво и преминава към турбулентен режим. Разбира се, експериментите могат да се извършат само с диск, имащ краен ра-

диус  $R$ , като величината  $R$  трябва да бъде много по-голяма от дебелината  $\delta$  на слоя течност, увеличащ се от въртящия се диск.

Решението на задача (2.105), (2.106) се оказва важно в случая, когато течността извършва въртене заедно с диска като твърдо тяло. Нека  $\varepsilon = \frac{\Omega}{\omega}$ ; тогава в постановката на задача (2.105), (2.106) се изменят само граничните условия  $G \rightarrow \varepsilon$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Изследванията с числени методи показват, че единствено решение съществува при  $-0,6879 < \varepsilon < \infty$ ; за стойности на  $\varepsilon < -6,2298$  решението не е единствено (Д. Дийкотра, П. Занденберг, 1977 г.); решение не съществува при  $-6,211 < \varepsilon < -0,6879$  (Д. Еванс, 1969 г.). Тези граници за  $\varepsilon$  са получени числено и могат да бъдат уточнени при строг анализ.

### 2.3.4. Кръгова струя

В ососиметричния случай има аналог на решение (2.98), но това решение не съответствува, както би могло да се очаква, на течение в конус, а на течение в струя (Н. А. Слезкин, 1934 г.; Л. Д. Ландау, 1944 г.) Да запишем уравненията на Навие — Стокс (вж. т. 2 от приложението) в сферична координатна система  $r, \theta, \varphi$  за случая, когато течението не зависи от  $\varphi$  и  $v_\varphi = 0$ :

$$(2.107) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v \cot \theta}{r^2} \right),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} \right),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r^2 u}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \theta v}{\partial \theta} = 0.$$

Тук са използвани  $u$  и  $v$  вместо  $v_r$  и  $v_\theta$ :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

По аналогия с (2.98) решение на системата (2.107) търсим във вида

$$(2.108) \quad u = \frac{\nu}{r} F(\eta), \quad v = \frac{\nu}{r} G(\eta),$$

$$p = p_0 + \rho \left( \frac{\nu}{r} \right)^2 p_1(\eta), \quad \eta = \cos \theta.$$

Уравнението на непрекъснатостта се удовлетворява тъждествено, ако положим

$$F = -f'(\eta), \quad G = -\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} f(\eta).$$

Тези съотношения се получават най-просто, ако се въведе токова функция чрез равенството  $\psi(r, \theta) = \nu r f(\eta)$  и след това се пресметнат  $u$  и  $v$  от формулите

$$u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

От първите две уравнения на (2.107) получаваме

$$p_1 = -\frac{1}{2} f^2 \frac{1}{1-\eta^2} - \frac{1}{2} [ff' - (1-\eta^2)f''],$$

$$p_1' = -f'' - \frac{1}{2} \left[ f^2 \frac{1}{1-\eta^2} \right]'$$

След еднократно интегриране на второто уравнение и след заместване на  $p_1$  и интегриране на първото намираме

$$(2.109) \quad p_1 = -\frac{1}{2(1-\eta^2)} f^2 - f' - \frac{1}{2} C_1,$$

$$2ff' = 2(1-\eta^2)f'' + 4f + 2C_1\eta + C_2.$$

Уравнението (2.109) допуска още едно интегриране. В резултат на това стигаме до следното обикновено диференциално уравнение от първи ред:

$$(2.110) \quad -2(1-\eta^2)f' + f^2 - 4\eta f = C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3,$$

което съдържа три произволни константи  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Ще отбележим, че ако течението няма особеност върху оста  $\eta=1$ , то единствено възможната форма на дясната страна на това уравнение има вида

$$(2.111) \quad C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3 = C_1(1-\eta)^2.$$

Наистина нека компонентата на скоростта  $v$  е крайна при  $\eta=1$ . Въз основа на (2.108)  $f(1)=0$ . Нека компонентата на скоростта  $u$  е също крайна при  $\eta=1$ ; тогава  $f'(1)=A_1$  и следователно  $f \sim A_1(1-\eta)$ , т. е. от (2.110) следва (2.111). Ако предположим, че течението също няма особености при  $\eta=-1$ , то аналогични разсъждения водят до извода, че

$$(2.112) \quad C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3 = C_1(1+\eta)^2.$$

Като сравним (2.111) с (2.112), заключаваме, че  $C_1=0$  за течения без особености при  $\eta=\pm 1$ .

В този случай уравнението (2.110) се интегрира

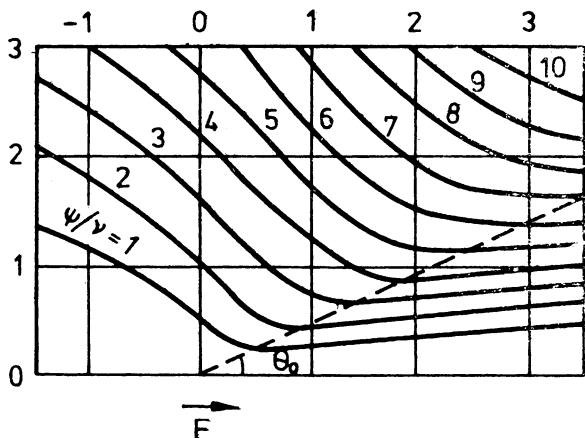
$$(2.113) \quad f = \frac{2(1-\eta^2)}{1+C-\eta},$$

където  $C$  е константа. Полученото решение има особености само в точката  $r=0$ . На фиг. 12 са показани токовите линии при  $C=0,1$ . Вижда се, че това решение може да се изтълкува като течение в кръгла струя, изтичаща от началото на координатната система в заобикалящата течност. Да въведем условна граница на струята като повърхност, пресичаща токовите линии в точките, които са най-малко отдалечени от оста. При малки  $C$  границата на струята въз основа на (2.113) се определя от уравнението

$$\eta = \frac{1}{1+C} = \cos \theta_0.$$

Да разгледаме величината

$$\Pi_{rr} = -p_{rr} + \rho v_r v_{rr}.$$



Фиг. 12

наричана *плътност на потока*,  $r$  — *компонента на импулса в  $r$ -направление*. Като вземем предвид, че

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

и равенствата (2.108), (2.109), (2.113), за  $\Pi_{rr}$  получаваме

$$\Pi_{rr} = \frac{4\rho\nu^2}{r^2} \left[ \frac{(A^2-1)^2}{(A-\eta)^4} - \frac{A}{A-\eta} \right], \quad A = 1 + C.$$

Да изчислим пълния поток на импулса в направление на оста  $\theta$  през сфера с радиус  $r$  и с център в началото на координатната система:

$$\mathcal{P} = \int_S \Pi_{rr} \cos \theta dS = 2\pi \int_0^\pi \Pi_{rr} \cos \theta \sin \theta r^2 d\theta.$$

Изчисленията водят до резултата

$$(2.114) \quad \mathcal{P} = 16\pi\nu^2\rho A \left[ 1 + \frac{4}{5(A^2-1)} - \frac{1}{2} A \ln \frac{A+1}{A-1} \right].$$

Оказва се, че *потокът на импулса не зависи от радиуса*.

Тъй като сумарният поток на маса през произволна затворена повърхност, съдържаща началото на координатната система, е равен на нула, то поток на маса през началото на координатната система липсва. Следователно полученото решение може да се разглежда като струйно течение, което е породено от точков източник на импулс.

### 2.3.5. Течения с подаване и отнемане на флуид през твърда гранична повърхност

Важен начин за въздействие върху флуидните течения е подаването (вдихването) или отнемането (изсмукването) на флуид през дадена гранична повърхност. Такъв вид течения, за които са известни няколко прости решения, се срещат в много технически устройства (апарати).

Да разгледаме обтичането на безкрайна пластина от поток, който далече от повърхността е равномерен и има постоянна скорост  $U_\infty$ . Нека през твърдата граница има изсмукване с постоянна скорост  $-v_0$ . Ако координатната система  $x, y$  е свързана с пластината, трябва да бъдат удовлетворени следните гранични условия:

$$(2.115) \quad \begin{aligned} u &= 0, \quad v = -v_0, \quad y = 0, \\ u &\rightarrow U_\infty, \quad y \rightarrow \infty \quad (v_0 > 0). \end{aligned}$$

Оказва се, че решението на уравненията (2.84), което удовлетворява тези гранични условия, не зависи от  $x$ :

$$u = u(y), \quad v = -v_0, \quad p = \text{const.}$$

Тогава от (2.84) за  $u(y)$  получаваме уравнението

$$-v_0 u' = \nu u''.$$

Решението на това уравнение, което удовлетворява условията (2.115), има вида (Ф. Мередит, А. Грифиц, 1938 г.)

$$(2.116) \quad u = U_\infty \left[ 1 - \exp \left( -\frac{v_0 y}{\nu} \right) \right].$$

Тази формула е известна като *асимптотичен профил на скоростта при изсмукване*. При обтичане на полубезкрайна пластина с равномерен поток такъв профил се получава на достатъчно голямо разстояние от предния край.

Да предположим, че в пространството между две успоредни пластини равномерно през повърхностите им се подава флуид. Притокът на флуид в пространството, ограничено между пластините, трябва да се компенсира с отвеждането му в надлъжно направление. В резултат на това се образува течение в плосък канал с проницаеми стени. Ако разположим координатната система така, че  $y = \pm l$  да са уравненията на двете равнини, граничните условия на задачата се записват така:

$$u = 0, \quad v = \pm v_0, \quad y = \pm l.$$

Да въведем безразмерни променливи  $\eta = y l^{-1}$ ,  $\zeta = x l^{-1}$  и да разгледаме следното решение на уравненията (2.84):

$$(2.117) \quad u = v_0 \zeta f'(\eta), \quad v = -v_0 f(\eta).$$

Като заместим в (2.84) и изключим налягането, получаваме уравнение, което заедно с граничните условия (2.115) води до граничната задача (А. Берман, 1953 г.)

(2.118)

$$\begin{aligned} f'j'' - ff''' &= \text{Re}^{-1}f^{IV}, \\ f &= \pm 1, f' = 0, \eta = \pm 1, \\ \text{Re} &= \frac{lv_0}{\nu}. \end{aligned}$$

Тази гранична задача може да се реши числено при произволни стойности на параметъра  $\text{Re}$ . Аналитично решение се получава в граничните случаи на големи и малки стойности на  $\text{Re}$ :

$$f = \frac{1}{2} (3\eta - \eta^3), \quad \text{Re} \rightarrow 0,$$

$$f = \sin\left(\frac{1}{2} \pi \eta\right), \quad \text{Re} \rightarrow \infty.$$

Решението (2.117) описва разделянето на течността от сечението  $x=0$ . При малки стойности на  $\text{Re}$  профилът на скоростта  $u(y)$  във всяко сечение  $x$  е параболичен, а при големи — косинусоиден.

### 2.3.6. Разширяващ се сферичен мехур

При подводните взривове обикновено се образуват големи каверни (мехури), които имат сферична форма. Поради голямото налягане на газа вътре в каверната тя се разширява в радиално направление. Тъй като ускорението на това движение е много по-голямо от земното ускорение в първо приближение, действието на последното може да се пренебрегне (Дж. Тейлър, 1963 г.).

Да предположим, че вътре в каверната налягането на газа  $p_b$  се изменя с времето по някакъв закон, известен от данните, характеризиращи взрива. Тогава радиусът  $R$  на мехура също ще се изменя с времето. Ако скоростта на течението, породено от разширяващата се каверна (мехур), не е голяма, водата може да се разглежда като несвиваема течност.

При разширяването на единичен мехур в безкраен флуид има сферична симетрия, поради което е удобно да се избере сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$  с начало в центъра на мехура. Тогава скоростното поле на заобикалящата го течност ще има само радиална компонента

$$v_r = v_r(r, t), \quad v_\theta = 0, \quad v_\varphi = 0.$$

От уравненията на Навие — Стокс и на непрекъснатостта (вж. т. 2 от приложението), отчитайки симетрията на течението, за радиалната компонента на скоростта получаваме

$$(2.119) \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} = 0,$$

$$(2.120) \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2v_r}{r^2} \right).$$

За скоростта на движение на междофазовата граница

$$(2.121) \quad v_r(r, t) = \frac{dR}{dt}, \quad r = R,$$

а за налягането при  $r \rightarrow \infty$   $p(r, t) = p_{\text{атм}}$ . Като интегрираме (2.119), получаваме

$$v_r \cdot r^2 = C_1(t).$$

От (2.121) за  $C_1(t)$  намираме  $C_1(t) = \dot{R}R^2$ . Следователно

$$v_r = \frac{C_1(t)}{r^2} = \frac{\dot{R}R^2}{r^2}.$$

За да получим уравнение за изменението на радиуса  $R$  на мехура, намираме производните

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\ddot{R}R^2 + 2\dot{R}\dot{R}^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{-2\dot{R}\dot{R}^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} = \frac{6\dot{R}\dot{R}^2}{r^4}.$$

Като заместим в (2.120), намираме

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\ddot{R}R^2 + 2\dot{R}\dot{R}^2}{r^2} + \frac{2\dot{R}^2 R^4}{r^5}.$$

След интегриране по  $r$  получаваме

$$(2.122) \quad \frac{1}{\rho} p = \frac{R(\ddot{R}R + 2\dot{R}^2)}{r} - \frac{1}{2} \frac{R^4 \dot{R}^2}{r^4} + C.$$

От условието  $p = p_{\text{атм}}$  при  $r \rightarrow \infty$

$$C = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho}.$$

Тогава (2.122) добива вида

$$(2.123) \quad \frac{1}{\rho} (p - p_{\text{атм}}) = \frac{R}{r} (\ddot{R}R + 2\dot{R}^2) - \frac{R^4 \dot{R}^2}{2r^4}.$$

Граничното условие за нормалните напрежения съгласно (1.78) се записва така:

$$(2.124) \quad p_{rr} = \hat{P}_{rr} + \frac{2\sigma}{R}.$$

Тъй като вискозитетът на газа вътре в каверната е много по-малък от вискозитета на водата, като пренебрегнем движението на флуида вътре в мехура, получаваме

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\hat{p}_{rr} = -p_b.$$

Налигането  $p_b$  в каверната се получава в резултат на взрива, който създава голямо количество газ. При разширяване на мехура налягането в него намалява по адиабатичен закон и силно зависи от състава на продуктите на взрива. През последния стадий на процеса на разширяване налягането  $p_b$  става значително по-малко от  $p_a$ . От (2.124) следва

$$p + 4\mu \frac{\dot{R}}{R} = p_b - \frac{2\sigma}{R}, \quad r = R.$$

Или

$$p(R+0, t) = p_b - \frac{2\sigma + 4\mu \dot{R}}{R}.$$

Като заместим в (2.123)  $r$  с  $R+0$  и  $p$  с  $p(R+0, t)$ , получаваме следното уравнение за  $R$ :

$$(2.125) \quad R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 + \frac{2\sigma}{\rho R} + \frac{4\mu \dot{R}}{\rho R} = \frac{p_b(t) - p_{\text{атм}}}{\rho}.$$

За да решим това диференциално уравнение, трябва да са дадени две начални (гранични) условия. Обикновено се задават  $R(0)$  и  $\dot{R}(0)$  и уравнението (2.125) се решава числено посредством някои от известните методи при зададена функция  $p_b(t)$ . Като умножим (2.125) с  $R^2 \dot{R}$ , получаваме

$$(2.126) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (R^3 \dot{R}^2) + \frac{2\sigma}{\rho} \dot{R} R + \frac{4\mu}{\rho} R \dot{R}^2 = \frac{p_b - p_a}{\rho} R^2 \dot{R}.$$

Ако пренебрегнем влиянието на вискозността, изменението на налягането  $p_b$  и повърхностното напрежение  $\sigma$ , след интегриране на (2.126) намираме

$$(2.127) \quad R^3 \dot{R}^2 = \frac{2}{3} \frac{p_a - p_b}{\rho} (R_m^3 - R^3).$$

Тук за константата на интегрирането е въведена величината  $R_m$ , т. е. максималният радиус на мехура. Уравнението (2.127) описва поведението на мехура в критичния стадий на развитие на течението, когато той преставя да се разширява и започва да се свива. Тогава  $p_a \gg p_b$ . Връзката между радиуса на такъв ефективно празен мехур и времето  $t$  се определя от равенството

$$(2.128) \quad |t - t_m| = \left( \frac{3\rho}{2p_a} \right)^{1/2} \int_R^{R_m} \left[ \left( \frac{R_m}{R} \right)^3 - 1 \right]^{1/2} dR,$$

където  $t_m$  е моментът, в който  $R = R_m$ . Интересно е да се отбележи, че формула (2.128) е приложима както за стадия на разширяване  $t < t_m$ , така и за стадия на свиване  $t > t_m$  на мехура. Движението при свиването се получава чрез обръщане на движението при разширяване.

Оценка за  $R_m$  може да се получи в случая на идеален флуид. Тогава мехурът се разглежда като ефективно празен ( $p_b = 0$ ) и се пренебрегва влиянието на загубата на енергия поради дистанция-



та, топлопроводността и излъчването. В този случай енергията  $E$ , отделяна при взрива, е равна на работата, която се извършва върху безкрайния флуид при разширяването на мехура до момента  $t=t_m$ . Така получаваме

$$(2.129) \quad A = \lim_{r \rightarrow \infty} (4\pi r^2 p u) = 4\pi p_a R^2 \dot{R},$$

$$E = \int_0^{t_m} A dt = \frac{4}{3} \pi p_a R_m^3.$$

Формулите (2.128) и (2.129) се съгласуват с наблюденията върху растенето на радиуса на достатъчно разширили се мехури, за които  $p_a > p_b$ . По-точни резултати могат да се получат при численото интегриране на уравнението (2.125).

Накрая да приложим уравнение (2.128) за изследване свиването на газов мехур. При голямо намаляване на налягането във водата могат да се образуват области (каверни), запълнени с пара. Ако след това налягането във флуида започне да расте, получава се свиване (колапс) на каверната. В най-простия случай може да се предположи, че колапсиращата каверна запазва сферичната си форма и разликата в наляганята  $p_a - p_b$  остава постоянна. Тук с  $p_b$  се означава налягането на парата в мехура. При тези предположения зависимостта на радиуса на каверната  $R$  от времето  $t$  се дава с уравнението (2.128), където  $R_m$  е максималният радиус на мехура. Като извършим числено интегриране за момента  $t_0$ , в който радиусът става равен на нула, получаваме

$$t_0 = 0,915 R_m \left( \frac{\rho}{p_a - p_b} \right)^{1/2}.$$

За относителните величини  $\frac{t}{t_0}$  и  $\frac{R}{R_m}$  от (2.128) намираме зависимостта

$$(2.130) \quad \frac{t}{t_0} = 1,34 \int_0^1 \frac{dx}{(x^3 - 1)^{1/2}},$$

която добре се съгласува с наблюденията на колапсиращи каверни при  $p_a - p_b = \text{const.}$  Анализът на последния стадий от колапса изисква усложняване на модела посредством отчитане на други важни физически процеси.

## § 2.4. СЛОЙ НА ЕКМАН

Решаването на хидродинамични задачи обикновено се извършва относно фиксирана или инерциална (нютонова) координатна система. Една координатна система е *инерциална (нютонова)*, ако се движи праволинейно и равномерно спрямо неподвижната абсо-

лютна координатна система. Принципът за относителност на Нютон—Галилей се формулира така: уравненията за движение по закона  $\vec{m}\vec{a}=\vec{F}$ , където  $m$  е маса,  $\vec{a}$  — ускорение и  $\vec{F}$  — сила, не се различават в две координатни системи, ако едната се движи спрямо другата праволинейно и равномерно. Съществуват случаи, например геофизични течения върху въртяща се земя или флуидни течения около въртящи се турбинни витла, където е удобно да се използва неинерциална координатна система. За един наблюдател, движещ се заедно с неинерциална координатна система, наред с обикновените се появява и „друга масова сила“ — кориолисовата сила. Затова се налага да се пресметне ускорението на флуидна частица относно такава координатна система и уравненията на Навие—Стокс да се запишат по нов начин.

#### 2.4.1. Уравнения на движението на вискозни флуиди относно неинерциална координатна система

Нека  $O_1XYZ$  е неподвижна, а  $Oxyz$  — неинерциална координатна система с единични вектори  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  и  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Да означим с  $\vec{r}_0$  и  $\vec{\omega}$  преместването и завъртането на  $Oxyz$  относно  $O_1XYZ$ . Ако  $\vec{r}_M$  е радиус-векторът на произволна флуидна частица  $M$  относно  $O_1XYZ$  и  $\vec{\rho}_M$  е радиус-векторът на  $M$  относно  $Oxyz$ , то

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_M.$$

От това равенство чрез диференциране получаваме

$$\vec{v}_M^{abc} = \vec{v}_0^{прен} + \vec{v}_M^{рел},$$

където  $\vec{v}_M^{abc}$  е абсолютната скорост на частицата  $M$ ,  $\vec{v}_M^{рел}$  е релативната скорост, а  $\vec{v}_0^{прен}$  е преносната скорост на  $Oxyz$  относно  $O_1XYZ$ . Съгласно теоремата на Кориолис абсолютното ускорение е геометрична сума от преносното, релативното и кориолисовото ускорение, т. е.

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{прен} + \vec{a}_{рел} + \vec{a}_{кор},$$

където

$$\vec{a}_{прен} = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}),$$

$$\vec{a}_{рел} = \frac{\tilde{d}}{dt} \vec{v}_{рел},$$

$$\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{рел}).$$

Тук  $\frac{\tilde{d}}{dt} \vec{v}_{рел}$  означава производна на вектора  $\vec{v}_{рел}$  относно координатната система  $Oxyz$ , спрямо която единичните вектори  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  не се изменят. По такъв начин, ако приравним израза

$$\bar{a}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \frac{d\bar{v}_{\text{рел}}}{dt} + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{рел}})$$

към масовите и повърхностните сили, действащи на единица маса, ще получим уравненията за движението на флуида относно неинерциална координатна система. Да ги запишем във вида

$$\bar{a}_{\text{рел}} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \bar{v} - \bar{a}_{\text{прен}} - \bar{a}_{\text{кор}},$$

или

$$(2.131) \quad \frac{\partial \bar{v}_{\text{рел}}}{\partial t} + (\bar{v}_{\text{рел}} \cdot \nabla) \bar{v}_{\text{рел}} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \bar{v}_{\text{рел}} - \bar{a}_{\text{прен}} - \bar{a}_{\text{кор}}.$$

Следователно уравненията на Навие—Стокс относно неинерциална координатна система съвпадат по форма с уравненията на движението в абсолютна координатна система, ако предположим, че в допълнение към реалните масови и повърхностни сили действуват инерционните сили

$$-\bar{a}_0 - \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) - 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{рел}}).$$

Изразът  $-2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{рел}})$  се нарича *кориолисова сила* или *сила на завъртането*,  $-\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$  — *центробежна сила*,  $-\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho}$  — *ротационна сила* и  $-\bar{a}_0$  — *инерциална сила* на постъпателното движение на координатната система Охуз. Лесно се проверява, че ако координатната система Охуз се движи транслационно и равномерно относно  $O_1XYZ$ , то  $\bar{\omega} = 0$ ,  $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = 0$  и  $\bar{a}_0 = 0$ . Следователно преносното и кориолисовото ускорение са равни на нула и релативното ускорение съвпада с абсолютното. Ако движението е транслационно,  $\bar{\omega} = 0$  и кориолисовото ускорение е равно на нула, а за преносното имаме  $\bar{a}_{\text{прен}} = \bar{a}_0$ .

Да предположим, че подвижната координатна система Охуз се върти с постоянна ъглова скорост  $\bar{\omega}$  и не се движи транслационно относно  $O_1XYZ$ . Тогава за несвиваем флуид, който има постоянен вискозитет, уравненията на Навие—Стокс относно неинерциална декартова координатна система  $O_1x_{\text{уз}}$  имат вида

$$(2.132) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\omega v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2\omega u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Класически пример за използване на неинерциална координатна система са така наречените *геофизични течения*, при които не може да се пренебрегне въртенето на Земята. За ускорението на тези течения имаме

$$\bar{a} \approx \frac{d \bar{v}_{\text{рел}}}{dt} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{рел}}.$$

Ако  $v_0$  и  $L$  са характерните за задачата скорост и дължина, това равенство се записва в безразмерен вид по следния начин:

$$a' \approx \frac{d \bar{v}'_{\text{рел}}}{dt} + \frac{1}{R_0} (2\bar{\omega}' \times \bar{v}'_{\text{рел}}).$$

Безразмерният параметър  $R_0 = \frac{v_0}{\Omega L}$  се нарича *число на Росби*. Следователно *кориолисовите сили могат да се пренебрегнат, когато числото на Росби е голямо*.

#### 2.4.2. Модел на водно течение, предизвикано от вятър

В § 2.1. (вж. формула (2.15)) бе разгледан един модел на водно течение, предизвикано от вятър, като въртенето на Земята, върху която се движи флуидът, не се отчита. Индуцираното течение там се разглежда като слоесто, което не се потвърждава от наблюденията. Затова сега ще усъвършенствуваме този модел, като вземем предвид въртенето на Земята.

Да предположим, че върху флуидните частици от свободната повърхност на водното течение действуват някакви сили, които им предават еднаква по големина и посока скорост. Поради това, че при вискозните флуиди има триене, частиците, намиращи се под свободната повърхност, започват също да се движат.

Да разгледаме движението на флуида относно правоъгълна координатна система  $Oxuz$ , въртяща се с постоянна ъглова скорост  $\omega$  около насочената нагоре ос  $Oz$ . Нека оста  $Ox$  е насочена по посока на скоростта на вятъра, който се моделира с действието на тангенциалното напрежение върху свободната повърхност. Ще предполагаме, че движението на водните частици е стационарно и се извършва хоризонтално на слоевете, така че са изпълнени равенствата

$$u = u(z), \quad v = v(z), \quad w = 0, \quad p = p(z).$$

Тогава уравненията на Навие—Стокс, написани относно координатната система  $Oxuz$ , която се движи заедно с въртящата се с постоянна ъглова скорост  $\omega$  Земя (вж. у-ния (2.132)), имат вида

$$(2.133) \quad \begin{aligned} \nu \frac{d^2 u}{dz^2} &= -2v\omega, \\ \nu \frac{d^2 v}{dz^2} &= 2u\omega. \end{aligned}$$

Граничните условия върху свободната повърхност ( $z=0$ ) и на безкрайност ( $z \rightarrow -\infty$ ) се записват така:

$$(2.134) \quad \mu \left( \frac{du}{dz} \right)_{z=0} = T_0 \left( \frac{dv}{dz} \right)_{z=0} = 0 \text{ при } z=0,$$

$$u, v \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty.$$

Като умножим второто уравнение на системата (2.133) с  $i$  и съберем уравненията, получаваме

$$v \frac{d^2}{dz^2} (u + iv) = 2\omega (-v + iu),$$

или

$$\frac{d^2(u + iv)}{dz^2} - (1 + i)^2 \frac{\omega}{v} (u + iv) = 0.$$

Следователно

$$u + iv = C_1 e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{v}} z} + C_2 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{v}} z},$$

където  $C_1$  и  $C_2$  са константи.

Използвайки граничните условия (2.134), намираме

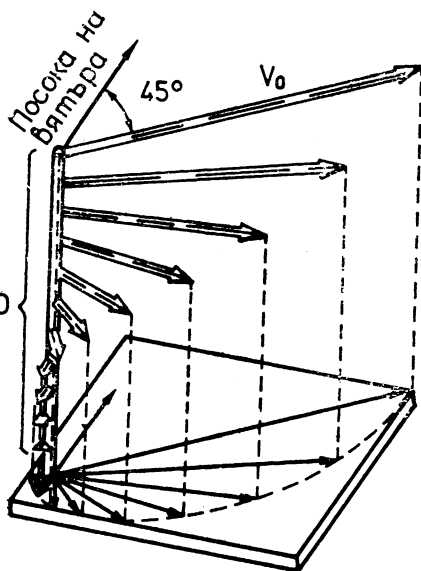
$$u + iv = \frac{1-i}{2} \frac{T_0}{\mu \sqrt{\frac{\omega}{v}}} e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{v}} z}.$$

Като отделим реалната от имажинерната част в това равенство, получаваме

(2.135)

$$u = \frac{T_0}{\mu \sqrt{2 \frac{\omega}{v}}} e^{\sqrt{\frac{\omega}{v}} z} \cos \left( \sqrt{\frac{\omega}{v}} z - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$v = \frac{T_0}{\mu \sqrt{2 \frac{\omega}{v}}} e^{\sqrt{\frac{\omega}{v}} z} \sin \left( \sqrt{\frac{\omega}{v}} z - \frac{\pi}{4} \right)$$



Фиг. 13

Тези формули показват, че поради действието на завъртащите (кориолисовите) сили посоката на движението на флуида се изменя в зависимост от  $z$  (фиг. 13). С увеличаване на дълбочината движението на водните частици намалява и фактически движение

има само в слой, чиято дълбочина е с големина от порядъка на  $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ . Този слой се нарича *слой на Екман* (В. Екман, 1905 г.). При  $z=0$  получаваме

$$(2.136) \quad u|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{2\mu\rho\omega}} \cos \frac{\pi}{4},$$

$$v|_{z=0} = \frac{-T_0}{\sqrt{2\mu\rho\omega}} \sin \frac{\pi}{4},$$

т. е. върху свободната повърхност отклонението на течението е равно на  $45^\circ$ .

#### 2.4.3. Влияние на въртенето на Земята върху изменението на посоката на вятъра в атмосферата

Да разгледаме влиянието на въртенето на Земята върху изменението на посоката на вятъра в зависимост от височината над земната повърхност. Нека предположим, че атмосферният въздух е несвиваем вискозен флуид, който се намира под действието на силата на Кориолис, породена от въртенето на Земята. Движението на флуида отнасяме към правоъгълна координатна система  $Oxyz$ , въртяща се заедно със Земята. Избираме оста  $Oz$  по вертикалата на дадено място, определена от вектора на земното ускорение  $\vec{g}$ , а осите  $Ox$  и  $Oy$  да са разположени в равнина, която е допирателна към повърхнината на Земята. Предполагаме, че равнината  $xOy$  се върти около оста  $Oz$  с ъглова скорост  $\omega_z = \text{пр.}_{Oz} \vec{\omega}$ , където  $\vec{\omega}$  е ъгловата скорост на Земята. Да предположим също, че въздушните частици не се движат в направление на оста  $Oz$  ( $w=0$ ), движението е стационарно и за компонентите на скоростта имаме

$$u = u(z), \quad v = v(z).$$

Уравненията за движението на вискозен флуид (2.132) имат вида

$$(2.137) \quad -2\omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$2\omega u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Да допуснем, че близо до земната повърхност градиентът на налягането е постоянен и е насочен в направление на оста  $Oy$ , т. е.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{G}{\rho},$$

където  $G = \text{const.}$  Тогава уравненията на движението в равнината  $xOy$  добиват вида

$$(2.138) \quad \begin{aligned} -2\omega v &= \nu \frac{d^2 u}{dz^2}, \\ 2\omega u &= \frac{G}{\rho} + \nu \frac{d^2 v}{dz^2}. \end{aligned}$$

Да означим с  $U$  скоростта на флуидните частици, която е предизвикана от импулсивно придобития градиент на налягането, при условие че триенето не се отчита. Тогава  $v=0$  и  $0 = \frac{G}{\rho} - 2\omega U$ . Заместваме  $\frac{G}{\rho}$  с равното му в уравненията за движението и получаваме

$$\begin{aligned} -2\omega v &= \nu \frac{d^2 u}{dz^2}, \\ 2\omega u &= 2\omega U + \nu \frac{d^2 v}{dz^2}. \end{aligned}$$

Или

$$(2.139) \quad \begin{aligned} \nu \frac{d^2 (u-U)}{dz^2} &= -2\omega v, \\ \nu \frac{d^2 v}{dz^2} &= 2\omega (u-U). \end{aligned}$$

Граничните условия на безкрайност и върху твърдата повърхност ( $z=0$ ) се записват така:

$$(2.140) \quad \begin{aligned} u &\rightarrow U, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \\ u &= v = 0 \quad \text{при } z = 0. \end{aligned}$$

Като умножим второто уравнение на системата (2.139) с  $i$  и съберем двете уравнения, намираме

$$\frac{d^2 (u-U+iv)}{dz^2} - (1+i)^2 \frac{\omega}{\nu} (u-U+iv) = 0.$$

Общото решение на това уравнение има вида

$$u-U+iv = C_1 e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z} + C_2 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z}.$$

От граничните условия (2.140) получаваме  $C_1=0$  и  $C_2=-U$ . Следователно

$$u+iv = U \left( 1 - e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z} \right).$$

Отделяйки реалната част от имагинерната, получаваме

$$(2.141) \quad u = U \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z} \cos \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}z \right),$$

$$v = U e^{-\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} z} \sin \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} z.$$

Тези формули показват, че с изменението на височината над земята скоростта на въздушните частици се изменя както по големина, така и по посока. Около твърдата граница на Земята се образува граничен слой от Екманов тип, чиято дебелина е от порядъка на  $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ . В него се наблюдава завъртане на потока, което се дължи на въртенето на Земята. Хоризонталните градиенти на налягането в атмосферата възникват вследствие на крупномасштабни циклони и антициклони, както и от температурните промени в хоризонтално направление. Приближено може да считаме, че те са постоянни на големи разстояния.

В заключение ще отбележим, че при използване на формулите (2.141) следва да заменим коефициента на вискозност  $\nu$  с така наречения *коефициент на турбулентното триене* (вж глава V).

#### 2.4.4. Периодичен слой на Екман

Ако предположим, че скоростта на повърхността на водата не е постоянна, както във формули (2.136), а се изменя по хармоничен закон относно времето  $U = U_0 \cos \sigma t$ , вместо (2.133) трябва да се разгледа системата

$$(2.142) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Периодично решение на (2.142) търсим във вида

$$u = F(z) e^{i\sigma t}, \quad v = \Phi(z) e^{i\sigma t}.$$

Тогава за амплитудните функции  $F(z)$  и  $\Phi(z)$  получаваме уравненията

$$(2.143) \quad \begin{aligned} i\sigma F - 2\omega \Phi &= \nu F'', \\ i\sigma \Phi + 2\omega F &= \nu \Phi''. \end{aligned}$$

Като изключим от (2.143) функцията  $\Phi$  и положим

$$\zeta = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}} z,$$

за  $F$  намираме

$$(2.144) \quad F^{IV} - 2iF'' - \left(1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\right) F = 0.$$

За граничните условия върху свободната повърхност и на безкрайност имаме

$$(2.145) \quad \begin{aligned} F &= U_0, \quad z=0, \\ F'' - iF &= 0, \quad z=0, \\ F &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$



Тук второто равенство се получава от условието  $v=0$  при  $z=0$ . Съгласно (2.145) търсеното решение на (2.144) трябва да клони към нула при  $z \rightarrow -\infty$ . Следователно

$$F = Ae^{\alpha z} + Be^{\beta z},$$

където  $\alpha$  и  $\beta$  са корени с положителни реални части:

$$(\alpha, \beta) = \pm \left( i \pm \frac{2i\omega}{\sigma} \right)^{1/2}.$$

Като използваме (2.145), намираме

$$A = B = -\frac{U_0}{2}.$$

Физически смисъл има само реалната част на решението.

## § 2.5. ПРАВА УДАРНА ВЪЛНА ВЪВ ВИСКОЗЕН ГАЗ

Да разгледаме едно точно решение за едномерно течение на вискозен свиваем топлопроводен газ. Ще изследваме възможността за съществуване на стационарно течение в преходната зона, която разделя две хомогенни състояния при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Уравненията на стационарните едновременно течения на свиваем газ, при които  $u = u(x)$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , съгласно (1.9), (1.49), (1.53) имат вида

$$(2.146) \quad \frac{d}{dx}(\rho u) = 0,$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \mu' \frac{du}{dx} \right),$$

$$\rho u \frac{d}{dx} \left( c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{d}{dx} \left( \mu' u \frac{du}{dx} + k \frac{dT}{dx} \right),$$

където  $\mu' = \lambda + 2\mu$ . Ще търсим решения на (2.146), които удовлетворяват условията

$$(2.147) \quad \frac{du}{dx} = \frac{dT}{dx} = \frac{d\rho}{dx} = 0, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Като интегрираме еднократно системата (2.146) получаваме

$$(2.148) \quad \rho u = \rho_1 u_1 = m,$$

$$\mu' \frac{du}{dx} - mu - p = -mu_1 - p_1,$$

$$\mu' u \frac{du}{dx} + k \frac{dT}{dx} - m \left( c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) = -m \left( c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right).$$

Тук с индекс 1 са означени величините на обтичащия поток, т. е. при  $x \rightarrow -\infty$ . Уравненията (2.148) са удовлетворени в целия поток. Прилагайки ги за хомогенно състояние при  $x \rightarrow +\infty$ , намираме

$$(2.149)$$

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1,$$

$$m(u_1 - u_2) = p_2 - p_1,$$

$$c_p T_2 + \frac{1}{2} u_2^2 = c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2.$$

Характерното свойство на тези съотношения е, че те не зависят от вискозността и топлопроводността на газа. По същество тези равенства изразяват законите за запазване на масата, количеството на движението и енергията при прехода през права ударна вълна.

От (2.149) може да получим равенството

$$(2.150) \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_2}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}\right) / \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2},$$

което се нарича *съотношение на Ранкин—Югоньо*. То е в сила и в рамките на модела на идеален газ, при който се предполага, че правата ударна вълна е безкрайно тънка.

Уравненията на вискозен свиваем газ (2.146) позволяват да се изучи структурата на зоната на прехода и да се оцени нейната дебелина. При някои опростяващи предположения системата (2.148) може да се интегрира напълно (Бекер, 1922 г.). Ако умножим второто уравнение на (2.148) с  $u$  и използваме съотношението  $u\rho = u\rho RT = mRT$ , намираме

$$(2.151) \quad \mu' u \frac{du}{dx} - mu^2 - mRT + (mu_1 + p_1)u = 0.$$

След като сме изключили налягането  $p$ , получаваме уравнения относно  $u$  и  $T$ —това са (2.151) и третото уравнение на системата (2.148). Ще търсим решение  $T = T(u)$  във вида

$$(2.152) \quad T = \alpha + \beta u + \delta u^2,$$

където  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  са неизвестни константи. Замествайки (2.152) в (2.151) и третото уравнение на (2.148), получаваме

$$(2.153) \quad \mu' u \frac{du}{dx} - m(1 + R\delta)u^2 + (-mR\beta + mu_1 + p_1)u - mR\alpha = 0,$$

$$\begin{aligned} [(\mu' + 2k\delta)u + \beta k] \frac{du}{dx} - m\left(c_p\delta + \frac{1}{2}\right)u^2 - mc_p\beta u - mc_p\alpha + \\ + m\left(c_p T_1 + \frac{1}{2}u_1^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Като извадим от второто уравнение първото и сравним коефициентите, намираме

$$\beta = 0, \quad \frac{2k\delta}{\mu'} = -\frac{\frac{1}{2} - c_v\delta}{1 + R\delta} = -1 = -\frac{\alpha c_v - \left(c_p T_1 + \frac{1}{2}u_1^2\right)}{R\alpha}$$

Следователно

$$\alpha = \frac{c_p T_1 + \frac{1}{2}u_1^2}{c_p}, \quad \delta = -\frac{1}{2c_p}, \quad k = \mu' c_p,$$

Тъй като  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , то

$$(2.154) \quad \mu' = \frac{4}{3}\mu, \quad \frac{\mu c_p}{k} = 0,75.$$

Безразмерната комбинация от физически параметри  $\frac{\mu c_p}{k}$ , които характеризират газа, се нарича *число на Прантъл*  $Pr$ . Съотношението (2.154) представлява условие за съществуване на решение на системата (2.148) във вид на полином (2.152). Тъй като за въздуха  $Pr=0,733$ , съотношението (2.154) е изпълнено със задоволителна точност. Ако допуснем, че  $Pr=\frac{3}{4}$ , тогава задачата се свежда до диференциалното уравнение

$$(2.155) \quad \mu' u \frac{du}{dx} = m \left( 1 - \frac{R}{2c_p} \right) u^2 - (mu_1 + p_1) u + \frac{mR}{c_p} \left( c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} \right),$$

което се получава от (2.153).

Да представим дясната страна на (2.155) във вид на произведение от множители:

$$(2.156) \quad \mu' u \frac{du}{dx} = m \frac{c_p + c_v}{2c_p} (u - u_1) (u - u_2),$$

където

$$u_1 + u_2 = \frac{2c_p}{c_p + c_v} \left( u_1 + \frac{p_1}{m} \right), \quad u_1 u_2 = \frac{2R}{c_p + c_v} \left( c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} \right).$$

Уравнението (2.156) може да се интегрира в квадратура. Получаваме

$$(2.157) \quad \frac{c_p + c_v}{2c_p \mu'} m x = \frac{u_1}{u_1 - u_2} \ln \frac{u_1 - u}{u_1 - u_2} - \frac{u_2}{u_1 - u_2} \ln \frac{u - u_2}{u_1 - u_2}.$$

Тук константата от интегрирането е включена в  $x$ , с което общността не се нарушава, тъй като с това се премества началото на координатната система в направление на абсцисната ос.

Решението (2.157) дава начина за преход от постоянната стойност  $u_1$  (при  $x \rightarrow -\infty$ ) към постоянната стойност  $u_2$  (при  $x \rightarrow \infty$ ). Поради вискозността на газа този преход се „размазва“, затова условията (2.149) се удовлетворяват асимптотично. Оказва се, че ефективната дебелина на преходния слой  $\Delta$  е много малка. Ако за въздуха са в сила условията

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu; \quad \gamma = 1, 4, \quad \frac{\mu}{\rho_1} = 0,133 \text{ см}^2/\text{сек},$$

$$\frac{u_1}{u_2} = 2, \quad u_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ см/сек}.$$

то за дебелината на преходния слой имаме

$$\Delta \approx 0,263 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

Тази дебелина е от порядъка на дължината на свободния пробег на молекулите, която е пренебрежимо малка от гледна точка на непрекъснатите среди. Това дава основание ударните вълни в газовата динамика да се разглеждат като математически повърхнини.

В рамките на слой с дебелина  $\Delta \approx 0,263 \cdot 10^{-5}$  см скоростта  $u$  се изменя от  $0,9 u_1$  до  $1,1 u_2$ . В общия случай системата (2.148) може да се интегрира числено.

## § 2.6. ТОЧНО РЕШЕНИЕ НА УРАВНЕНИЕТО НА БЮРГЕРС

В този параграф ще разгледаме *уравнението на Бюргерс*

$$(2.158) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

което е най-простия модел на нелинейните дисипиращи вълни. Това уравнение е едномерен „екстракт“ на уравненията на Навие — Стокс, съдържащо най-характерните им особености — нелинейност и дисипация. Решенията на уравнението на Бюргерс дават възможност да се определи ролята (влиянието) на нелинейния член  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ , характеризиращ нелинейната конвекция, и на члена с втора производна  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , който моделира вискозните сили. Нелинейното уравнение (2.158) може да се сведе към линейно посредством нелинейната смяна на Коул — Хопф

$$(2.159) \quad u = -2\nu \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi}.$$

Най-напред в (2.158) полагаме

$$u = \frac{\partial w}{\partial x}$$

и получаваме

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

След интегриране по  $x$  намираме

$$(2.160) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Нека

$$w = -2\nu \ln \varphi.$$

Тогава

$$(2.161) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -2\nu \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -2\nu \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2\nu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - 2\nu \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\varphi^2}.$$

Като заместим (2.161) в (2.160), получаваме уравнението на топлопроводността

$$(2.162) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

което може да се реши по различни начини.

Нека в началния момент  $t=0$  е зададен профилът на  $u(t, x)$

$$u = F(x) \text{ при } t=0.$$

От

$$F(x) = -2\nu \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi}$$

чрез интегриране за уравнението (2.162) намираме следното начално условие:

$$\varphi(0, x) = \Phi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\eta) d\eta \right\}, \quad t=0.$$

Тогава за  $\varphi$  намираме (вж. § 2.4)

$$(2.163) \quad \varphi(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp \left\{ -\frac{(x-\eta)^2}{4\nu t} \right\} d\eta.$$

Като вземем предвид (2.159), за  $u(t, x)$  получаваме

$$(2.164) \quad u(t, x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-G/2\nu} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\nu} d\eta},$$

където

$$G(\eta; x, t) = \int_0^\eta F(\eta') d\eta' + \frac{(x-\eta)^2}{2t}.$$

Подробното изследване на решението на уравнението на Бюргерс показва, че нелинейната конвекция увеличава наклона на профила, а вискозната дисипация го разнася.

Да намерим сега стационарното решение на уравнението на Бюргерс

$$u(t, x) = u(\xi), \quad \xi = x - ct,$$

което удовлетворява условията  $u \rightarrow u_1$  при  $\xi \rightarrow -\infty$  и  $u \rightarrow u_2$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Като заместим в (2.158), намираме

$$(2.165) \quad -c \frac{du}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} - \mu \frac{d^2 u}{d\xi^2} = 0.$$

Интегрираме по  $\xi$  и получаваме

$$(2.166) \quad -cu + \frac{1}{2} u^2 - \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} = A,$$

където  $A$  е константа.

Да представим дясната страна на уравнението

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{2\mu} u^2 - \frac{c}{\mu} u - A$$

във вид на произведение от множители:

$$(2.167) \quad \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{2\mu} (u - u_1) (u - u_2).$$

Тук  $u_1 = c + \sqrt{c^2 + 2A}$ ,  $u_2 = c - \sqrt{c^2 + 2A}$  ( $c = \frac{u_1 + u_2}{2}$ ) са корени на квадратното уравнение

$$u^2 - 2cu - 2A = 0.$$

Ако  $c^2 + 2A > 0$ ,  $u_1$  и  $u_2$  са реални и  $u_1 > u_2$ . Като интегрираме (2.167), намираме

$$(2.168) \quad u(t, x) = c - \sqrt{c^2 + 2A} \operatorname{th} \left( \sqrt{c^2 + 2A} \frac{\xi}{2\mu} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left\{ (u_1 + u_2) - (u_1 - u_2) \operatorname{th} \left[ \frac{(u_1 - u_2)}{4\mu} \left( x - \frac{1}{2} (u_1 + u_2) t \right) \right] \right\}.$$

Тук константата от интегрирането е избрана от условието  $u \rightarrow u_2$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , от което следва, че  $u \rightarrow u_1$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Полученото решение (2.168) съединява по непрекъснат начин двете асимптотични състояния  $u_1$  (при  $\xi \rightarrow -\infty$ ) и  $u_2$  (при  $\xi \rightarrow +\infty$ ). При това формулата

$$c = \frac{1}{2} (u_1 + u_2)$$

може да се интерпретира като съотношение на Ранкин — Югонио.

Следователно решението (2.168) на уравнението на Бюргерс описва структурата на ударна вълна.

Интересно е да сравним решението (2.168) с решението на линеаризираното уравнение на Бюргерс

$$(2.169) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Като положим

$$u(t, x) = u(\xi), \quad \xi = x - ct,$$

намираме

$$-c \frac{du}{d\xi} = \mu \frac{d^2 u}{d\xi^2},$$

откъдето следва, че

$$(2.170) \quad u(t, x) = u(\xi) = A + B e^{-\frac{c}{\mu} \xi}.$$

При  $\xi \rightarrow \infty$   $u(\xi) \rightarrow A$ , но при  $\xi \rightarrow -\infty$   $u \rightarrow +\infty$ , т. е. единственото ограничено стационарно решение на (2.169) е константата  $A$ . Това показва, че линеаризираното уравнение на Бюргерс не допуска решение, което да съединява по непрекъснат начин две различни хомогенни състояния. Следователно присъствието на нелинеен член в уравнението на Бюргерс прави възможно гладкото съединяване на две асимптотични хомогенни състояния с помощта на непрекъснатото изменящи се състояния.

Може да се покаже, че членът с втора производна в уравнението (2.159) не само не допуска образуването на големи градиенти, но и „изглажда“ всеки зададен в началото скок в разпределението на  $u(t, x)$ . По такъв начин членът от втория ред  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  се стреми да неутрализира влиянието на нелинейността в областта на свиването и изглажда началните прекъсвания (скокове).

Точните решения на уравненията на Навие — Стокс могат да се използват за проверка на валидността на самите уравнения посредством сравняване на теоретичните резултати с експерименталните. Такива сравнения са успешно извършени за стационарно течение на Поазой в тръба, за въртене на диск в течност, за ротационно течение между два концентрични цилиндъра, трептения на течност в кръгова тръба и в някои други случаи. Тези сравнения могат да се използват и за получаване на някои основни константи, които характеризират течността, по-специално коефициента на вискозност. Фундаменталното значение на точните решения се състои и в това, че чрез тях може да се демонстрира съществуването и единствеността (неединствеността) им.

Точните решения се използват и за проверка на валидността на приближените теоретични модели. Физическите закономерности, следващи от точните решения, могат да се сравнят със съответните закономерности, получени от приближените модели.

Разгледаните по-горе точни решения в много отношения са обобщени. Така в задачата за дифузия на вихрите са разгледани много по-обща случаи за начално разпределение на завихреността; в задачата за постъпателно движение на безкрайна пластина в течност са разгледани произволни закони на движението и е отчетено вдухването на течност през нея; в случая на ротационно движение на диск са разгледани течения със завъртане на течността и е изследвано влиянието на ограничаващата повърхност; за нестационарни течения в канал са изследвани различни начални разпределения на скоростта.

Точни решения са получени и в случаи, в които е отчетена свиваемостта на флуида или особените му ненютонови свойства.

Систематична класификация на точните решения на уравненията на Навие — Стокс може да се направи въз основа на теоретикогруповия подход (В. В. Пухначов, 1960 г.). В книгата на Л. В. Овсянников (1978 г.) са дадени теорията на метода, някои приложения и съответна библиография.

## ТЕЧЕНИЯ ПРИ МАЛКИ ЧИСЛА НА РЕЙНОЛДС

Нелинейността на уравненията на Навие—Стокс съществено затруднява тяхното решаване. Както видяхме в предишната глава, точни решения се получават в много редки частни случаи. Всяка конкретна хидродинамична задача освен уравненията на Навие—Стокс включва и начални и гранични условия, които обикновено не могат да се удовлетворят от точните частни решения. Вследствие на това се използват приближени методи, които се основават на пълното или частично изоставяне на някои членове в уравненията и граничните условия. Обикновено тези методи се основават на използването на малък параметър, който се включва по подходящ начин в изходните уравнения и начално-граничните условия.

### § 3.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ НА СТОКС

Съществуват обширен клас течения, в които могат да се пренебрегнат нелинейните членове и да се получи линейна задача. Такива са теченията с малки скорости, в които конвективните членове са малки в целия поток.

Нека  $a$  и  $U$ , които са мащабни величини за линейните размери и скоростта, характеризират разглежданото течение. Да въведем безразмерни променливи  $\vec{v}'$ ,  $p'$ ,  $\vec{r}'$ , свързани със съответните размерни величини  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\vec{r}$  посредством съотношенията

$$\vec{v} = U \vec{v}', \quad p = \frac{1}{2} \rho U^2 p', \quad \vec{r} = a \vec{r}'.$$

Да запишем уравненията на Навие—Стокс и уравнението на непрекъснатостта (1.54) за стационарни движения на несвиваеми флуиди в безразмерна векторна форма:

$$(3.1) \quad \Delta \vec{v} - \nabla p = \text{Re}(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v},$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Тук и по-нататък изоставяме примерите при безразмерните величини, като специално ще отбелязваме кога се използват размерни променливи.

Ако числото на Рейнолдс  $\text{Re} = \frac{Ua}{\nu}$  клони към нула, то от (3.1) се получава следната система:



$$(3.2) \quad \Delta \vec{v} = \nabla p,$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Тази система се прилага в случаите на много малки стойности на числото  $Re$ . Уравненията (3.2) определят приближението на Стокс. Като изключим налягането  $p$  от системата (3.2) с помощта на операцията  $\text{rot}$ , получаваме следните уравнения:

$$(3.3) \quad \Delta \vec{\omega} = 0, \quad \vec{\omega} = \nabla \times \vec{v},$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Ако са дадени и гранични условия за  $\vec{v}$ , получаваме гранична задача, решението на която определя полето на скоростта. В случая на движение на твърдо тяло във флуид на повърхността на тялото  $S_T$  се поставя условието за полепване, а далеч от него (на повърхността) — условието за затихване на смутеното движение:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_T \text{ — върху повърхността } S_T \text{ на тялото,} \\ \vec{v} &\rightarrow 0 \text{ — на безкрайност.} \end{aligned}$$

След като се реши граничната задача (3.3), (3.4), се определя и налягането  $p$ .

В приближението на Стокс налягането е хармонична функция. Това се доказва лесно, като се приложи операцията  $\nabla$  към първото уравнение на системата (3.2):

$$(3.5) \quad \nabla^2 p = \Delta p = 0.$$

Естествено условие за налягането далеч от тялото е

$$p \rightarrow p_\infty \text{ на безкрайност.}$$

От първото уравнение на (3.2) намираме  $\nabla p$ , ако е известна скоростта.

### 3.1.1. Бавно движение на сфера

Нека сфера с радиус  $a$  се движи с постоянна скорост  $U$  във флуид с вискозитет  $\nu$  (Г. Стокс, 1851 г.). Да въведем сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$  с начало, съвпадащо с центъра на сферата и ъгъл  $\theta$  който се отчита от посоката на обтичащия тялото поток. В тази координатна система течението е ососиметрично, за това могат да се използват двумерните уравнения в сферична координатна система (1.86). Като приемем величината  $Ua^2$  за мащаб на токовата функция, в точна постановка получаваме следното уравнение:

$$(3.6) \quad D^2(D^2\psi) = Re \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \psi_\theta (D^2\psi)_r - \psi_r (D^2\psi)_\theta + \right.$$

$$+2D^2\psi\left(\operatorname{ctg}\theta\psi_r-\frac{1}{r}\psi_\theta\right)\Big].$$

Компонентите на скоростта се изразяват посредством токовата функция с формулите

$$(3.7) \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \psi_\theta, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \psi_r.$$

В стоксово приближение уравнението (3.6) има вида

$$(3.8) \quad D^4\psi = 0.$$

При избраната координатна система за граничните условия върху повърхността на сферата и на безкрайност имаме съответно

$$(3.9) \quad \psi(1, \theta) = 0, \quad \psi_r(1, \theta) = 0,$$

$$(3.10) \quad \psi(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta, \quad r \rightarrow \infty.$$

Решението на граничната задача (3.8) — (3.10) търсим във вида:

$$\psi(r, \theta) = F(r) \sin^2 \theta.$$

Като разделим променливите в (3.8), за функцията  $F(r)$  получаваме уравнението

$$r^4 F^{IV} - 4r^2 F'' + 8r F' - 8F = 0.$$

Това е Ойлерово обикновено диференциално уравнение с частни решения  $F(r) = r^m$ , където  $m_1 = -1$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 2$ ,  $m_4 = 4$ . Общото решение за  $F(r)$  се записва така:

$$F(r) = C_1 r^{-1} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4.$$

Като използваме граничните условия (3.9), (3.10), намираме

$$C_4 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{3}{4}, \quad C_1 = \frac{1}{4}.$$

По такъв начин за токовата функция и компонентите на скоростта окончателно получаваме

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \psi(r, \theta) &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left( r^2 - \frac{3}{2} r + \frac{1}{2r} \right), \\ v_r &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r} + 2 \right] \cos \theta, \\ v_\theta &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2r^3} + \frac{3}{2} \frac{1}{r} - 2 \right] \sin \theta. \end{aligned}$$

За производната на налягането върху повърхността на сферата съгласно (3.2) имаме

$$(3.12) \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} = 3 \cos \theta, \quad r = 1.$$

Разпределението на налягането в потока намираме, като решим уравнението (3.5) и удовлетворим граничното условие (3.12) и условието на затихване при  $r \rightarrow \infty$  (3.4):

$$p = p_{\infty} - \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} \cos \theta.$$

Да пресметнем силата на взаимодействие на потока със сферата. Проекцията на хидродинамичните сили върху направлението на потока (различна от нула поради неговата симетрия) е равна на

$$(3.13) \quad W = \int_S (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta) dS.$$

За напреженията върху повърхността на сферата в размерни променливи получаваме

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} \cos \theta,$$

$$p_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) = -\frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} \sin \theta.$$

Като заместим  $p_{rr}$ ,  $p_{r\theta}$  в (3.13) и пресметнем интеграла, намираме

$$(3.14) \quad W = 6\pi\mu Ua.$$

Така изведохме известната *формула на Стокс за съпротивлението на сферата*, която има голямо практическо значение. Тогава за коефициента на съпротивление  $c_f$ , който се дефинира посредством съотношението

$$W = \frac{1}{2} \rho U^2 \pi a^2 c_f,$$

съгласно (3.14) получаваме

$$c_f = \frac{12}{\text{Re}}.$$

Тази формула за коефициента на съпротивлението се потвърждава добре от експеримента при  $\text{Re} < \frac{1}{2}$ .

Да приложим формулата (3.14) за намиране на установилата се скорост на падане на дъждовна капка във въздух, разглеждайки я като твърда сфера. При установилото се движение силата на тежестта се уравновесява от силата на съпротивлението:

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \rho' g = 6\pi \rho \nu Ua.$$

Тук  $\rho'$  е плътността на водата. Ако  $\text{Re} = \frac{1}{2}$ , то  $a = \frac{1}{2} \frac{\nu}{U}$ . Тогава, замествайки съответните стойности за физическите константи  $\rho'$  и  $\nu$ , намираме  $U = 18$  см/сек,  $a = 0,0037$  см.

### 3.1.2. Парадокс на Стокс

Аналогично на случая за обтичане на сфера естествено е да се търси решение на задачата за обтичане на прав кръгов цилиндър в стоксово приближение. В цилиндрични координати  $(r, \varphi, z)$  уравнението за токовата функция в двумерно течение в стоксово приближение има вида

$$(3.15) \quad D^2(D^2\psi)=0, \quad D^2\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

За координатната система, свързана с оста на цилиндъра, който се движи с постоянна скорост  $U$ , граничните условия се записват така:

$$(3.16) \quad \psi=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r}=0, \quad r=1,$$

$$\psi \rightarrow r \sin \varphi, \quad r \rightarrow \infty.$$

Решението на граничната задача (3.15), (3.16) търсим във вида

$$\psi = f(r) \sin \varphi.$$

Тогава функцията  $f(r)$  удовлетворява диференциалното уравнение

$$f^{IV} + \frac{2}{r} f^{III} - \frac{3}{r^2} f'' + \frac{3}{r^3} f' - \frac{3}{r^4} f = 0,$$

за общото решение на което имаме

$$f = A_1 r + A_2 \frac{1}{r} + A_3 r \ln r + A_4 r^3.$$

Лесно се проверява, че е невъзможно константите  $A_k$  да се определят така, че всички гранични условия, дадени в (3.16), да са удовлетворени. Ако граничните условия върху тялото се удовлетворяват и се отстрани най-бързо растящият член  $A_4 r^3$  при  $r \rightarrow \infty$ , получаваме

$$\psi = A_3 \left( -\frac{1}{2} r + \frac{1}{r} + r \ln r \right) \sin \varphi,$$

откъдето следва, че условието на безкрайност не се удовлетворява за нито една стойност на  $A_3$  и полученият израз за  $\psi$  не може да бъде решение на разглежданата задача. По такъв начин, оставайки в рамките на стоксовото приближение, е невъзможно да се реши задачата за обтичане на кръгов цилиндър. Строго доказателство на това твърдение е дадено от Биркхов, 1953 г., който вместо горното частно решение разглежда решение от най-общ вид. В това се състои *парадоксът на Стокс* — дори при малки стойности на числото на Рейнолдс при равнинната задача не трябва да се пренебрегват напълно инерционните членове.

### 3.1.3. Бавно движение на две сфери

Нека две сфери с радиуси  $a$  и  $b$  се движат във вискозен флуид с постоянна скорост  $v$  в направление на централата им  $O_1O_2$  (Стимсън, Джефри, 1926 г.). Да въведем цилиндрична координатна система  $(r, \varphi, z)$  с начало  $O$  и ос  $Oz$ , лежащи върху  $O_1O_2$ , така че  $O$  да бъде между точките  $O_1$  и  $O_2$ . В тази координатна система движението е ососиметрично, затова могат да се използват уравненията

$$(3.17) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = v \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right),$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = v \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right),$$

където  $p$  е налягането, а  $v$  — вискозитета на флуида. Компонентите на скоростта  $(v_r, v_z)$  се изразяват посредством токовата функция  $\Psi$  с формулите

$$(3.18) \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Като се елиминира налягането  $p$ , за токовата функция  $\Psi$  получаваме уравнението

$$(3.19) \quad E^2(E^2\Psi) = 0,$$

където

$$(3.20) \quad E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Решението на (3.19) търсим във вида

$$(3.21) \quad \Psi = \Psi_1 + z\Psi_2,$$

където  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  са решения на уравнението

$$(3.22) \quad E^2\Psi = 0.$$

За граничните условия върху двете сфери, движещи се със скорост  $v$  в направление на положителната посока на оста  $Oz$ , имаме

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -rv, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi + \frac{1}{2} r^2 v \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi + \frac{1}{2} r^2 v \right) = 0.$$

Ако означим с  $n$  външната нормала към повърхностите на двете тела, тези условия могат да се запишат и в следната еквивалентна форма:

$$(3.23) \quad \Psi + \frac{1}{2} r^2 v = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \Psi + \frac{1}{2} r^2 v \right) = 0.$$

От друга страна, от физически съображения следва, че индуцираното от движението на двете тела вискозно течение трябва да затихва на безкрайност.

За решаването на по-горе формулираната задача най-удобно е да се използва бисферична координатна система  $(\xi, \varphi, \eta)$ , която е свързана с цилиндричната координатна система  $(r, \varphi, z)$  посредством формулите

$$(3.24) \quad r = \frac{c \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

където  $c$  е положителна константа. В координатната система  $(\xi, \varphi, \eta)$  двете сфери с радиуси  $a$  и  $b$  имат съответно уравнения  $\xi = \xi_1$ ,  $\xi = \xi_2$ , като

$$a = \frac{c}{\operatorname{sh} \xi_1}, \quad b = \frac{c}{\operatorname{sh} \xi_2}.$$

Когато сферите са външни, както е в разглежданата задача  $\xi_1 > 0$  и  $\xi_2 < 0$ . При това областта на течението се определя от условията  $\xi_2 < \xi < \xi_1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \eta \leq \pi$  и безкрайната точка, която се получава при  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ . Ако означим с  $d_1$  и  $d_2$  разстоянията на центровете на сферите  $O_1$  и  $O_2$  до началото  $O$  на  $(r, \varphi, z)$ , то

$$d_1 = c \cdot \operatorname{cth} \xi_1, \quad d_2 = c \cdot \operatorname{cth} \xi_2.$$

В бисферични координати (3.22) има вида

$$(3.25) \quad E^2 \Psi = \frac{\operatorname{ch} \xi - \beta}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\operatorname{ch} \xi - \beta) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right] + \right. \\ \left. + (1 - \beta^2) \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ (\operatorname{ch} \xi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \Psi \right] \right\} = 0,$$

където  $\cos \eta = \beta$ .

Уравнението (3.25) се удовлетворява от следното решение, което е ограничено при  $\eta = 0$  и  $\eta = \pi$

$$(3.26) \quad \Psi = (\operatorname{ch} \xi - \beta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \operatorname{ch} \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi + B_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right] v_n(\beta).$$

Тук

$$v_n(\beta) = p_{n-1}(\beta) - p_{n+1}(\beta)$$

е решение на диференциалното уравнение

$$(1 - \beta^2) \frac{d^2 v_n}{d \beta^2} + n(n+1) v_n = 0$$

и удовлетворява рекурентната зависимост

$$(3.27) \quad \beta v_n = \frac{n-1}{2n-1} v_{n-1} + \frac{n+2}{2n+3} v_{n+1},$$

а  $P_n(\beta)$  са полиномите на Лъожандър. Като използваме (3.26) и (3.27), за токовата функция  $\Psi$  получаваме

$$\Psi = (\operatorname{ch} \xi - \beta) - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\xi) v_n(\beta),$$

където

$$U_n(\xi) = a_n \operatorname{ch} \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi + b_n \operatorname{sh} \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi + c_n \operatorname{ch} \left( n + \frac{3}{2} \right) \xi + \\ + d_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{3}{2} \right) \xi,$$

а  $a_n, b_n, c_n, d_n$  са константи.

Ако положим  $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) v_n(\beta) = F(\xi, \beta)$ , от граничните условия

(3.23) получаваме

$$(3.28) \quad F = -\frac{1}{2} \frac{vc^2(1-\beta^2)}{(\operatorname{ch} \xi - \beta)^{1/2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \frac{vc^2(1-\beta^2) \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/4}}.$$

Използвайки зависимостта

$$(1-\beta^2)p_n(\beta) = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} v_{n+1} - \frac{n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} v_{n-1},$$

(3.28) се записва така:

$$(3.29) \quad F = -\frac{c^2 v}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \left\{ \frac{e^{\mp \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi}}{2n-1} - \frac{e^{\mp \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi}}{2n+3} \right\} v_n(\beta),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \pm \frac{c^2 v}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \left\{ e^{\mp \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi} - e^{\mp \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi} \right\} v_n(\beta),$$

където при  $\xi > 0$  се взема горният знак, а при  $\xi < 0$  — долният.

Да разгледаме случая, когато двете сфери имат равни радиуси, т. е.  $\xi_2 = -\xi_1$ . Полагаме

$$\frac{c^2 v_n(n+1)}{\sqrt{2}(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = k,$$

$$\Delta = 2 \operatorname{sh}(2n+1) \xi_1 + (2n+1) \operatorname{sh} 2\xi_1.$$

Тогава от граничните условия (3.23) намираме

$$a_n = -\frac{(2n+3)k}{\Delta} \{ 2[1 - e^{-(2n+1)\xi_1}] + (2n+1)(e^{2\xi_1} - 1) \},$$

$$b_n = 0,$$

$$c_n = \frac{(2n-1)k}{\Delta} \{ 2[1 - e^{-(2n+1)\xi_1}] + (2n+1)(1 - e^{-2\xi_1}) \},$$

$$d_n = 0.$$

Стимсън и Джефри установяват, че силите, необходими за поддържане движението на две сфери с еднакви радиуси, са равни, т. е.

(3.30)

$$W_1 = W_2 = 6\pi\mu va\lambda,$$

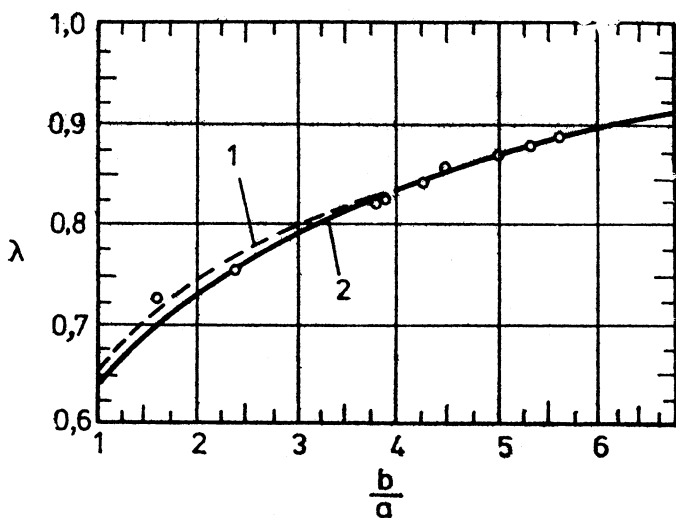
където  $a$  е дължината на радиусите им, а за  $\lambda$  имаме

$$\lambda = \frac{2}{3} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left[ 1 - \frac{4\operatorname{sh}^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi_1 - (2n+1)^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1}{2 \operatorname{sh}(2n+1)\xi_1 + (2n+1) \operatorname{sh} 2\xi_1} \right].$$

Изчисленията показват, че когато двете сфери са на безкрайно голямо разстояние една от друга, коефициентът  $\lambda=1$ : Тогава всяка една от тях изпитва съпротивление, което се пресмята по формулата на Стокс за обтичане на единична сфера.

Поправката на закона на Стокс за две еднакви сфери, движещи се успоредно на централата им при различни разстояния между тях, е дадена на следната таблица:

$\xi_1$	$\frac{d_1+d_2}{2a}$	$\lambda$
0,5	1,128	0,660
1,0	1,543	0,702
2	3,762	0,836
3	10,068	0,931
$\infty$	$\infty$	1,000



Фиг. 14



На фиг. 14 са показани теоретичните и експерименталните резултати за хидродинамичното взаимодействие на две еднакви сфери, движещи се с равни скорости във вискозен флуид. Сравнението показва добро съгласуване на теорията с експеримента.

### 3.1.4. Бавно движение на сфера перпендикулярно на равнина

Нека твърда сферична частица с радиус  $a$  се движи бавно в полубезкраен вискозен флуид в направление, перпендикулярно на дадена равнина (Лоренц, 1907 г.) Предполагаме, че сферата има постоянна скорост  $U$  и течението е ососиметрично. Използуваме цилиндрична координатна система  $(r, \varphi, z)$  с начало  $O$  върху равнинна повърхност и ос  $Oz$ , минаваща през центъра на частицата. Разглежданото течение не е стационарно, тъй като разстоянието  $d$  между центъра на сферата и равнината се изменя с течение на времето. С известно приближение движението може да се разглежда като квазистационарно, когато безразмерната величина  $Re \frac{a}{h}$  е малка ( $Re = \frac{Ua}{\nu}$  е числото на Рейнолдс). Това означава, че може да използваме стационарните уравнения на Стокс (3.17) и да разглеждаме времето като параметър, т. е. картината на течението във всеки момент ще бъде такава, каквато е при съответното стационарно движение. Граничните условия върху сферата и равнината имат вида

$$(3.31) \quad v_r = 0, v_z = -U \text{ при } r^2 + (z-h)^2 = a^2,$$

$$(3.32) \quad v_r = 0, v_z = 0 \text{ при } z = 0.$$

При решаване на граничната задача (3.19), (3.31), (3.32) по-удобно е да се използва бисферична координатна система  $(\xi, \eta, \zeta)$ , дефинирана чрез формулите (3.24). В нея сферата се задава с уравнението  $\xi = \xi_1 > 0$ , а равнината — с  $\xi = 0$ . За разглежданото течение в цилиндрични координати  $z \geq 0, r \geq 0$  и в бисферични  $0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq \pi$ .

Токовата функция  $\Psi$ , дефинирана чрез (3.18), има вида

$$\Psi = \Psi[r(\xi, \eta), z(\xi, \eta)]$$

и като диференцираме относно  $\xi$  и  $\eta$ , намираме

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = r v_r \frac{\partial z}{\partial \xi} - r v_z \frac{\partial r}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = r v_r \frac{\partial z}{\partial \eta} - r v_z \frac{\partial r}{\partial \eta}.$$

От (3.31) следва

$$(3.33) \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{2} r^2 U \right] \Big|_{\xi=\xi_1},$$

$$(3.34) \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right|_{\xi=\xi_1} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{2} r^2 U \right] \Big|_{\xi=\xi_1}.$$

Тъй като бисферичната координатна система е ортогонална от (3.33), (3.34) получаваме

$$(3.35) \quad \Psi \Big|_{\xi=\xi_1} = \frac{1}{2} r^2 U \Big|_{\xi=\xi_1}.$$

Граничните условия върху сферата (3.33), (3.34) записваме във вида

$$(3.36) \quad [(\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/2} \Psi]_{\xi=\xi_1} = \left[ \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/2} U r^2 \right]_{\xi=\xi_1},$$

$$(3.37) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} ((\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/2} \Psi) \right]_{\xi=\xi_1} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/2} U r^2 \right) \right]_{\xi=\xi_1},$$

където  $\beta = \cos \eta$ ,

По аналогичен начин за граничните условия върху равнината имаме

$$(3.38) \quad [(\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/2} \Psi]_{\xi=0} = 0,$$

$$(3.39) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} ((\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/2} \Psi) \right]_{\xi=0} = 0.$$

И тук, както при задачата за обтичане на две сфери от вискозен флуид, е удобно да се използва решението на Стимсън и Джефри, 1926 г. То може да се запише във вида (Бренер, 1961 г.)

$$(3.40) \quad \Psi = (\operatorname{ch} \xi - \beta)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\beta),$$

където

$$(3.41) \quad U_n(\xi) = a_n \operatorname{ch} \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi + b_n \operatorname{sh} \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi + c_n \operatorname{ch} \left( n + \frac{3}{2} \right) \xi + d_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{3}{2} \right) \xi$$

и  $a_n, b_n, c_n, d_n$  са константи, а

$$c_n^{-\frac{1}{2}}(\beta) = \frac{p_{n-2}(\beta) - p_n(\beta)}{2n-1}$$

са полиномите на Гегенбауер.

Като вземем предвид (3.40), ще представим дясната страна на граничното условие (3.36), а именно  $(\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/2} r^2 \Big|_{\xi=\xi_1}$ , чрез полиномите на Гегенбауер. Като използваме (3.24) и равенствата

$$c = a \operatorname{sh} \xi_1, \quad \beta = \cos \eta,$$

намираме

$$\frac{(\cos \xi - \beta)^{3/2} r^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1} = (1 - \beta^2) (\operatorname{ch} \xi - \beta)^{-\frac{1}{2}}.$$

От друга страна,

$$(\operatorname{ch} \xi - \beta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{\xi}{2}}}{1 - 2e^{\xi} \beta + e^{2\xi}}.$$

Полагайки в известната формула

$$\frac{1}{r_1^2 - 2r_1 r_2 \beta + r_2^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_1^k}{r_2^{k+1}} p_k(\beta), \quad (r_2 > r_1), \quad r_1 = 1, \quad r_2 = e^{\xi} (\xi > 0),$$

получаваме

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} \xi - \beta)^{1/2}} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left(k + \frac{1}{2}\right) \xi} p_k(\beta).$$

Полиномите на Лъожандър и Гегенбауер удовлетворяват равенството

$$(2k+1)(1-\beta^2)p_k(\beta) = (k+1)(k+2)c_{k+2}^{-\frac{1}{2}}(\beta) - k(k-1)c_k^{-\frac{1}{2}}(\beta),$$

откъдето

$$\begin{aligned} (3.42) \quad (\operatorname{ch} \xi - \beta)^{3/2} r^2 &= \sqrt{2} a^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \times \\ &\times \left[ \frac{e^{-\left(n - \frac{1}{2}\right) \xi}}{2n-1} - \frac{e^{-\left(n + \frac{3}{2}\right) \xi}}{2n+3} \right] c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\beta). \end{aligned}$$

От граничните условия (3.36) — (3.39) и равенството (3.42) за определяне на неизвестните константи  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$  получаваме следната система уравнения:

$$\begin{aligned} a_n \operatorname{ch} \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi_1 + b_n \operatorname{sh} \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi_1 + c_n \operatorname{ch} \left( n + \frac{3}{2} \right) \xi_1 + \\ + d_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{3}{2} \right) \xi_1 &= \frac{a^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1 U_n(n+1)}{\sqrt{2}} \left[ \frac{e^{-\left(n - \frac{1}{2}\right) \xi_1}}{2n-1} - \frac{e^{-\left(n + \frac{3}{2}\right) \xi_1}}{2n+3} \right], \\ \left( n - \frac{1}{2} \right) \left[ a_n \operatorname{sh} \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi_1 + b_n \operatorname{ch} \left( n - \frac{1}{2} \right) \xi_1 \right] + \\ + \left( n + \frac{3}{2} \right) \left[ c_n \operatorname{sh} \left( n + \frac{3}{2} \right) \xi_1 + d_n \operatorname{ch} \left( n + \frac{3}{2} \right) \xi_1 \right] &= \\ = \frac{a^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1 U_n(n+1)}{2\sqrt{2}} \left[ e^{-\left(n - \frac{1}{2}\right) \xi_1} - e^{-\left(n + \frac{3}{2}\right) \xi_1} \right], \end{aligned}$$

$$a_n + c_n = 0,$$

$$\left( n - \frac{1}{2} \right) b_n + \left( n + \frac{3}{2} \right) d_n = 0.$$

От тази система намираме

$$(3.43) \quad a_n = -c_n = -\frac{a^2 \operatorname{sh}^4 \xi_1 U \cdot n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{2} \left[ 4 \operatorname{sh}^2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi_1 - (2n+1)^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1 \right]},$$

$$d_n = -\frac{2n-1}{2n+3} \quad b_n = \frac{a^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1 U n(n+1)}{\sqrt{2}(2n+3)} \times$$

$$\times \left[ \frac{2 \operatorname{sh}(2n+1) \xi_1 + (2n+1) \operatorname{sh} 2 \xi_1}{4 \operatorname{sh}^2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi_1 - (2n+1)^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1} - 1 \right].$$

Като използва формулата на Стимсън и Джефри за съпротивление на сферата при  $\xi_1 > 0$

$$W = \frac{2\pi\mu\sqrt{2}}{a \operatorname{sh} \xi_1} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n + c_n + d_n)$$

и равенствата (3.43), Бренер получава

$$(3.44) \quad W = 6\pi\mu a U \lambda,$$

където

$$\lambda = \frac{3}{4} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \times$$

$$\times \left[ \frac{2 \operatorname{sh}(2n+1) \xi_1 + (2n+1) \operatorname{sh} 2 \xi_1}{4 \operatorname{sh}^2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi_1 - (2n+1)^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1} - 1 \right].$$

При  $\frac{h}{a} \rightarrow \infty$  (сферата е много далече от равнината) коефициентът  $\lambda \rightarrow 1$ , т. е. в сила е формулата на Стокс (3.14) за бавно обтичане на сфера. Хидродинамичното взаимодействие между сферата и равнината е показано на следната таблица:

$\xi_1$	$\frac{h}{a}$	$\lambda$
0,5	1,128	9,252
1,0	1,543	3,036
2	3,762	1,413
3	10,068	1,125
$\infty$	$\infty$	1

Тези резултати са потвърдени експериментално (Мак-Кей, Судзуки, Мейсън, 1963 г.).

### 3.1.5. Бавно движение на сферична капка (мехур) във флуид

Едно от най-важните точни решения на уравненията на Навие—Стокс при течения с междофазови граници описва бавното постъпателно движение на сферична капка (мехур) във флуид. То е получено за първи път от Адамар и Рибчински (независимо един от друг) през 1911 г. Повърхностното напрежение  $\sigma$ , действащо върху междофазовата граница на капката, се стреми да запази сферичната ѝ форма, като действа на тангенциалните напрежения. Известно е, че в първо приближение формата на капката (мехура) се запазва сферична, когато е достатъчно малка или се движи бавно (Т. Д. Тейлър и А. Акривос, 1964 г.). Ще предположим, че междофазовата граница не съдържа повърхностно активни вещества, т. е. повърхностното напрежение е постоянно.

Задачата изисква да се разглеждат едновременно теченията както отвън, така и вътре в капката. Нека вискозитетите и плътностите на флуидите вън и вътре в капката са съответно  $\mu$ ,  $\rho$  и  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\rho}$ . Да въведем сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$ , началото на която съвпада с центъра на частицата и се движи заедно с нея. Относно тази координатна система капката като цяло ще бъде неподвижна, а външният флуид ще обтича частицата със скорост, еднаква по големина и противоположна по знак на скоростта на нейното фактическо движение.

Да предположим, че радиусът на сферичната капка е равен на  $a$ . Ако числата на Рейнолдс  $Re$  и  $Re_R$  са достатъчно малки, можем да използваме уравнението на Стокс (3.8) за токовата функция  $\Psi$ :

$$(3.45) \quad D^4\Psi = D^4\hat{\Psi} = 0,$$

където

$$D^2 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Компонентите на скоростта  $v_r$  и  $v_\theta$  се изразяват чрез токовата функция  $\Psi$  посредством формулите (3.7):

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Далече от капката обтичащият поток е равномерен със скорост  $U$ , затова

$$(3.46) \quad \Psi \rightarrow \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Граничните условия на повърхността на капката се основават на дадените в първа глава условия върху междофазова повърхност (1.75), (1.76), (1.77). Те се записват така:

1) нормалните компоненти на скоростите са равни на нула, тъй като двата флуида не се смесват — не проникват един в друг през границата  $r=a$ , т. е.

$$(3.47) \quad v_r = 0, \text{ или } \Psi = 0 \text{ при } r = a;$$

$$(3.48) \quad \widehat{v}_r = 0, \text{ или } \widehat{\Psi} = 0 \text{ при } r = a;$$

2) *тангенциалните компоненти на скоростите са равни, защото няма хлъзгане на двата флуида върху границата,  $r = a$ :*

$$(3.49) \quad v_\theta = \widehat{v}_\theta, \text{ или } \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial r} \text{ при } r = a;$$

3) *тангенциалните напрежения на двата флуида при  $r = a$  са непрекъснати, тъй като повърхностното напрежение  $\sigma$  е постоянно:*

$$(3.50) \quad p_{r\theta} = \widehat{p}_{r\theta}, \text{ или } \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = k \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial r} \right),$$

където

$$k = \frac{\widehat{\mu}}{\mu};$$

4) *нормалните напрежения от двете страни на междуфазовата граница  $r = a$  удовлетворяват уравнението на Лаплас (1.78):*

$$(3.51) \quad -p + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = -\frac{2\sigma}{a} - \widehat{p} + 2\widehat{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial r} \right).$$

Като използваме решението на (3.45), получаваме

$$(3.52) \quad \Psi = (A_1 r^{-1} + A_2 r + A_3 r^3 + A_4 r^4) \sin^2 \theta \text{ при } r \geq a,$$

$$(3.53) \quad \widehat{\Psi} = (B_1 r^{-1} + B_2 r + B_3 r^2 + B_4 r^4) \sin^2 \theta \text{ при } r \leq a.$$

От граничното условие на безкрайност (3.46) получаваме  $A_4 = 0$ ,  $A_3 = \frac{1}{2} U$ . От друга страна, за да бъде скоростта на течността в центъра на капката  $r = 0$  крайна, трябва  $B_1 = 0$  и  $B_2 = 0$ . Останалите четири константи  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$  определяме, като решим системата уравнения (3.47)–(3.50). Получаваме

$$A_1 = \frac{1}{4} U a^3 \frac{1}{1+k}, \quad A_2 = -\frac{3}{4} U a \frac{k + \frac{2}{3}}{1+k},$$

$$B_3 = -\frac{1}{4} U \frac{k}{1+k}, \quad B_4 = \frac{1}{4} \frac{U}{a^2} \frac{k}{1+k}.$$

Като заместим константите с техните равни, от (3.52) и (3.53) намираме

$$(3.54) \quad \Psi = \frac{U r^2 \sin^2 \theta}{2} \left[ 1 - \frac{a(2+3k)}{2r(1+k)} + \frac{a^3}{2r^3} \frac{k}{1+k} \right],$$

$$(3.55) \quad \widehat{\Psi} = \frac{-U r^2 \sin^2 \theta}{4(1+k)} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Налигането вън от капката и вътре в нея се пресмята, като използваме съответните уравнения на Стокс (3.2), (3.5):

$$(3.56) \quad p = p_{\infty} - \frac{\mu a U \cos \theta (2+3k)}{2r^2(1+k)},$$

$$(3.57) \quad \widehat{p} = \widehat{p}_0 - \frac{5\mu U r \cos \theta}{a^2(1+k)},$$

където  $p_{\infty}$  и  $\widehat{p}_0$  са константи. Условието (3.51) не бе използвано при намиране на токовата функция и налягането вън от сферичната капка и вътре в нея. Облаковено то се взема предвид, когато формата на междупазовата граница не е известна.

За пълния коефициент на съпротивлението на капката намираме

$$(3.58) \quad c_f = \frac{2W}{\pi a^2 \rho U^2} = \frac{4}{\text{Re}} \frac{2+3k}{1+k}.$$

При мехур  $k = \frac{\widehat{\mu}}{\mu} \rightarrow 0$

$$(3.59) \quad c_f = \frac{8}{\text{Re}},$$

а за твърда сфера  $k = \frac{\widehat{\mu}}{\mu} \rightarrow \infty$  получаваме известната величина

$$(3.60) \quad c_f = \frac{12}{\text{Re}}.$$

Ако една капка пада под действието на силата на земното привличане, за кратко време след започване на движението скоростта ѝ става стационарна. Като приравним пълното съпротивление и силата на тежестта  $\frac{4}{3} \pi a^3 (\widehat{\rho} - \rho) g$ , за стационарната скорост на падаща капка получаваме

$$(3.61) \quad U_{\text{ст}} = \frac{2}{3} \frac{g a^2 (\widehat{\rho} - \rho)}{\mu} \frac{1+k}{2+3k}.$$

Тази скорост е по-голяма от стационарната скорост, с която пада твърда сфера:

$$(3.62) \quad U_{\text{ст. сфера}}^{\text{тв.}} = \frac{2}{9} g a^2 \frac{\widehat{\rho} - \rho}{\mu}.$$

Разделяйки (3.61) на (3.62), получаваме

$$\frac{U_{\text{ст}}}{U_{\text{ст. сфера}}^{\text{тв.}}} = 3 \frac{\mu + \widehat{\mu}}{2\mu + 3\widehat{\mu}} > 1.$$

Градиентът на скоростта върху повърхността на флуидната капка в сравнение с градиента на скоростта върху твърда сфера е по-малък, от една страна, поради подвижността на флуидите и, от друга — поради условието за полепване върху твърда повърхност. Това води до намаляване дисипацията на енергията във

флуида и спомага за увеличаване на стационарната скорост при падането на течна капка в сравнение със стационарната скорост при падането на твърда сфера.

### 3.1.6. Обтичане на сферична капка от осцилиращ вискозен флуид

Да разгледаме друго точно решение на уравненията на Стокс (Запryanов, Стоянова, 1978 г.).

Нека сферична капка се намира в осцилиращ с честота  $\omega$  вискозен флуид. Предполагаме, че радиусът на капката  $a$  е малък и повърхностното напрежение  $\sigma$  е постоянно. Използваме сферична координатна система с начало в центъра на частицата и ос  $Oz$ , насочена по посока на скоростта на безкрайност  $-U \cos \omega t$ . Избираме характерен линейен размер  $a$ , характерна скорост  $-U$  и характерно време  $-\omega^{-1}$ . Тогава в безразмерен вид уравненията на Стокс за движението на флуида вън от капката и вътре в нея имат вида

$$(3.63) \quad M^2 \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \Psi) = D^4 \Psi,$$

$$(3.64) \quad M^2 \frac{\gamma}{k} \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \hat{\Psi}) = D^4 \hat{\Psi}.$$

Отношенията на вискозитетите и плътностите на флуидите вътре в капката и вън от нея са съответно  $k$  и  $\gamma$ , а  $M = \frac{\omega a^2}{\nu}$  — честотният параметър. За функцията на тока далече от частицата имаме

$$(3.65) \quad \Psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta e^{i\tau},$$

където  $\tau$  е безразмерното време.

Граничните условия на повърхността на междупазовата граница са същите, каквито са при бавно стационарно обтичане на сферична капка, т. е. (3.47) — (3.50).

За да решим (3.63) и (3.64), полагаме

$$(3.66) \quad \Psi = f(r) \sin^2 \theta e^{i\tau},$$

$$(3.67) \quad \hat{\Psi} = \hat{f}(r) \sin^2 \theta e^{i\tau}.$$

Тогава

$$D^2 \Psi = \left[ f''(r) - \frac{2}{r^2} f(r) \right] \sin^2 \theta e^{i\tau} = g(r) \sin^2 \theta e^{i\tau}$$

и

$$D^4 \Psi = D^2(D^2 \Psi) = \left[ g''(r) - \frac{2}{r^2} g(r) \right] \sin^2 \theta e^{i\tau}.$$



Заместваме в (3.63) и намираме, че функцията

$$g(r) = f''(r) - \frac{2}{r^2} f(r)$$

удовлетворява уравнението

$$(3.68) \quad g''(r) - \left( \frac{2}{r^2} + \tilde{M}^2 \right) g(r) = 0, \quad \tilde{M}^2 = iM^2.$$

Търсейки решение на (3.68) от вида

$$g(r) = \left( \frac{a}{r} + b \right) e^{\alpha r},$$

където  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  са константи, намираме

$$g(r) = b_1 \left( \frac{1}{r} - \tilde{M} \right) e^{\tilde{M}r} + b_2 \left( \frac{1}{r} + \tilde{M} \right) e^{-\tilde{M}r}.$$

Общото решение на (3.68) се записва така:

$$(3.69) \quad f(r) = a_1 r^2 + \frac{a_2}{r} + \frac{b_1}{\tilde{M}^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{M}} \right) e^{\tilde{M}r} + \frac{b_2}{\tilde{M}^2} \left( \frac{1}{r} + \tilde{M} \right) e^{-\tilde{M}r}.$$

Аналогичен вид има и функцията

$$(3.70) \quad \hat{f}(r) = A_1 r^2 + \frac{A_2}{r} + \frac{B_1}{\tilde{M}^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{M}} \right) e^{\tilde{M}r} + \frac{B_2}{\tilde{M}^2} \left( \frac{1}{r} + \tilde{M} \right) e^{-\tilde{M}r}.$$

От граничното условие на безкрайност (3.65) получаваме

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = 0.$$

Останалите константи в (3.69) и (3.70) определяме от (3.47)–(3.50) при условие, че решението (3.70) няма особеност при  $r=0$ . Тогава

$$f(r) = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2r} + \frac{3}{2\tilde{M}^2} \left[ \left( \frac{1}{r} + \tilde{M} \right) e^{-\tilde{M}(r-1)} - \frac{1}{r} (1 + \tilde{M}) \right] \frac{c_1}{c_2},$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(r) = & \frac{1}{c_3} \left\{ -\frac{3}{2} (1 + \tilde{M}) \left[ (1 - \tilde{M}) \sqrt{\frac{\gamma}{k}} e^{\tilde{M}\sqrt{\frac{\gamma}{k}}} - (1 + \tilde{M}) \sqrt{\frac{\gamma}{k}} e^{-\tilde{M}\sqrt{\frac{\gamma}{k}}} \right] \right. \\ & \times r^2 + \frac{3}{2} (1 + \tilde{M}) \left[ \left( \frac{1}{r} - \tilde{M} \sqrt{\frac{\gamma}{k}} \right) e^{\tilde{M}r\sqrt{\frac{\gamma}{k}}} - \left( \frac{1}{r} + \tilde{M} \sqrt{\frac{\gamma}{k}} \right) e^{-\tilde{M}r\sqrt{\frac{\gamma}{k}}} \right] \left. \right\}, \end{aligned}$$

където  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  са известни константи.

От уравненията на Стокс за движението намираме налягането

$$(3.71) \quad p = p_\infty - \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{2+3k}{1+k} \left[ 1 + \frac{2+3k}{3(1+k)} \tilde{M} \right] \cos \theta e^{i\tau}.$$

Тогава за коефициента на съпротивлението  $c_f$  получаваме

$$c_f = \frac{W}{\pi a^2 \frac{1}{2} \rho U_0^2} = \frac{4}{\text{Re}} \int_0^\pi [p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta]_{r=1} \sin \theta d\theta,$$

където

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right).$$

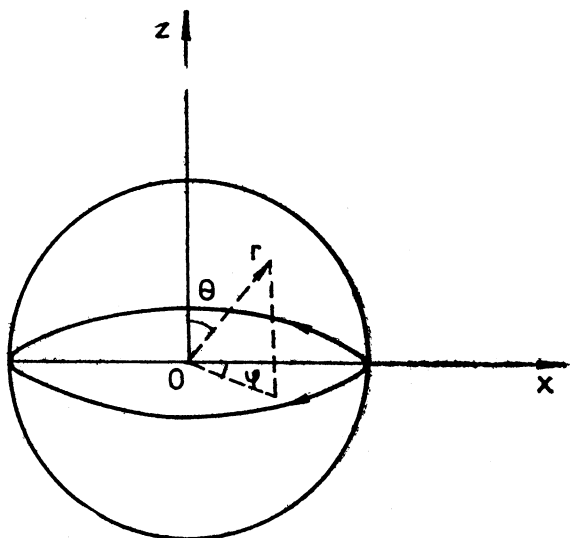
След съответни пресмятания

$$(3.72) \quad c_f = \frac{4}{\text{Re}} \frac{2+3k}{1+k} \left[ 1 + \frac{2+3k}{3(1+k)} \tilde{M} \right] e^{i\tau}.$$

Тази формула е обобщение на формулата (3.58), получена в 3.1.5, за случая на стационарно обтичане на сферична капка от вискозен флуид ( $\omega = 0$ ,  $\tilde{M}^2 = i \frac{\omega a^2}{\nu} = 0$ ).

### 3.1.7. Ротационни осцилации на сфера

Нека сфера с радиус  $a$  (фиг. 15) е напълнена с вискозен несвиваем флуид. Предполагаме, че тя извършва ротационни осцилации с честота  $\omega$  около един от диаметрите си. Да въведем сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$  с начало, съвпадащо с центъра на сферата. Предполагаме, че индуцираното течение на флуида е бавно, ососиметрично и кръгово ( $v_r = v_\theta = 0$ ). Тогава



Фиг. 15

ротационната скорост  $v_\varphi$  (вж. т. 2 от приложението) в стоксово приближение удовлетворява следното уравнение:

$$(3.73) \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \nu \left[ \nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right],$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Граничното условие за  $v_\varphi$  има вида

$$(3.74) \quad v_\varphi = \Omega a \sin \theta e^{i\omega t} \text{ при } r=a,$$

където физически смисъл има само реалната част. Полагаме

$$v_\varphi = \frac{d\omega(r)}{dr} \sin \theta e^{i\omega t} \text{ и получаваме}$$

$$\frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2\omega}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{d\omega}{dr} - i \frac{\omega}{v} \frac{d\omega}{dr} = 0,$$

или

$$\frac{d^3\omega}{dr^3} + \frac{d}{dr} \left( \frac{2}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) - i \frac{\omega}{v} \frac{d\omega}{dr} = 0.$$

Като интегрираме еднократно, намираме

$$\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\omega}{dr} - i \frac{\omega}{v} \omega = 0,$$

или

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\omega}{dr} + \omega \right) \right] - i \frac{\omega}{v} \omega = 0.$$

Следователно

$$\frac{d^2}{dr^2} (\omega r) - (1+i)^2 \left( \sqrt{\frac{\omega}{2v}} \right)^2 \omega r = 0.$$

Общият интеграл на това уравнение има вида

$$\omega r = \frac{1}{2} C_1 e^{\lambda r} + \frac{1}{2} C_2 e^{-\lambda r},$$

където

$$\lambda = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2v}}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{C_1}{2r} e^{\lambda r} + \frac{C_2}{2r} e^{-\lambda r} \right] \sin \theta e^{i\omega t} = \\ &= \left[ \frac{C_1}{2r} \left( \lambda - \frac{1}{r} \right) e^{\lambda r} - \frac{C_2}{2r} \left( \lambda + \frac{1}{r} \right) e^{-\lambda r} \right] \sin \theta e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Тъй като  $v_\varphi$  при  $r=0$  трябва да бъде крайна величина, полагаме  $C_1 = -C_2$ . Следователно

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \left[ \frac{C_1 x}{r} \cdot \frac{e^{\lambda r} + e^{-\lambda r}}{2} - \frac{C_1}{r^2} \cdot \frac{e^{\lambda r} - e^{-\lambda r}}{2} \right] \sin \theta e^{i\omega t} = \\ &= C_1 \left[ \frac{\lambda}{r} \operatorname{ch} \lambda r - \frac{1}{r^2} \operatorname{sh} \lambda r \right] \sin \theta e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Константата  $C_1$  определяме, като използваме граничното условие върху сферата (3.74):

$$C_1 = \frac{\Omega a^2}{\lambda \operatorname{ch} \lambda a - \operatorname{sh} \lambda a}.$$

По такъв начин за  $v_\varphi$  получаваме

$$(3.75) \quad v_\varphi = \frac{\Omega a^2}{\lambda \operatorname{ch} \lambda a - \operatorname{sh} \lambda a} \left[ \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda r}{r} - \frac{\operatorname{sh} \lambda r}{r^2} \right] \sin \theta e^{i\omega t}.$$

**Забележка.** Ако сферата осцилира в безкраен вискозен флуид, ротационната скорост  $v_\varphi$  ще клони към нула при  $r \rightarrow \infty$ . Следователно константата  $C_1$  във формулата

$$v_\varphi = \left[ \frac{C_1}{2r} \left( \lambda - \frac{1}{r} \right) e^{\lambda r} + \frac{C_2}{2r} \left( \lambda + \frac{1}{r} \right) e^{-\lambda r} \right] \sin \theta e^{i\omega t}$$

трябва да бъде равна на нула. Тогава

$$(3.76) \quad v_\varphi = \frac{a^2 \Omega e^{\lambda a}}{1 + \lambda a} \left( \lambda + \frac{1}{r} \right) e^{-\lambda r} \sin \theta e^{i\omega t}.$$

### 3.1.8. Вискозно течение в биконичен вискозиметър

Да разгледаме вискозно течение между два въртящи се с постоянни ъглови скорости  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  коаксиални конуса (фиг. 16). Удобно е да се използва сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$ . Ще предположим, че породеното от въртенето на конусите течение е ососиметрично и кръгово ( $v_r = v_\theta = 0$ ). Като означим с  $\alpha$  и  $\beta$  полувертикалните ъгли на коничните повърхности, за граничните условия получаваме

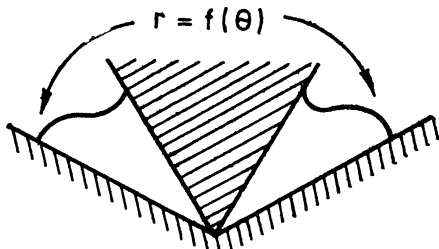
$$(3.77) \quad \begin{aligned} v_\varphi &= r \Omega_1 \sin \alpha, & \theta &= \alpha, \\ v_\varphi &= r \Omega_2 \sin \beta, & \theta &= \beta. \end{aligned}$$

Уравнението за  $v_\varphi$  има вида (3.73). Вземайки предвид граничните условия (3.77), полагаме

$$(3.78) \quad v_\varphi = r \sin \theta f(\theta).$$

От (3.73) и (3.78) за функцията  $f(\theta)$  получаваме уравнението

$$(3.79) \quad \begin{aligned} & \frac{d^2(f \sin \theta)}{d\theta^2} \\ & + \cotg \theta \frac{d}{d\theta} (f \sin \theta) + \\ & + \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sin \theta} f = 0 \end{aligned}$$



Фиг. 16

и следните гранични условия:

$$(3.80) \quad f(\alpha) = \Omega_1, \quad f(\beta) = \Omega_2.$$

Чрез непосредствено заместване установяваме, че  $f = c_1 = \text{const}$  удовлетворява (3.79). При  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$

$$v_\varphi = \Omega r \sin \theta.$$

В този случай флуидът се движи (върти) между конусите като твърдо тяло. Да предположим, че  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  и да намерим друго решение на уравнението (3.79). Като извършим диференцирането относно  $\theta$  в (3.79), намираме

$$(3.81) \quad \sin \theta \frac{d^2 f}{d\theta^2} + 3 \cos \theta \frac{df}{d\theta} = 0.$$

Това уравнение може да се запише и така:

$$\frac{d\left(\frac{df}{d\theta}\right)}{d\theta} = -3 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{df}{d\theta}.$$

или

$$\frac{d\left(\frac{df}{d\theta}\right)}{\frac{df}{d\theta}} = -3 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Следователно

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{\text{const}}{\sin^3 \theta}$$

и общото решение на (3.81) има вида

$$(3.82) \quad f(\theta) = C_1 + C_2 \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right).$$

От граничните условия (3.80) за константите  $C_1$  и  $C_2$ , получаваме

$$C_1 = \frac{\Omega_1 \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \right) - \Omega_2 \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}},$$

$$C_2 = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}.$$

Като заместим (3.82) в (3.78), намираме

$$(3.83) \quad v_\varphi(r, \theta) = C_1 r \sin \theta + C_2 r \left[ \sin \theta \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - \cotg \theta \right].$$

Сега може да пресметнем всички компоненти на тензора на скоростта на деформацията. Получаваме

$$\varepsilon_{rr} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_{r\varphi} = 0, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{C_2}{\sin^2 \theta}.$$

Тъй като  $\varepsilon_{\theta\varphi}$  не зависи от  $r$ , тензорът на скоростта на деформацията е почти постоянен, когато  $\alpha$  и  $\beta$  не се различават съществено. За да може да използваме биконичния вискозиметър, трябва да намерим формата на междофазовата граница. Съгласно формулите, изразяващи връзката между тензора на напрежението и тензора на скоростта на деформацията (вж. т. 2 от приложението) намираме

$$(3.84) \quad \begin{aligned} p_{rr} &= p_{\theta\theta} = p_{\varphi\varphi} = -p, \\ p_{\theta\varphi} &= \frac{2\mu C_2}{\sin 2\theta}, \quad p_{r\theta} = p_{r\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Да предположим, че формата на междофазовата граница, до която флуидът запълва вискозиметъра, се дава с уравнението

$$r = F(\theta).$$

Нека нормалният единичен вектор  $\vec{n}$  към тази повърхнина има компоненти  $n_r$ ,  $n_\theta$  и  $n_\varphi$ . Тогава

$$n_r = \frac{r}{\sqrt{r^2 + F'^2(\theta)}}, \quad n_\theta = -\frac{F'(\theta)}{\sqrt{r^2 + F'^2(\theta)}}, \quad n_\varphi = 0.$$

Като вземем предвид, че флуидът на междофазовата граница е идеален (с постоянно налягане  $p_a$ , равно на атмосферното), граничните условия за напрежението имат вида (вж. (1.76)).

$$(3.85) \quad \begin{aligned} p_{rr} n_r + p_{r\theta} n_\theta &= -p_a n_r, \\ p_{\theta r} n_r + p_{\theta\theta} n_\theta &= -p_a n_\theta, \\ p_{\varphi r} n_r + p_{\varphi\theta} n_\theta &= 0. \end{aligned}$$

Тъй като  $p_{r\theta} = p_{\theta r} = 0$ , то първите две равенства на (3.85) са удовлетворени, ако  $p = p_a$ . Но  $p_{\varphi r} = 0$ , следователно или  $C_2 = 0$ , или  $n_\theta = 0$ . При  $C_2 = 0$  получаваме, че флуидът се движи като твърдо тяло, т. е.  $\Omega_1 = \Omega_2$ , което противоречи на допускането. Тогава  $p_{\varphi\theta} \neq 0$  и  $n_\theta = 0$ , т. е. междофазовата граница е част от сфера с център в точката  $r = 0$ . Поради действието на силата на тежестта тази сферична форма ще се наруши, но ние предполагахме, че във вискозиметъра граничният ефект от междофазовата граница не влияе силно на ротационното движение на флуида. Моментът, действащ върху вътрешния конус, се пресмята по следния начин:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^R p_{\theta\varphi}|_{\theta=\alpha} r^2 \sin^2 \varphi dr d\varphi = \\ &= 2\pi \sin^2 \alpha \int_0^R r^2 p_{\theta\varphi}|_{\theta=\alpha} dr = 4\pi\mu C_2 \int_0^R r^2 dr. \end{aligned}$$

Следователно

$$(3.86) \quad M = \frac{4}{3} \pi \mu C_2 R^3.$$

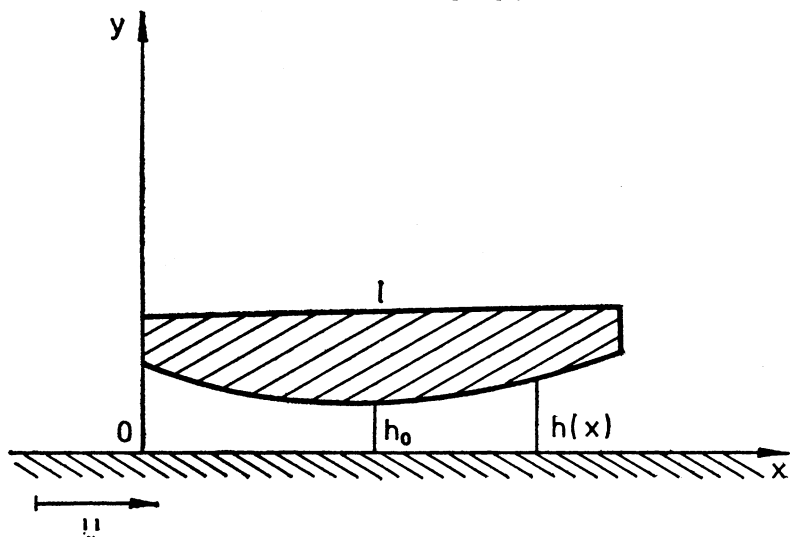
Тук  $R$  е радиусът на междупазовата граница. Ако измерим  $M$  и  $R$ , може да пресметнем вискозитета  $\mu$  на течността във вискозиметъра.

### 3.1.9. Стационарно течение в смазочен слой

Теченията на вискозна течност в смазочен слой имат много важни технически приложения. В тънък маслен слой, намиращ се между две преместващи се една спрямо друга машинни части, може да възникнат големи разлики в наляганията. Това спомага доближаващите се части да се запазят от непосредствено съприкосновение.

Най-простият модел на смазочен слой е течният филм, заключен между неограничена плоска опорна повърхност и плъзгач с крайна дължина  $l$ . Височината на слоя  $h(x)$  между плъзгача и опорната повърхност се счита за малка, така че характерният ѝ размер  $h_0$  удовлетворява условието  $h_0 \ll l$ . Да предположим, че плъзгачът е неподвижен, а опорната повърхност се движи със скорост  $U$  (фиг. 17). Породеното двумерно течение се описва от уравненията на Навие — Стокс и следните гранични условия:

$$(3.87) \quad \begin{aligned} u &= U, \quad v = 0, \quad y = 0; \\ u &= 0, \quad v = 0, \quad y = h(x); \\ p &= p_0, \quad x = 0, \quad p = p_0, \quad x = l. \end{aligned}$$



Фиг. 17

Тази задача е решена от Рейнолдс през 1886 г. — три години след публикуването на работата на Н. П. Петров, съдържаща основите на хидродинамичната теория на смазката. Да въведем безразмерни променливи, както следва:

$$\eta = \frac{y}{h_0}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad u = Uu_1, \quad v = U \frac{h_0}{l} v_1,$$

$$p = p_0 + \frac{\rho \nu l U}{h_0^2} \left[ p_1(\xi) + \left( \frac{h_0}{l} \right)^2 p_2(\xi, \eta) \right], \quad h = h_0 h_1(\xi).$$

Тогава уравненията на вискозните флуиди приемат вида

$$(3.88) \quad \begin{aligned} & -\frac{dp_1}{d\xi} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \left( \frac{h_0}{l} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \right) - \\ & - \left( \frac{h_0}{l} \right)^2 \frac{Ul}{\nu} \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) = 0, \\ & -\frac{\partial p_2}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + \left( \frac{h_0}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} - \left( \frac{h_0}{l} \right)^2 \frac{Ul}{\nu} \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) = 0, \\ & \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0. \end{aligned}$$

Следователно, ако е изпълнено условието

$$(3.89) \quad \left( \frac{h_0}{l} \right)^2 \frac{Ul}{\nu} \ll 1,$$

в (3.88) може да пренебрегнем инерционните членове. Оценките показват, че условието (3.89) се удовлетворява в много реални случаи. Например при  $U = 10$  м/сек,  $l = 100$  мм,  $h_0 = 0,2$  мм и  $\nu = 4 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/сек получаваме  $\frac{Ul}{\nu} = 25\,000$ ,  $\frac{Ul}{\nu} \cdot \left( \frac{h_0}{l} \right)^2 = 0,1$ . Като пренебрегнем членовете от порядъка на  $\left( \frac{h_0}{l} \right)^2$  и  $\left( \frac{h_0}{l} \right)^2 \frac{Ul}{\nu}$ , получаваме уравненията

$$(3.90) \quad \begin{aligned} & -\frac{dp_1}{d\xi} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} = 0, \quad -\frac{\partial p_2}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} = 0, \\ & \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

и условията

$$(3.91) \quad \begin{aligned} u_1 = 1, \quad v_1 = 0, \quad y = 0; \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \eta = h(\xi); \\ p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \xi = 0; \quad \xi = 1. \end{aligned}$$

Съгласно (3.91) от първото уравнение на (3.90) намираме

$$(3.92) \quad u_1 = 1 - \frac{\eta}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{dp_1}{d\xi} (h_1 - \eta) \eta.$$

Ако използваме дебита в смазочния слой  $q = \int_0^{h(\xi)} u_1 d\eta$ , от

уравнението на непрекъснатостта следва

$$q = \text{const.}$$



Заместваме  $u_1$  с равното му и получаваме

$$(3.93) \quad \frac{dp_1}{d\xi} = 12 \left( \frac{1}{2h_1^2} - \frac{q}{h_1^3} \right).$$

След интегриране на (3.93) за разпределението на налягането получаваме:

$$(3.94) \quad p_1(\xi) = -12q \int_0^\xi \frac{d\xi}{h_1^3} + 6 \int_0^\xi \frac{d\xi}{h_1^2}.$$

Тъй като  $p_1(1)=0$ , то

$$(3.95) \quad q = \frac{1}{2} \frac{b_1(1)}{b_2(1)}, \quad b_1(\xi) = \int_0^\xi \frac{d\xi}{h_1^2}, \quad b_2 = \int_0^\xi \frac{d\xi}{h_1^3}.$$

При известна геометрия на слоя  $h_1(\xi)$  от (3.95) определяме дебита, а от (3.92) и (3.94) намираме разпределението на скоростта и налягането.

Да разгледаме случая, когато повърхността на плъзгача е равнина, т. е.

$$h_1(\xi) = 1 - \delta\xi, \quad \delta > 0.$$

Извършваме пресмятанията и получаваме

$$q = \frac{1-\delta}{2-\delta}, \quad p_1(\xi) = 6\delta \frac{\xi(1-\xi)}{h_1^2(2-\delta)},$$

$$\frac{dp_1}{d\xi} = \frac{6\delta}{(2-\delta)h_1^3} (1-2\xi+\delta\xi).$$

Ако  $\delta$  е малка величина, разпределението на налягането е близко до параболично, при което  $p_{1 \max}$  се получава в точката

$$\xi_m = \frac{1}{2-\delta} \text{ и } p_{1 \max} = \frac{3}{2} \frac{\delta}{(2-\delta)(1-\delta)}.$$

В размерен вид

$$(p-p_0)_{\max} = \frac{\mu l U}{h_0^2} p_{1 \max}.$$

Тогава при малки стойности на  $\frac{h_0}{l}$  налягането в слоя може да достигне много големи стойности.

*Нормалната сила*, действаща на всяка от повърхностите, получаваме след интегриране на налягането в интервала  $0 \leq x \leq l$ :

$$\mathcal{P} = \int_0^l (p-p_0) dx = \frac{-6\mu U l^2}{h_0^2} \frac{1}{\delta^2} \left[ \ln(1-\delta) + \frac{2\delta}{2-\delta} \right].$$

Тангенциалната сила на триене, която действа на опорната повърхност, се изчислява след интегриране на локалното напрежение на триенето:

$$W = \int_0^l \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \frac{\mu U l}{h_0} \frac{1}{\delta} \left[ 4 \ln(1-\delta) + \frac{6\delta}{2-\delta} \right].$$

При  $\delta = \frac{1}{2}$  получаваме следните стойности за нормалната сила, поддържаща плъзгача и силата на триене:

$$\mathcal{P} \approx 0,65 \frac{\mu U l^2}{h_0^2}, \quad W \approx -1,54 \frac{\mu U l}{h_0}.$$

Когато  $0 < \xi < \xi_m$ , налягането расте и създава възможност за откъсване на потока от горната повърхност, т. е. за образуване на обратно течение. Координатата  $\xi_{\text{отк.}}$  на точката на откъсване се намира от условието

$$(3.96) \quad \left( \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right)_{\eta=h_1} = 0,$$

откъдето

$$\frac{dp_1}{d\xi} = \frac{2}{h_1^2}, \quad \xi_{\text{отк.}} = \frac{1}{\delta} \frac{2\delta-1}{2-\delta}.$$

При  $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$  в смазочния слой става откъсване на потока.

При  $\delta = \frac{1}{2}$  точката на откъсване се намира в сечението  $\xi = 0$ , а при  $\delta = 1$  — в сечението  $\xi \approx 1$ .

### 3.1.10. Цилиндричен лагер

Да разгледаме флуидно течение между два безкрайно дълги кръгови цилиндъра, породено от въртенето на вътрешния цилиндър с ъглова скорост  $\omega$ . Във втора глава беше получено точно решение на тази задача в частния случай, когато цилиндрите са концентрични.

Да предположим сега, че цилиндрите са ексцентрично разположени, течността запълва цялото пространство между тях и течението може да се разглежда като равнинно. Избираме радиуса  $a$  на вътрешния цилиндър и скоростта  $U = \omega a$  за характерни величини при обезразмеряването на уравненията и граничните условия. Нека началото на цилиндричната координатна система съвпада с центъра на сечението на вътрешния цилиндър (*цапфа*). В тази координатна система цапфата на повърхността на външния цилиндър (*лагер*) имат съответно уравнения  $r=1$  и  $r=1+h$ . Тук

$$(3.97) \quad h = \delta + e \cos \varphi,$$

където  $\delta$  и  $e$  са дадени геометрични параметри. Нека  $\tau = \frac{e}{\delta}$ ; тогава от геометрични съображения е ясно, че  $0 \leq \tau \leq 1$ . Ще предполагаме, че пространството между цилиндрите е малко, така че малките величини  $\delta$  и  $e$  да имат един и същ порядък.

Да пренебрегнем инерционните членове и да запишем уравненията на Стокс (3.2) в цилиндрични координати:

$$(3.98) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2}, \\ \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Граничните условия, изразяващи условието за полепване на течността върху повърхностите на двата цилиндъра, се записват в следния вид:

$$(3.99) \quad \begin{aligned} v_r &= 0, \quad v_\varphi = 1, \quad r = 1; \\ v_r &= 0, \quad v_\varphi = 0, \quad r = 1 + h. \end{aligned}$$

Пълното решение на граничната задача (3.98), (3.99) е дадено от Н. Е. Жуковски и С. А. Чаплигин, 1904 г. Тук ще се ограничим с едно приближено решение, което е валидно при малки стойности на  $\delta$  (А. Зомерфелд, 1904 г.).

Да въведем нова независима променлива  $\eta$  и нови зависими променливи  $\bar{p}$ ,  $v$ ,  $u$ :

$$\eta = \frac{r-1}{\delta}, \quad \bar{p}(\varphi, \eta) = \delta^2 p.$$

$$v_r = \delta v(\varphi, \eta), \quad v_\varphi = u(\varphi, \eta).$$

Тогава уравненията и граничните условия добиват вида

$$(3.100) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} &= \delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\delta^3}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{u}{r} \right) + \frac{\delta^4}{r^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\delta}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{v}{r} \right) + \frac{\delta^2}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\delta}{r} v &= 0; \end{aligned}$$

$$(3.101) \quad \begin{aligned} u &= 1, \quad v = 0, \quad \eta = 0; \\ u &= 0, \quad v = 0, \quad \eta = \bar{h}; \end{aligned}$$

$$(3.102) \quad \bar{h} = 1 + \tau \cos \varphi.$$

Граничната задача (3.100), (3.101) съдържа малък параметър  $\delta$ , поради което могат да се извършат опростявания. В уравненията

(3.100) ще пренебрегнем членовете, които са от порядъка на  $\delta^n$ , където  $n \geq 1$ .

От първото уравнение на (3.100) следва, че с точност до членовете от порядъка на  $\delta^2$  налягането не се изменя в напречна посока и следователно е функция само на  $\varphi$ :

$$\bar{p} = \bar{p}(\varphi).$$

Когато интегрираме второто уравнение на (3.100), получаваме

$$(3.103) \quad u = \frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\varphi} \eta^2 + C_1 \eta + C_2,$$

където съгласно граничните условия (3.101)

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\varphi} \bar{h} - \frac{1}{\bar{h}}, \quad C_2 = 1.$$

От уравнението на непрекъснатостта следва

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{\bar{h}} u d\eta = v \Big|_0^{\bar{h}} - u(\varphi, \bar{h}) \frac{d\bar{h}}{d\varphi} = 0.$$

Това съотношение означава, че през всяко сечение  $\varphi = \text{const}$  протича едно и също количество течност:

$$(3.104) \quad \int_0^{\bar{h}} u d\eta = -\frac{1}{12} \frac{d\bar{p}}{d\varphi} \bar{h}^3 + \frac{\bar{h}}{2} = \frac{1}{2} \bar{h}_0.$$

Тук  $\bar{h}_0$  е обезразмерено с ширината  $\delta$  на онова сечение между цилиндрите, в което  $\frac{d\bar{p}}{d\varphi} = 0$ . От (3.104) намираме

$$\frac{d\bar{p}}{d\varphi} = 6(\bar{h}^{-2} - \bar{h}_0 \bar{h}^{-3}).$$

Ако въведем означението

$$q_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} \bar{h}^{-k} d\varphi,$$

тогава за налягането получаваме формулата

$$(3.105) \quad \bar{p}(\varphi) = \bar{p}(0) - 6[\bar{h}_0 q_3(\varphi) - q_2(\varphi)].$$

Тъй като налягането  $\bar{p}(\varphi)$  е периодична функция на  $\varphi$ , то  $\bar{h}_0$  трябва да удовлетворява уравнението

$$(3.106) \quad \bar{h}_0 q_3(2\pi) = q_2(2\pi).$$

По такъв начин, започвайки с функцията  $\bar{h}(\varphi)$ , определена от (3.102), може да намерим  $\bar{h}_0$  от (3.106), а след това от (3.103) и (3.105) — разпределението на налягането и скоростта.

Основното приложение на полученото решение е използването му за пресмятане на силата и момента, които действуват на

единица дължина на цапфата. На даден елемент от повърхността  $ad\varphi$  действа тангенциална сила  $p_{r\varphi}ad\varphi$  и нормална сила  $p_{rr}ad\varphi$ . Главният момент на силите, действащи на цапфата относно нейния център, е равен на

$$M = -a^2 \int_0^{2\pi} p_{r\varphi} d\varphi.$$

Поради симетрия главният вектор на нормалните и тангенциалните сили, действащи на цапфата, е перпендикулярен на линията, съединяваща центровете на сеченията на цилиндрите, и е равен на

$$\mathcal{P} = -a \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial p_{rr}}{\partial \varphi} + p_{r\varphi} \right) \cos \varphi d\varphi.$$

За напреженията, записани в размерен вид, получаваме

$$p_{r\varphi} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \approx \mu \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = \frac{\mu U}{a\delta} (3\bar{h}_0 \bar{h}^{-2} - 4\bar{h}^{-1}),$$

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \approx -\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{6\mu U}{a\delta^2} (\bar{h}^{-2} - \bar{h}_0 \bar{h}^{-3}).$$

Оттук с точност до малки величини от порядъка на  $\delta$  следва, че в подинтегралния израз за  $\mathcal{P}$  може да се ограничим с първия член и да заменим  $\cos \varphi$  с  $\delta e^{-1} \bar{h}$ . Така получаваме

$$M = \frac{\mu U a}{\delta} [4q_1(2\pi) - 3\bar{h}_0 q_2(2\pi)],$$

$$\mathcal{P} = \frac{6\mu U}{\delta e} [q_1(2\pi) - \bar{h}_0 q_2(2\pi)].$$

Ще отбележим, че участващите тук интеграли се пресмятат в краен вид:

$$q_{k+1} = \frac{\tau}{k} \frac{dq_k}{d\tau} + q_k, \quad q_1(2\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

където  $k=1, 2, \dots$  Това позволява да изразим  $M$  и  $\mathcal{P}$  посредством геометричните параметри  $\delta$  и  $\varepsilon$ :

$$M = \frac{4\pi\mu U a (1+2\tau^2)}{\delta (2+\tau^2) \sqrt{1-\tau^2}},$$

$$\mathcal{P} = \frac{12\pi\mu U \tau}{\delta^2 (2+\tau^2) \sqrt{1-\tau^2}}.$$

При  $\tau \rightarrow 0$  (което съответствува на случая на коаксиални цилиндри) от (3.106) получаваме известната формула на Н. П. Петров

$$M = \frac{2\pi\mu U a}{\delta}.$$

Да въведем по аналогия със закона за сухо триене коефициента  $f$  чрез съотношението

$$M = \mathcal{P}af.$$

Тогава за  $f$  намираме

$$f = \frac{1}{3} \delta \frac{1+2\tau^2}{\tau}.$$

Коефициентът  $f$  достига минималната си стойност  $f_{\min} = 0,943 \delta$  при  $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### § 3.2. ПРИБЛИЖЕНИЕ НА ОЗЕЕН

На големи разстояния от обтекаемостя тляо скоростта на течността се различава с малка величина от скоростта на несмутеното течение  $U\vec{i}$ . Да отделим от конвективните членове на уравнения на Навие — Стокс линейната част  $U \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$ . Ако в тези уравнения запазим линейната част и изоставим останалите нелинейни конвективни членове, от (3.1) получаваме в безразмерен вид следната система уравнения:

$$(3.107) \quad \text{Re} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -\nabla p + \Delta \vec{v};$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Далече от тялото тази система апроксимира по-добре уравнения на Навие — Стокс в сравнение с приближението на Стокс, в което конвективните членове са пренебрегнати напълно. В областта близо до тялото такава апроксимация на конвективните членове не е удовлетворителна, но всички конвективни членове за течения при малки стойности на  $\text{Re}$  са малки в сравнение с вискозните. Поради това уравненията (3.107) се оказват валидни и близо до тялото. Системата уравнения (3.107) дава приближението на Озеен. В много случаи резултатите, получени от нея, са по-добри в сравнение с резултатите, получени посредством уравненията на Стокс.

#### 3.2.1. Обтичане на сфера

Да разгледаме в приближение на Озеен задачата за обтичане на твърда сфера от равномерен поток (К. Озеен, 1910 г.; Г. Ламб, 1911 г.). Това означава да се намери решение на системата (3.107), което удовлетворява граничните условия

$$(3.108) \quad \begin{aligned} \vec{v} &= 0, & r &= 1; \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{i}, & r &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Прилагаме оператора  $\nabla$  към първото уравнение на (3.107) и вземайки предвид уравнението на непрекъснатостта, заключаваме, че и в приближението на Озеен налягането е хармонична функция. Това позволява да се изключи налягането от системата (3.107). Да положим

$$p = p_{\infty} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \vec{v} = \nabla \zeta + \vec{v}_1,$$

където  $\zeta$  е хармонична функция. Тогава от (3.107) следва

$$(3.109) \quad \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}_1 - \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x} = 0,$$

$$(3.110) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v}_1 &= 0, \\ \Delta \zeta &= 0. \end{aligned}$$

Функцията  $\vec{v}_1$  търсим във вида

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \chi - \chi \vec{i}.$$

От (3.109) за  $\chi$  получаваме уравнението

$$(3.111) \quad \Delta \chi - \text{Re} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0.$$

И така за  $\vec{v}_1$  и  $p$  окончателно намираме

$$(3.112) \quad \begin{aligned} \vec{v}_1 &= \nabla \left( \zeta + \frac{1}{\text{Re}} \chi \right) - \chi \vec{i}, \\ p &= p_{\infty} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \end{aligned}$$

където функциите  $\zeta$  и  $\chi$  удовлетворяват уравненията (3.110) и (3.111). Частни решения на уравненията (3.110) и (3.111) са функциите

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{r}, \quad \chi_1 = \frac{1}{r} e^{k(x-r)}, \quad \zeta'_n = \frac{\partial^n \zeta_1}{\partial x^n}, \quad \chi_n = e^{kx} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( \frac{1}{r} e^{-kr} \right), \\ k &= \frac{1}{2} \text{Re}. \end{aligned}$$

Въз основа на това решенията на граничните задачи за  $\zeta$  и  $\chi$  търсим във вид на следните редове:

$$(3.113) \quad \begin{aligned} \zeta &= A_0 \frac{1}{r} + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) + A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \dots, \\ \chi &= -1 + e^{kx} \left[ B_0 \frac{1}{r} e^{-kr} + B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} e^{-kr} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ще отбележим, че в сила е формулата

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( \frac{1}{r} \right) = (-1)^n n \frac{p_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad \beta = \cos \theta,$$

в която  $p_n(\beta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\beta^n} [(\beta^2 - 1)^n]$  са полиномите на Лъожандър.

Като се използва тази формула, разлагането (3.113) за  $\zeta$  може да се представи в еквивалентна форма на разлагане по полиномите  $p_n$ . Полиномите на Лъожандър образуват пълна система функции в интервала  $[-1, +1]$ , а това означава, че (3.113) представлява най-обща зависимост на  $\zeta$  от ъгъла  $\theta$ . Подобни разсъждения са приложими и за  $\chi$ . Лесно е да се покаже, че при произволни  $A_k$  и  $B_k$  векторът на скоростта (3.112) удовлетворява условието за преход към равномерен поток при  $r \rightarrow \infty$ . Остава така да се определят  $A_k$  и  $B_k$ , че да са удовлетворени условията за полепване на повърхността на сферата  $r=1$ . Като проектираме вектора (3.112) върху осите на сферичната координатна система  $(r, \varphi, \theta)$ , за компонентите на скоростта получаваме

$$(3.114) \quad \begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \cos \theta, \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \chi}{r \partial \theta} + \chi \sin \theta. \end{aligned}$$

Ще считаме, че числото на Рейнолдс  $\text{Re}$  играе ролята на малък параметър и ще приемем следните априорни оценки за коефициентите:

$$(3.115) \quad A_n \sim \text{Re}^{n-1}, \quad B_n \sim \text{Re}^n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Тези оценки се проверяват, след като се получи окончателно решението. Като запазим в (3.113) само членовете до втори порядък (до  $\text{Re}^2$ ) и предполагайки, че  $r \sim 1$  (областта близо до тялото) за  $\zeta$  и  $\chi$  получаваме разлагането

$$\begin{aligned} \chi &= -1 + B_0 \left[ \frac{1}{r} - k(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k^2 r (1 - \cos \theta)^2 \right] + \\ &+ B_1 \left( \frac{1}{r^2} \cos \theta + \frac{k}{r} \cos^2 \theta \right) + B_2 \frac{1}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ \zeta &= \frac{A_0}{r} - A_1 \frac{\cos \theta}{r^2} + A_2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}. \end{aligned}$$

С приетата степен на точност намираме следните разлагания за  $v^r$  и  $v_\theta$  при  $r=1$ :

$$\begin{aligned} v_r &= -A_0 + 2A_1 \cos \theta - 3A_2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \cos \theta - \\ &- B_0 \left[ \frac{1}{2k} + \cos \theta - \frac{k}{4} (1 - 3 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta) \right] + B_1 \left( \frac{\cos \theta}{k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right) - \frac{1}{2k} B_2 (3 \cos^2 \theta - 1), \\ \frac{v_\theta}{\sin \theta} &= A_1 - 6A_2 \cos \theta + B_0 \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} k (1 - \cos \theta) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2k} B_1 - 3 \frac{1}{k} B_2 \cos \theta - 1. \end{aligned}$$



Всеки от тези изрази трябва да се анулира. Като ги разложим по полиномите на Лъожандър и приравним на нула коефициентите пред  $1$ ,  $\cos \theta$  и  $3 \cos^2 \theta - 1$ , а във второто — пред  $1$  и  $\cos \theta$ , получаваме следната система за определяне на  $A_k$  и  $B_k$ :

$$\begin{aligned} A_0 + \frac{1}{2k} B_0 - \frac{1}{2} B_2 &= 0, \\ 2A_1 - B_0 \left(1 - \frac{1}{2} k\right) + \frac{1}{k} B_1 &= -1, \\ 3A_2 + \frac{1}{4} k B_0 - \frac{1}{2} B_1 + \frac{3}{2k} B_2 &= 0, \\ A_1 + \frac{1}{2} (1 - k) B_0 + \frac{1}{2k} B_1 &= 1, \\ 6A_2 - \frac{1}{2} k B_0 + \frac{3}{k} B_2 &= 0, \end{aligned}$$

откъдето намираме

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{3}{k} \frac{1 - \frac{1}{2} k^2}{4 - 3k}, & B_0 &= \frac{6}{4 - 3k}, \\ A_1 &= -\frac{2}{4 - 3k}, & B_1 &= \frac{6k}{4 - 3k}, \\ A_2 + \frac{1}{2k} B_2 &= \frac{k}{2(4 - 3k)}. \end{aligned}$$

От тези формули се вижда, че оценките (3.115) са изпълнени.

Да изчислим разпределението на завихреността в полето на течението, определено от решението (3.113). В сферични координати не е равна на нула само едната компонента на завихреността

$$\omega_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta},$$

която се изразява чрез функцията  $\chi$ :

$$\omega_\varphi = -\frac{\partial \chi}{\partial r} \sin \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \cos \theta.$$

Като се ограничим само с първото приближение за  $\chi$  в (3.113), получаваме

$$(3.116) \quad \omega_\varphi = B_0 \frac{1 + kr}{r^2} e^{k(x-r)} \sin \theta.$$

От получената формула следва, че при  $x < 0$  (пред сферата) завихреността намалява експоненциално с отдалечаване от повърхността. В тясната зона зад сферата при малки стойности на  $k(x-r)$  течението има значителна завихреност дори и на големи разстояния от тялото. По-специално в точките на параболоидната повърхност

$$kr(\cos\theta - 1) = -\alpha$$

при  $kr \gg 1$  от формула (3.116) намираме

$$\omega_\varphi = B_0 e^{-\alpha} \sqrt{\frac{2k\alpha}{r^3}}.$$

Следователно завихреността върху тази повърхнина с отдалечаване от тялото намалява така, както  $r^{-\frac{3}{2}}$ . *Тясната вихрова зона зад тялото се нарича следа.*

Да намерим силата, която действа на сферата. За напреженията  $p_{rr}$  и  $p_{r\theta}$  върху повърхността на сферата в размерен вид имаме

$$p_{rr} \approx -p = -p_\infty + \frac{\mu U}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$p_{r\theta} \approx \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{\mu U}{a} \frac{1}{k} \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Като заместим  $p_{rr}$  и  $p_{r\theta}$  в (3.13), намираме

$$W = \mu U a \iint_S \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos \theta - \frac{1}{k} \frac{\partial \chi}{\partial y} \sin \theta \right) dS.$$

Поради граничното условие при  $r=1$

$$(3.117) \quad \frac{1}{k} \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

формулата за  $W$  се преобразува в следния вид:

$$W = \mu U a \iint_S \frac{\partial \zeta}{\partial r} dS = -4\pi \mu U a A_0.$$

Като заместим израза за  $A_0$ , окончателно получаваме

$$W = 6\pi \mu U a \left( 1 + \frac{3}{8} \text{Re} \right).$$

Тази формула, изведена от Озеен, може да се разглежда като уточнение на формулата на Стокс. По тази формула се получава удовлетворително съвпадение на опитните данни с изчислителните при стойности на числото на Рейнолдс, непревишаващи единица.

### 3.2.2. Обтичане на цилиндър

Задачата за обтичане на кръгов цилиндър е решена в приближение на Озеен от Г. Ламб през 1911 г. Тя се формулира по същия начин, както и задачата за обтичане на сфера: *да се намери решение на уравненията (3.107), което да удовлетворява граничните условия (3.108).* Решението се дава от формулите (3.112), за налягането и скоростта, но функциите  $\zeta$  и  $\chi$  се различават от

дадените в (3.113) изрази. В плоския случай частни решения на уравненията (3.110) и (3.111) са функциите

$$\zeta_1 = \ln r, \quad \zeta_n = \frac{\partial^n \zeta_1}{\partial x^n}, \quad \chi_1 = e^{kx} K_0(kr), \quad \chi_n = e^{kx} \frac{\partial^n K_0(kr)}{\partial x^n}.$$

Затоа за  $\zeta$  и  $\chi$  са в сила разлаганията

$$(3.118) \quad \zeta = A_0 \ln r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \ln r + A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r + \dots,$$

$$\chi = -1 + e^{kx} \left[ B_0 K_0(kr) + B_1 \frac{\partial K_0(kr)}{\partial x} + \dots \right].$$

Тук  $K_0(kr)$  е функцията на Бесел, която намалява при  $r \rightarrow \infty$ .

Полето на скоростта, определено по формулите (3.112), (3.118), удовлетворява условието на безкрайност. Константите  $A_k$  и  $B_k$  трябва да се подберат така, че да са удовлетворени граничните условия на повърхността  $r=1$ . Вземайки предвид, че  $\text{Re}$  е малко и  $r \sim 1$ , може да се запишат разлаганията

$$K_0(kr) = -J_0(kr) \ln\left(\frac{1}{2} \gamma kr\right) + \frac{1}{4} k^2 r^2 + \dots,$$

$$J_0(kr) = 1 + \frac{1}{4} k^2 r^2 + \dots,$$

където  $\ln \gamma = 0,5772$  е известната константа на Ойлер. Като се ограничим с първия член в разлагането на  $K_0(kr)$ , намираме следните изрази за скоростта на повърхността на цилиндъра:

$$(3.119) \quad v_r = A_0 + A_1 \cos \varphi - B_0 \left[ \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} q \cos \varphi \right] + \\ + \frac{1}{2k} B_1 \cos \varphi + \cos \varphi,$$

$$v_\varphi = -A_1 \sin \varphi - B_0 \frac{1}{2} q \sin \varphi + \frac{1}{2k} B_1 \sin \varphi - \sin \varphi,$$

$$q = \ln\left(\frac{1}{2} \gamma k\right).$$

Тези изрази трябва да са равни на нула. Като групираме в (3.119) членовете с  $1$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  и приравним на нула получените коефициенти, за  $A_k$  и  $B_k$  получаваме уравненията

$$A_0 - \frac{1}{2k} B_0 = 0,$$

$$-A_1 + 1 - \frac{1}{2} B_0 (1 - q) + \frac{1}{2k} B_1 = 0,$$

$$-A_1 - 1 - \frac{1}{2} B_0 q + \frac{1}{2k} B_1 = 0,$$

откъдето намираме

$$A_0 = \frac{1}{k} \frac{2}{1-2q}, \quad B_0 = \frac{4}{1-2q},$$

$$A_1 - \frac{1}{2k} B_1 = \frac{-1}{1-2q}.$$

Така получаваме, че с приетия порядък на точност коефициентите  $A_1$  и  $B_1$  не могат да бъдат определени поотделно.

Да пресметнем разпределението на завихреността в полето на течението. С помощта на (3.114) лесно се намира единствената ненулева компонента на завихреността  $\omega_z$ :

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Ограничавайки се с първия член в разлагането на  $\chi_0$ , за  $\omega_z$  намираме

$$\omega_z = B_0 e^{kr \cos \varphi} K'_0(kr) k \sin \varphi.$$

Като използваме асимптотичното представяне на функцията на Бесел

$$K_0(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr},$$

получаваме следната формула за завихреността, която е валидна за големи стойности на  $kr$ :

$$\omega_z = -B_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2r}} \sin \varphi e^{-kr(1-\cos \varphi)}.$$

От тази формула следва, че *течението в областта пред цилиндъра е почти безвихрово* — завихреността затихва експоненциално с отдалечаването от повърхността на тялото. *Течението зад цилиндъра е вихрово*, при което завихреността е съсредоточена в тясна зона зад тялото — в следата. Върху всяка парабола от вида

$$kr(1-\cos \varphi) = \alpha$$

завихреността намалява по степенен закон с растенето на  $r$ :

$$\omega_z = -B_0 e^{-\alpha} \sqrt{\frac{\pi k}{2r}}.$$

Да изчислим силата на въздействието на потока върху единица дължина на цилиндъра при стационарно движение:

$$W = a \int_0^{2\pi} (p_{rr} \cos \varphi - p_{r\varphi} \sin \varphi) d\varphi.$$

Като използваме изразите (3.116) за напрежението на повърхността и формулите (3.117), за  $W$  намираме

$$W = \mu U \int_0^{2\pi} \frac{\partial \zeta}{\partial r} d\phi = 2\pi \mu U A_0.$$

Замествайки  $A_0$  с равното му, получаваме следната формула на Ламб:

$$(3.120) \quad W = \frac{8\pi \mu U}{1 - 2 \ln \left( \frac{1}{2} \gamma k \right)}.$$

Тази формула може да се прилага само за малки стойности на числото на Рейнолдс.

### § 3.3. ПРИБЛИЖЕНИЯ ОТ ПО-ВИСОК РЕД ПРИ ОБТИЧАНЕ НА ТВЪРДА СФЕРА

Приближенията на Стокс и Озеен се основават на пълното или частично пренебрегване на нелинейните конвективни членове в уравненията на Навие — Стокс. Това опростяване е валидно само за малки числа на Рейнолдс. Отчитането на ефектите от втори и по-висок порядък, свързани с конвективните членове, представлява интерес както от теоретична, така и от приложна гледна точка.

Анализът на приближението от първи порядък на Стокс и Озеен показва, че отчитането на нелинейните членове не може да се извърши посредством разложения в ред по степените на  $Re$ . Наистина в приближението на Стокс не съществува решение на задачата за стационарно обтичане на цилиндър, а в приближението на Озеен полученото решение съдържа логаритъм от  $Re$ . Подобни трудности има и когато търсим по-високи приближения в задачата за обтичане на сфера.

Разработени са няколко асимптотични метода, чрез които могат да се получат приближени решения на пълната гранична хидродинамична задача: *методът за срастване на асимптотичните разложения, методът на граничните поправки, многомащабният метод* и др. Асимптотичният характер на разлаганията на решенията в тези методи се определя от изискването първият от изоставените членове да бъде малък в сравнение с включените в решението членове при  $Re \rightarrow 0$ .

#### 3.3.1. Парадокс на Уайтхед

През 1851 г. Стокс решава задачата (вж. 3.1.1) за стационарно обтичане на сфера от бавен равномерен вискозен поток при безкрайно малки числа на Рейнолдс. Някои задачи изискват разглеждането на обтичане на тела от вискозни флуиди при малки, но не безкрайно малки числа на Рейнолдс, при което не се пренебрегват напълно или частично конвективните членове в уравне-

нята на Навие — Стокс — например при движението на малки частици и в теорията на смазките.

С други думи, съществуват проблеми, в които отчитането на ефектите от втори и по-висок порядък, свързани с инерцията на флуидите, е много важно.

Тридесет и осем години след като Стокс публикува своите резултати, Уайтхед през 1889 г. прави опит да получи по-високи приближения в решаването на *задачата за бавно обтичане на сфера от равномерен вискозен поток*. За намиране на вискозните членове в уравненията на Навие — Стокс той използва итерационен метод, като изчислява инерционните членове от предишните по-ниски приближения. Тъй като граничните условия не зависят от числото на Рейнолдс, използването на този итерационен процес е еквивалентно на търсене на хидродинамичните величини в ред по степените на числото на Рейнолдс.

Нека сфера с радиус  $a$  се обтича от равномерен вискозен поток със скорост  $U$ . Ще използваме сферична координатна система  $(r', \theta, \varphi)$ , като предполагаме, че началото ѝ съвпада с центъра на сферата и оста  $\theta=0$  е насочена по направление на посоката на обтичащия поток.

Уравнението на непрекъснатостта е удовлетворено, ако компонентите на скоростта  $v'_r$  и  $v'_\theta$  се изразяват чрез токовата функция посредством равенствата

$$(3.121) \quad v'_r = -\frac{1}{r'^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi'}{\partial \theta}, \quad v'_\theta = -\frac{1}{r' \sin \theta} \frac{\partial \Psi'}{\partial r}.$$

За да въведем при разглежданията в явен вид числото на Рейнолдс, нека нормализираме токовата функция  $\Psi'$  и пространствената координата:

$$\Psi' = a^2 U \Psi, \\ r' = ar.$$

Тогава уравнението на Навие — Стокс за функцията на тока (3.6) има вида

$$(3.122) \quad D^2(D^2 \Psi) = \frac{\text{Re}}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial(D^2 \Psi)}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial(D^2 \Psi)}{\partial \theta} \right] + \\ + D^2 \Psi \left( 2 \cotg \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right),$$

където  $\beta = \cos \theta$ ,  $\text{Re} = \frac{U \cdot a}{\nu}$  и

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\beta^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

Токовата функция удовлетворява върху сферата граничните условия

$$(3.123) \quad \Psi(r, \theta) = \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r, \theta) = 0, \quad r = 1,$$

а на безкрайност

$$(3.124) \quad \Psi(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta, \quad r \rightarrow \infty.$$

Да предположим, че решението на граничната задача (3.122) — (3.124) може да се намери, ако търсим токовата функция  $\Psi$  във вида

$$(3.125) \quad \Psi = \Psi_1 + \operatorname{Re} \Psi_2 + \dots$$

Ще покажем, че това предположение не е оправдано.

Като заместим (3.125) в уравнението (3.122) и приравним коефициентите пред еднаквите степени на  $\operatorname{Re}$ , за първите две приближения получаваме:

а) първо приближение:

$$(3.126) \quad D^4 \Psi_1 = 0,$$

$$(3.127) \quad \Psi_1(1, \theta) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}(1, \theta) = 0,$$

$$(3.128) \quad \Psi_1(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad \text{при } r \rightarrow \infty;$$

б) второ приближение:

$$(3.129) \quad D^4 \Psi_2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial (D^2 \Psi_1)}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \frac{\partial (D^2 \Psi_1)}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + D^2 \Psi_1 \left( 2 \cotg \theta \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \right) \right],$$

$$(3.130) \quad \Psi_2(1, \theta) = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}(1, \theta) = 0,$$

$$(3.131) \quad \frac{\Psi_2}{r^2}(r, \theta) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Граничната задача (3.126) — (3.128) е решена от Стокс и решението има вида

$$(3.132) \quad \Psi_1(r, \theta) = \frac{1}{2} \left( r^2 - \frac{3}{2} r + \frac{1}{2r} \right) \sin^2 \theta.$$

Като заместим  $\Psi_1$  в (3.129), намираме, че  $\Psi_2$  удовлетворява уравнението

$$(3.133) \quad D^4 \Psi_2 = -\frac{9}{4} \left( \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5} \right) (1 - \beta^2) \beta.$$

Като имаме предвид дясната страна на (3.133), както и граничните условия (3.130), полагаме

$$\Psi_2(r, \beta) = g(r) (1 - \beta^2) \beta.$$

Тогава функцията  $g(r)$  удовлетворява уравнението

$$(3.134) \quad r^4 g^{IV} - 12r^2 g'' + 24r g' = -\frac{9}{4} \left( 2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right)$$

и граничните условия

$$(3.135) \quad g(1) = g'(1) = 0,$$

$$(3.136) \quad \frac{g(r)}{r^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Уравнението (3.134) е нехомогенно обикновено диференциално уравнение от Ойлеров тип. Като вземем предвид дясната му страна, лесно намираме, че един негов частен интеграл има вида

$$(3.137) \quad g_1(r) = -\frac{3}{32} \left( 2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right).$$

Тогава общият интеграл на (3.134) се записва така:

$$(3.138) \quad g(r) = C_1 r^{-2} + C_2 + C_3 r^3 + C_4 r^5 - \frac{3}{32} \left( 2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right).$$

От условието (3.136) следва, че  $C_3 = C_4 = 0$ , но поради наличието на члена  $-\frac{3}{16} r^2$  в (3.138) за функцията  $g(r)$  не е осигурено необходимото поведение  $\frac{\Psi_2}{r^2} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Граничните условия (3.135) изискват  $C_1 = C_2 = -\frac{3}{32}$ . Следователно

$$(3.139) \quad \Psi_2(r, \beta) = -\frac{3}{32} \left( 2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \right) (1 - \beta^2) \beta.$$

Така получаваме, че намереното двучленно разлагане

$$(3.140) \quad \Psi(r, \theta) = \frac{1}{4} \left( 2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta - \frac{3}{32} \operatorname{Re} \left( 2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \right) \sin^2 \theta \cos \theta + O(\operatorname{Re}^2)$$

удовлетворява граничните условия върху сферата и не удовлетворява граничното условие на безкрайност, т. е. то не е равномерно валидно в цялата област. Невъзможността да се намери второ приближение в задачата за бавно обтичане на сфера от равномерен вискозен поток по такъв начин, че да удовлетвори и граничното условие на безкрайност, е известно в литературата като *парадокс на Уайтхед*. Причината за наличието на този парадокс е същата, каквато е и за парадокса на Стокс — на далечни разстояния от обтичаното тяло инерционните членове в уравненията на Навие — Стокс са сравними по големина с вискозните и не трябва да се пренебрегват. Трудностите, възникващи при тримерните тела (сферата), се изместват към второто приближение, тъй като смущенията при тримерните течения обикновено са по-слаби от тези при двумерните.



### 3.3.2. Стоксово и озееново разлагане. Първо приближение

Както видяхме, използването на обикновения метод на смущенията (пертурбациите) за решаване на задачата за обтичане на сфера от равномерен вискозен поток при малки, но крайни числа на Рейнолдс води до появата на особеност в полученото разлагане на решението по степените на  $Re$ . Основната трудност, която се среща при използването на този метод, е, че второто приближение за токовата функция удовлетворява граничните условия върху тялото, но не се съгласува с условието за равномерност на потока на безкрайност. По такъв начин полученото решение за токовата функция на течението не е равномерно валидно. За решаването на задачи за обтичане на тела са разработени различни методи. Така например асимптотични разлагания са били използвани за изследване обтичането на полубезкрайна пластина от вискозен флуид (Н. Е. Кочин, 1949 г.; Дж. Д. Мюррей, 1965 г.).

Равномерно валидно решение на задачата за обтичане на сфера от равномерен поток е получено въз основа на така наречения *„метод на срастване на асимптотичните разлагания“* (С. Каплун, П. Лагестром, 1957 г.; И. Праудман, Дж. Пирсън, 1957 г.).

Същността на този метод, приложен при решаване на задачата на Стокс, се изразява накратко в следното: разглеждат се едновременно две разлагания — едно вътрешно разлагане, което е в сила близо до сферата, и едно външно разлагане, което е в сила далече от нея. Вътрешното разлагане, наречено „стоксово“, удовлетворява граничните условия върху сферата; външното разлагане, наречено „озееново“, удовлетворява граничното условие на безкрайност.

За да се намерят недостигащите условия за пълното определяне на стоксовото и озееновото разлагане, трябва да се използва фактът, че тези разлагания са различни представяния (форми) на една и съща функция. На основата на съответна процедура за последователно срастване на двете разлагания в тяхната обща област на валидност се получават допълнителни съотношения, които позволяват да се определят неопределените константи и функции в двете разлагания.

В стоксовата област на течението, т. е. там, където  $r = O(1)$ , трябва да се решава уравнението на Навие — Стокс, записано в неговата основна форма (3.122). Токовата функция тук се търси във вид на асимптотичен ред

$$(3.141) \quad \psi = f_1(Re) \psi_1(r, \beta) + f_2(Re) \psi_2(r, \beta) + \dots,$$

където

$$(3.142) \quad \frac{f_{n+1}(Re)}{f_n(Re)} \rightarrow 0 \text{ при } Re \rightarrow 0.$$

Стоксовото разлагане (3.141) следва да се разглежда като разлагане на точното решение на (3.122) за малки стойности на  $Re$  и фиксирани стойности на пространствените координати  $(r, \beta)$ .

Тъй като скоростта на флуидното течение е ограничена, без да ограничаваме общността, може да приемем, че

$$f_1(Re) = 1.$$

Както отбелязва Озеен, схемата на Уайтхед за получаване на последователни приближения, основаващи се на стоксовото решение (3.132), води до неравномерно валидно решение, защото инерционните и вискозните членове на уравнението на Навие — Стокс (3.122) стават сравними по големина за големи стойности на  $r$ . Това показва, че за разлагане във външната област трябва да се намери такова преобразуване на променливите, което да изключи числото на Рейнолдс от основното уравнение и да направи равноправни всички негови членове.

Ако положим

$$\rho = g(Re) r, \quad \Psi = h(Re) \psi$$

и запишем уравнението (3.122) в нови променливи, условието за изключване на числото на Рейнолдс от полученото уравнение има вида

$$(3.143) \quad Re g(Re) = h(Re).$$

От друга страна, тъй като скоростта трябва да е от порядъка на единица в озееновата област, където  $\rho$  и  $\Psi$  са от порядък единица, от (3.121) получаваме

$$(3.144) \quad g^2(Re) = h(Re).$$

От (3.143) и (3.144) следва, че  $g(Re) = Re$  и  $h(Re) = Re^2$ . Така получаваме, че променливите и основното уравнение в озееновата област имат вида

$$(3.145) \quad \rho = Re \cdot r, \quad \Psi = Re^2 \psi,$$

$$(3.146) \quad D^2(D^2\Psi) = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \rho} (D^2\Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (D^2\Psi) + \right. \\ \left. + D^2\Psi \left[ 2 \cotg \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] \right\},$$

$$\text{където } D^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1 - \beta^2}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

Озееновото разлагане на токовата функция търсим във вид на асимптотичен ред:

$$(3.147) \quad \Psi = F_1(Re) \Psi_1(\rho, \beta) + F_2(Re) \Psi_2(\rho, \beta) + F_3(Re) \Psi_3(\rho, \beta) + \dots,$$

където

$$\frac{F_{n+1}(Re)}{F_n(Re)} \rightarrow 0 \text{ при } Re \rightarrow 0.$$

От (3.124) следва, че  $F_1(Re) = 1$ .

Разлагането (3.147) трябва да удовлетворява уравнението (3.146) и условието за равномерност на потока на безкрайност (3.124). Интересно е да отбележим, че съгласно (3.145) в новите променливи радиусът на сферата е равен на  $Re$  и по този начин числото на Рейнолдс сега участва в граничните условия вместо в уравнението.

Както отбелязахме по-горе обаче, граничното условие за озееновото разлагане върху сферата се заменя чрез условието за асимптотичното срастване със стоксовото разлагане.

Ако направим физическото предположение, че смущенията, причинени от присъствието на сферата, намаляват с намаляването на радиуса  $y$ , идваме до извода, че първият член в озееновото разлагане се дава от равномерния поток на безкрайност

$$(3.148) \quad \Psi_1 = \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \beta^2).$$

Наистина, тъй като  $D^2 \Psi_1 = 0$ , този избор отговаря на изискването функцията  $\Psi_1$  да удовлетворява уравнението (3.146) и граничното условие на безкрайност.

Като заместим (3.141) в уравнението (3.122), получаваме, че функцията  $\psi_1$  удовлетворява уравнението на Стокс

$$(3.149) \quad D^2 (D^2 \psi_1) = 0.$$

Освен това  $\psi_1$  трябва да удовлетворява граничните условия за полепване върху сферата

$$(3.150) \quad \psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0,$$

да бъде равна на нула при  $\beta = \pm 1$  и да се сраства с първия член в озееновото разлагане (3.148). Такава функция  $\psi_1$ , удовлетворяваща (3.149), (3.150) и условието за срастване (3.148), е решението на Стокс

$$(3.151) \quad \psi_1 = \frac{1}{4} \left( 2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) (1 - \beta^2),$$

защото, вземайки предвид (3.145), получаваме равенството

$$(3.152) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \left( \frac{1}{4} r^2 - \frac{3}{4} r + \frac{1}{4r} \right) (1 - \beta^2) = \\ &= \frac{1}{Re^2} \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \beta^2) - \frac{3}{4} \frac{\rho}{Re} (1 - \beta^2) + \frac{1}{4} \frac{Re}{\rho} (1 - \beta^2). \end{aligned}$$

Тъй като  $\Psi = Re^2 \psi$ , то

$$(3.153) \quad \Psi_1 = Re^2 \psi_1 + \frac{3}{4} Re \rho (1 - \beta^2) - \frac{1}{4} \frac{Re^3}{\rho} (1 - \beta^2),$$

което показва, че  $\psi_1$  и  $\Psi_1$  се срастват с точност до  $O(Re)$ .

### 3.3.3. Второ приближение

а) второ озееново приближение

Тъй като функцията  $\Psi_1 = \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \beta^2)$  удовлетворява уравнението  $\Delta^2 \Psi_1 = 0$  и освен това

$$2 \cotg \theta \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} = 0,$$

като заместим (3.147) в (3.146) и приравним коефициентите пред  $F_2(\text{Re})$ , получаваме, че  $\Psi_2$  удовлетворява озееновото уравнение

$$(3.154) \quad \Delta^2 (\Delta^2 \Psi_2) = \beta \frac{\partial}{\partial \rho} (\Delta^2 \Psi_2) + \frac{1 - \beta^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta} (\Delta^2 \Psi_2).$$

За да решим (3.154), полагаме

$$(3.155) \quad \Delta^2 \Psi_2 = \Phi(\rho, \beta) e^{\frac{1}{2} e \beta}$$

и получаваме, че функцията  $\Phi(\rho, \beta)$  удовлетворява уравнението

$$(3.156) \quad \left( \Delta^2 - \frac{1}{4} \right) \Phi(\rho, \beta) = 0.$$

Търсейки решение за функцията  $\Phi(\rho, \beta)$  от вида  $\Phi(\rho, \beta) = f(\rho)(1 - \beta^2)$ , получаваме уравнението

$$(3.157) \quad f''(\rho) - \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{4} \right) f(\rho) = 0.$$

Общият интеграл на това обикновено диференциално уравнение има вида

$$f(\rho) = C_1 \left( \frac{2}{\rho} + 1 \right) e^{-\frac{1}{2} e} + C_2 \left( -\frac{2}{\rho} + 1 \right) e^{\frac{1}{2} e}.$$

За да бъде ограничено решението на безкрайност, трябва  $C_2 = 0$ . Така получаваме

$$(3.158) \quad \Delta^2 \Psi_2(\rho, \beta) = C_1 \left( \frac{2}{\rho} + 1 \right) (1 - \beta^2) e^{-\frac{1}{2} e (1 - \beta)}.$$

Лесно се проверява, че (3.158) има за решение функцията

$$(3.159) \quad \Psi_2(\rho, \beta) = -2C_1(1 + \beta) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2} e (1 - \beta)} \right].$$

Това решение се оказва фундаментално решение на озееновото уравнение, като константата  $C_1$  зависи от някои детайли на течението близо до тялото.

Тогава за двучленното озееново разлагане получаваме

$$(3.160) \quad \Psi_1 + F_2(\text{Re}) \Psi_2 = \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \beta^2) - F_2(\text{Re}) 2C_1 (1 + \beta) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2} e (1 - \beta)} \right].$$

За да се срства двучленното озееново разлагане (3.160) с едночленното стоксово разлагане

$$\frac{1}{2} r^2 (1 - \beta^2) - \frac{3}{4} r (1 - \beta^2) + O(Re),$$

трябва  $F_2(Re) = Re$  и  $C_1 = \frac{3}{4}$ .

Следователно

$$(3.161) \quad \Psi(r, \beta) = \frac{1}{2} r^2 (1 - \beta^2) - \frac{3}{2} Re (1 + \beta) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2} e^{(1-\beta)}} \right].$$

б) второ стоксово приближение

За да получим второто стоксово приближение, най-напред ще намерим двучленното стоксово разлагане от двучленното озееново разлагане. Вземаме двучленното озееново разлагане

$$\Psi \sim \frac{1}{2} r^2 (1 - \beta^2) - \frac{3}{2} Re (1 + \beta) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2} e^{(1-\beta)}} \right].$$

Записваме го в стоксови променливи

$$\Psi \sim \frac{1}{2} Re^2 r^2 (1 - \beta^2) - \frac{3}{2} Re (1 + \beta) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{r} Re r (1-\beta)} \right].$$

Разлагаме го по степените на  $Re$  и получаваме

$$\begin{aligned} \Psi \sim Re^2 \frac{1}{2} r^2 (1 - \beta^2) - \frac{3}{2} Re (1 + \beta) \left[ 1 - 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} Re r (1 - \beta) - \frac{1}{8} Re^2 r^2 (1 - \beta^2) \right], \end{aligned}$$

или

$$\Psi \sim Re^2 \left[ \frac{1}{2} r^2 (1 - \beta^2) - \frac{3}{4} r (1 - \beta^2) + \frac{3}{16} Re r^2 (1 - \beta) (1 - \beta^2) \right].$$

Сега вземаме двучленното стоксово разлагане

$$(3.162) \quad \psi \sim \left( \frac{1}{2} r^2 - \frac{3}{4} r \right) (1 - \beta^2) + Re \frac{3}{16} r^2 (1 - \beta) (1 - \beta^2).$$

Следователно, за да могат да се срстват двучленното озееново и двучленното стоксово разлагане, последното трябва да има вида

$$(3.163) \quad \psi \sim \frac{1}{4} \left( 2 r^2 - 3 r + \frac{1}{r} \right) (1 - \beta^2) + Re \psi_2(r, \beta).$$

По този начин получаваме, че  $f_2(Re) = Re$  и функцията  $\psi_2(r, \beta)$  удовлетворява уравнението на Уайтхед

$$(3.164) \quad D^4 \psi_2 = -\frac{9}{4} \left( \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5} \right) (1 - \beta^2) \beta$$

и съответни гранични условия.

В началото на този параграф намерихме един частен интеграл на това уравнение

$$(3.165) \quad \psi_2^r(r, \beta) = -\frac{3}{32} \left( 2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (1 - \beta^2) \beta,$$

който удовлетворява всички гранични условия.

Ако означим с  $\psi_2^{o6}$  общия интеграл на хомогенното уравнение

$$(3.166) \quad D^4 \psi_2 = 0,$$

ще получим

$$\psi_2(r, \beta) = \psi_2^r(r, \beta) + \psi_2^{o6}(r, \beta).$$

Тогава двучленното стоксово разлагане има вида

$$\psi_2 \sim \frac{1}{4} \left( 2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) (1 - \beta^2) + \text{Re} \left[ -\frac{3}{32} \left( 2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (1 - \beta^2) \beta + \psi_2^{o6}(r, \beta) \right].$$

Да го запишем в озеенови променливи и да го разложим по степените на  $\text{Re}$ :

$$(3.167) \quad \psi_2 \sim \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\rho^2}{\text{Re}^2} - 3 \frac{\rho}{\text{Re}} + \frac{\text{Re}}{\rho} \right) (1 - \beta^2) + \\ + \text{Re} \left[ -\frac{3}{32} \left( 2 \frac{\rho^2}{\text{Re}^2} - 3 \frac{\rho}{\text{Re}} + 1 - \frac{\text{Re}}{\rho} + \frac{\text{Re}^2}{\rho^2} \right) (1 - \beta^2) \beta + \psi_2^{o6} \left( \frac{\rho}{\text{Re}}, \beta \right) \right],$$

или

$$(3.168) \quad \psi_2 \sim \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \beta^2) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{3}{4} \rho (1 - \beta^2) - \frac{3}{16} \frac{1}{\text{Re}} (1 - \beta^2) \beta + \\ + \text{двучленното озееново от двучленното стоксово разлагане на } \psi_2^{o6}.$$

Като се сравнят (3.162) и (3.168), получаваме

$$(3.169) \quad \psi_2^{o6} \sim \frac{3}{16} r^2 \sin^2 \theta.$$

Освен това условие функцията  $\psi_2^{o6}$  трябва да удовлетворява уравнението (3.166) и граничните условия

$$(3.170) \quad \psi_2^{o6} = \frac{\partial \psi_2^{o6}}{\partial r} = 0,$$

$$(3.171) \quad \psi_2^{o6} = 0 \text{ при } \beta = \pm 1.$$

Ако множителят  $\frac{3}{16}$  в условието (3.169) се замени с  $\frac{1}{2}$ , граничната задача (3.166), (3.169), (3.170) и (3.171) се превръща в класическа задача на Стокс. Тогава поради линейността на задачата

$$(3.172) \quad \psi_2^{o6} = \frac{3}{8} \psi_1.$$

Следователно

$$(3.173) \quad \psi_2 = \frac{3}{16} \left( \frac{1}{2r} - \frac{3r}{2} + r^2 \right) (1 - \beta^2) - \frac{3}{16} \left( \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2} - \frac{3r}{2} + r^2 \right) (1 - \beta^2) \beta.$$

Като продължим по аналогичен начин, може да се намерят и по-високи приближения. Интересно е, че третото приближение на Стокс съдържа членове от вида  $\text{Re}^2 \ln \text{Re}$ . Това дава отражение във формулата за съпротивлението, която с точност до трето приближение се записва така:

$$W = 6 \pi \mu a U \left[ 1 + \frac{3}{8} \text{Re} + \frac{9}{40} \text{Re}^2 \ln \text{Re} + O(\text{Re}^2) \right].$$

Първото приближение на тази формула е пресметнато от Стокс през 1851 г., второто — от Озеен през 1910 г. и третото — посредством метода за срстване от Праудман и Пирсън през 1957 г.

### § 3.4. ПО ВИСОКИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ ОБТИЧАНЕ НА КАПКА (МЕХУР)

В настоящия параграф ще разгледаме проблема за обтичане на слабо деформируема флуидна частица (капка, мехур) при малки числа на Рейнолдс (Сайто, 1913 г.; Тейлър и Акривос, 1964 г.). Въз основа на метода за срстване на асимптотичните разлагания ще търсим приближено решение на нелинейните уравнения на Навие — Стокс вместо на уравненията на Стокс (3.45) (вж. т. 3.1.5). Граничните условия върху сферична повърхнина (3.46) — (3.50) ще заменим със съответните условия върху деформируема междупазова граница.

#### 3.4.1. Уравнения и гранични условия при движение на слабо деформируема капка

Нека слабо деформируема флуидна частица, която има даден обем, се движи във вискозен флуид със зададена стационарна скорост  $U$ . Да означим с  $l$  големината на радиуса на сфера с обем, равен („еквивалентен“) на обема на капката (мехура). В безразмерен вид уравненията на Навие — Стокс за функцията на тока  $\psi$  и  $\hat{\psi}$  (вън и вътре в капката) се записват така:

$$(3.174) \quad \frac{1}{\text{Re}} D^4 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\psi, D^2 \psi)}{\partial(r, \beta)} + \frac{2}{r^2} D^2 \psi \left[ \frac{\beta}{1 - \beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right],$$

$$(3.175) \quad \frac{k}{\gamma \text{Re}} D^4 \hat{\psi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\hat{\psi}, D^2 \hat{\psi})}{\partial(r, \beta)} + \frac{2}{r^2} D^2 \hat{\psi} \left[ \frac{\beta}{1 - \beta^2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \beta} \right].$$

Тук

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\beta^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \beta = \cos \theta,$$

$$k = \frac{\hat{\mu}}{\mu}, \quad \gamma = \frac{\hat{\rho}}{\rho}, \quad \text{Re} = \frac{U l \rho}{\mu}.$$

Нека  $R(\beta) = 1 + \zeta(\beta)$  е уравнението на повърхността на капката, където по предположение  $|\zeta(\beta)| \ll 1$ . Да означим с  $\vec{n}_0$  и  $\vec{\tau}_0$  нормалния и тангенциалния единичен вектор в произволна точка от повърхнината. Тогава на междупазовата граница  $r = R(\beta)$  (вж. (1.75) — (1.76)) вместо (3.46) — (3.51) граничните условия са следните:

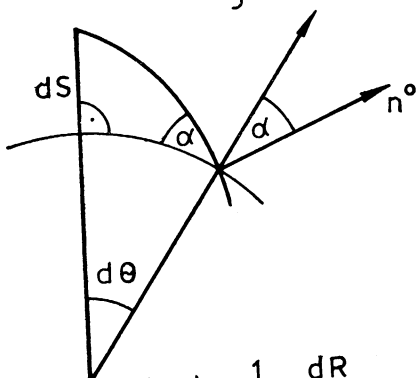
$$(3.176) \quad v_n = 0, \quad \hat{v}_n = 0,$$

$$(3.177) \quad v_\tau = \hat{v}_\tau,$$

$$(3.178) \quad p_{n\tau} = \hat{p}_{n\tau},$$

$$(3.179) \quad p_{nn} = \hat{p}_{nn} + \frac{1}{\text{We}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$R(\beta) = 1 + \zeta(\beta) r$$



$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\beta} \frac{dR}{d\theta}$$

Фиг. 18

където  $\text{We} = \frac{\rho l U^2}{\sigma}$  е числото на

Вебер, а  $R_1$  и  $R_2$  са главните радиуси на кривината в дадена точка от повърхнината. В новите координати условието на безкрайност се записва така:

$$(3.180) \quad \psi = \frac{1}{2} r^2 (1 - \beta^2).$$

Поради направеното предположение, че формата на капката е близка до сферична, удобно е граничните условия (3.176) — (3.179) да запишем в сферични координати  $r, \beta$ , като използваме ограничението  $\text{max } |\zeta(\beta)| \ll 1$ . Да означим с  $\alpha$  ъгъла между допираателните към повърхнината на капката  $r = R(\beta)$  и сферата  $r = 1$  (фиг. 18). Тогава

$$\text{tg } \alpha = \frac{dR}{R d\theta} = - \frac{\sin \theta}{R} \frac{d\zeta}{d\beta}.$$

Тъй като  $R(\beta) = 1 + \zeta(\beta)$ ,  $\zeta \ll 1$  и  $\cos \theta = \beta$ , получаваме следното приближение:

$$\text{tg } \alpha \approx - (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{d\beta}.$$

При малки стойности на  $\alpha$   $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\text{tg}^2 \alpha \approx 0$ ,  $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$ . Следователно за компонентите на скоростта намираме:



$$(3.181) \quad v_r = v_\theta \cos \alpha + v_r \sin \alpha \approx v_\theta - v_r (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{d\beta},$$

$$v_n = v_r \cos \alpha - v_\theta \sin \alpha \approx v_r + v_\theta (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{d\beta}.$$

Знаем, че за напрежението върху площадка с нормала  $n$

$$\vec{p}_n = \vec{p}_r \cos(n, r) + \vec{p}_\theta \cos(n, \theta) + \vec{p}_\varphi \cos(n, \varphi).$$

Тъй като задачата е ососиметрична,  $\vec{p}_\varphi = 0$ . Следователно

$$\vec{p}_n = \vec{p}_r \cos(n, r) + \vec{p}_\theta \cos(n, \theta).$$

Нека  $\vec{m}_0$  е единичен вектор, чиито косинус-директори са  $[\cos(m, r), \cos(m, \theta), \cos(m, \varphi)]$ . Тогава

$$p_{nm} = \vec{p}_n \cdot \vec{m}_0 = [p_{rr} \cos(n, r) + p_{r\theta} \cos(n, \theta)] \cos(m, r) + \\ + [p_{r\theta} \cos(n, r) + p_{\theta\theta} \cos(n, \theta)] \cos(m, \theta).$$

От фиг. 18 следва, че  $\cos(n, r) = \cos \alpha$  и  $\cos(n, \theta) = -\sin \alpha$ . Следователно

$$p_{n, r} = (p_{rr} - p_{\theta\theta}) \sin \alpha \cos \alpha + p_{r\theta} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha),$$

$$p_{nn} = p_{rr} \cos^2 \alpha + p_{\theta\theta} \sin^2 \alpha - 2p_{r\theta} \cos \alpha \sin \alpha.$$

Или

$$(3.182) \quad p_{nr} \approx p_{r\theta} - (p_{rr} - p_{\theta\theta}) (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{d\beta},$$

$$p_{nn} \approx p_{rr} + 2p_{r\theta} (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{d\beta}.$$

Може да се докаже (Ландау, Лифшиц, 1978 г.), че при  $\zeta \ll 1$

$$(3.183) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \approx 2 - 2\zeta - \frac{d}{d\beta} \left[ (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{d\beta} \right].$$

Тогава от (3.179) получаваме следното уравнение за формата на капката:

$$(3.184) \quad \frac{1}{We} \left\{ 2 - 2\zeta - \frac{d}{d\beta} \left[ (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{d\beta} \right] \right\} = p_{nn} - \hat{p}_{nn}.$$

В безразмерни координати нормалните напрежения  $p_{nn}$ ,  $\hat{p}_{nn}$  изчисляваме от формулите

$$(3.185) \quad p_{rr} = -p + \frac{2}{Re} \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \hat{p}_{rr} = -\hat{p} + \frac{2k}{Re} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r}.$$

Като намерим разликата от нормалните напрежения  $p_{nn} - \hat{p}_{nn}$  остава да решим уравнението (3.184) и да получим отклонението от сферичната форма на капката  $\zeta$  в зависимост от безразмерните параметри  $We$ ,  $Re$ ,  $k$  и  $\gamma$ .

### 3.4.2. Първо приближение. Запазване на сферичната форма на капката

Разглеждайки числото на Рейнолдс като малък параметър, полагаме

$$(3.186) \quad \psi = \psi_1 + \text{Re } \psi_2 + \dots,$$

$$(3.187) \quad \widehat{\psi}_1 = \widehat{\varphi} + \text{Re } \widehat{\psi}_2 + \dots,$$

където членовете от първи ред  $\Psi_1$  и  $\widehat{\Psi}_1$  представляват известното решение на Адамар—Рабчински (вж. 3.1.5):

$$(3.188) \quad \psi_1 = \frac{1-\beta^2}{4} \left( 2r^2 - \frac{3k+2}{k+1} r + \frac{k}{k+1} \frac{1}{r} \right),$$

$$(3.189) \quad \widehat{\psi}_1 = -\frac{1-\beta^2}{4(k+1)} (r^2 - r^4).$$

Интегрираме едно от уравненията за движението, описващи течението вън от капката и вътре в нея, и за налягането  $p$  получаваме

$$(3.190) \quad p_1 = -\frac{gl\beta r}{U^2} - \frac{3k+2}{k+1} \cdot \frac{\beta}{2r^2 \text{Re}},$$

$$(3.191) \quad \widehat{p}_1 = -\frac{gl\gamma\beta}{U^2} r + \frac{5k\beta}{k+1} \frac{r}{\text{Re}} + \pi.$$

Тук  $g$  е земното ускорение, а  $\pi$  — произволна константа. Началото на координатната система трябва да съвпада с центъра на флуидната маса в капката, следователно в сила е равенството

$$(3.192) \quad \int_{-1}^1 \zeta \beta d\beta = 0 \text{ при } \max |\zeta(\beta)| \ll 1.$$

Тъй като характерната дължина  $l$  трябва да бъде равна на радиуса на сфера с обем, равен на обема на капката, получаваме

$$1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \zeta)^3 d\beta = 0 \text{ при } \max_{\beta} |\zeta(\beta)| \ll 1,$$

или

$$(3.193) \quad \int_{-1}^1 \zeta d\beta = 0 \text{ при } \max |\zeta(\beta)| \ll 1.$$

Функцията  $\zeta(\beta)$  и константата  $\pi$  определяме от уравнението (3.184) и равенствата (3.192), (3.193). Наистина, използвайки (3.188) — (3.191), намираме

$$(3.194) \quad p_{rr} - \widehat{p}_{rr} = \frac{3\beta}{2 \text{Re}} \frac{3k+2}{k+1} + \frac{gl\beta}{U^2} (1 - \gamma) + \pi.$$

Тогава от (3.184) и (3.194) следва

$$(3.195) \quad \frac{1}{We} \left\{ 2 - 2\zeta - \frac{d}{d\beta} \left[ (1 - \beta^2) \frac{d\zeta}{d\beta} \right] \right\} = \frac{3\beta}{2Re} \frac{3k+2}{k+1} + \frac{gl\beta}{U^2} (1 - \gamma) + \pi.$$

От общия баланс на силите, действащи върху капката, когато тя се движи под действието на теглото си, получаваме

$$\frac{4}{3} \frac{\pi gl (1 - \gamma)}{U^2} = -W.$$

Тук  $W = \frac{W_{\text{разм.}}}{l^2 \rho U^2}$  е безразмерното съпротивление, което изпитва флуидната частица.

Тъй като в първо приближение

$$W = \frac{2\pi}{Re} \frac{3k+2}{k+1},$$

от (3.195) получаваме

$$\frac{gl (1 - \gamma)}{U^2} = -\frac{3}{2Re} \frac{3k+2}{k+1}.$$

Тогава

$$p_{rr} - \hat{p}_{rr} = \pi$$

и уравнението (3.195) добива вида

$$(3.196) \quad \frac{1}{We} \left\{ 2 - 2\zeta - \frac{d}{d\beta} \left[ (1 - \beta^2) \frac{d\zeta}{d\beta} \right] \right\} = \pi.$$

Чрез непосредствена проверка се вижда, че (3.192), (3.193) и (3.196) са удовлетворени при

$$\pi = \frac{2}{We} \text{ и } \zeta(\beta) = 0.$$

Това означава, че формата на капката се запазва сферична за всички стойности на числото на Вебер  $We$ , когато течението се разглежда в стоксово приближение.

### 3.4.3. Второ приближение. Деформация на капката

Както знаем от парадокса на Уайтхед, при прилагане метода на пертурбациите (смущенията) за решаване на задачата за обтичане на твърда сфера от вискозен флуид при пресмятане на второто приближение не е възможно да се удовлетвори граничното условие на безкрайност. Като използва същия метод, Сайто (Сайто, 1913 г.) решава задачата за обтичане на флуидна капка, но отново граничното условие на безкрайност за второто приближение не е удовлетворено. През 1964 г. Тейлър и Акривос преодоляват тази трудност, като прилагат метода за срстване на асимптотичните разлагания. Ще приложим този метод, като разделим флуидното течение във от капката (т. е. при  $r \geq 1 + \zeta(\beta)$ ) на две облас-

ти — *вътрешна (стоксова)* и *външна (озеенова)*. Аналогично на § 3.3 в озееновата област въвеждаме нова независима променлива  $\rho = \text{Re } r$ , нова токова функция  $\Psi$  и, както в (3.161), получаваме

$$(3.197) \quad \Psi = \frac{\rho^2}{2}(1-\beta^2) - \frac{3k+2}{2(k+1)} \text{Re}(1+\beta) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2}\beta(1-\beta)} \right] + O(\text{Re}^2).$$

Токовата функция в стоксовата област (3.186) трябва да удовлетворява граничните условия (3.176) — (3.178) и да се съства с токовата функция (3.197) в озееновата област. Уравненията за второто приближение в стоксовата област ( $\psi_2$  и  $\hat{\psi}_2$ ) се получават съответно от (3.174) и (3.175). Използвайки (3.174) и (3.188), за  $\psi_2$  получаваме следното уравнение:

$$(3.198) \quad D^4\psi_2 = 3Q_2(\beta) \frac{3k+2}{k+1} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2r^3} \frac{3k+2}{k+1} + \frac{1}{2r^5} \frac{k}{k+1} \right],$$

където

$$Q_n(\beta) = \int_{-1}^{\beta} p_n(\beta) d\beta,$$

а  $p_n(\beta)$  са полиномите на Лъожандър. От (3.175) и (3.189) за  $\psi_2$  намираме

$$(3.199) \quad D^2\hat{\psi}_2 = 0.$$

Общото решение на това уравнение, което се анулира при  $r=1$ ,  $\beta=\pm 1$  и няма особеност при  $r=0$ , има вида

$$\hat{\psi}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n [r^{n+3} - r^{n+1}] Q_n(\beta).$$

Тъй като функцията

$$\frac{Q_2(\beta)}{8} \frac{3k+2}{k+1} \left[ r^2 - \frac{r}{2} \frac{3k+2}{k+1} - \frac{1}{2r} \frac{k}{k+1} \right]$$

е частен интеграл на уравнението (3.198), то общото му решение, което не се анулира при  $r=1$  и  $\beta=\pm 1$ , има вида

$$(3.200) \quad \psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(r^{n+3} - r^{-n}) + B_n(r^{n+1} - r^{-n}) + C_n(r^{2-n} - r^{-n})] Q_n(\beta) + \frac{Q_2(\beta)}{8} \frac{3k+2}{k+1} \left[ r^2 - \frac{r}{2} \frac{3k+2}{k+1} - \frac{1}{2r} \frac{k}{k+1} \right].$$

Константите  $A_n$  и  $B_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) определяме от съравняването на решенията (3.197), (3.186) съответно в озееновата и стоксовата област. За целта в (3.194) оставяме само членовете, съдържащи  $\text{Re}$  в нулева и първа степен включително, като ги подреждаме по степените на  $\rho$ :

$$(3.201) \quad \operatorname{Re}^2 \Psi = -\rho^2 Q_1(\beta) - \frac{3k+2}{2(k+1)} \operatorname{Re} \left\{ -\rho Q_1(\beta) + \right. \\ \left. + \frac{\rho^3}{4} [Q_1(\beta) - Q_2(\beta)] + D(\rho^3) \right\}.$$

Решението в стоксовата област (3.186) (вж. (3.188), (3.200)) записваме в озеенови променливи  $\rho, \beta$ :

$$(3.202) \quad \operatorname{Re}^2 (\psi_1 + \operatorname{Re} \psi_2) = -\rho^2 Q_1(\beta) + \frac{3k+2}{2(k+1)} \operatorname{Re} \left[ \rho Q_1(\beta) + \frac{\rho^3}{4} Q_2(\beta) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \operatorname{Re}^{-n} \rho^{n+3} + B_n \operatorname{Re}^{-n+2} \rho^{n+1}] Q_n(\beta).$$

Като сравним съответните членове в (3.201) и (3.202), получаваме  $A_n = 0$  при  $n \geq 1$ ,  $B_n = 0$  при  $n \geq 2$  и  $B_1 = -\frac{1}{8} \frac{3k+2}{k+1}$ . Следователно

$$(3.203) \quad \psi_2 = -\frac{Q_1(\beta)}{8} \frac{3k+2}{k+1} \left( r^2 - \frac{1}{r} \right) + \frac{Q_2(\beta)}{8} \frac{3k+2}{k+1} \left[ r^2 - \frac{r}{2} \frac{3k+2}{k+1} + \right. \\ \left. + \frac{k}{k+1} - \frac{1}{2r} \frac{k}{k+1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [r^{-n+2} - r^{-n}] Q_n(\beta).$$

Константите  $c_n$  и  $\hat{c}_n$  определяме от граничните условия (3.177), (3.178). Получаваме

$$c_1 = \frac{1}{16} \left( \frac{3k+2}{k+1} \right)^2, \quad c_2 = -\frac{1}{80} \frac{k(3k+2)(5k+6)}{(k+1)^3},$$

$$\hat{c}_1 = -\frac{1}{16} \frac{3k+2}{(k+1)^2}, \quad \hat{c}_2 = \frac{1}{80} \frac{(3k+2)(4k+5)}{(k+1)^3},$$

$$c_n = \hat{c}_n = 0 \text{ при } n \geq 3.$$

По такъв начин окончателно намираме

$$\psi_2 = -\frac{Q_1(\beta)}{8} \frac{3k+2}{k+1} \left[ r^2 - \frac{3k+2}{2(k+1)} r + \frac{k}{2(k+1)} \frac{1}{r} \right] + \\ + \frac{Q_2(\beta)}{8} \frac{3k+2}{k+1} \left[ r^2 - \frac{r}{2} \frac{3k+2}{k+1} + \frac{k(5k+4)}{10(k+1)^2} - \frac{1}{2r} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{10r^2} \frac{k(5k+6)}{(k+1)^2} \right]$$

и

$$\hat{\psi}_2 = \frac{3k+2}{16(k+1)^2} \left[ (r^2 - r^4) Q_1(\mu) - \frac{4k+5}{5(k+1)} (r^3 - r^5) Q_2(\beta) \right].$$

Инерционният ефект, включен в намереното до второ приближение решение, води до деформация на сферичната форма на капката (мехура). Изменението на формата на междупазовата граница ще пресметнем при малки числа на Вебер. За да определим  $p_{rr}$  и  $p_{rrr}$  от едно от уравненията на Навие — Стокс намираме разпределението на налягането при  $r=1$ . Полагаме

$$p = p_1 + \operatorname{Re} p_2 + \dots \quad (\text{при } r=1),$$

$$p_{rr} = p_{rr}^{(1)} + \operatorname{Re} p_{rr}^{(2)} + \dots \quad (\text{при } r=1)$$

и пресмятаме  $\operatorname{Re} p_2$  и  $\operatorname{Re} p_{rr}^{(2)}$ . Аналогично намираме  $\operatorname{Re} p_3$  и  $\operatorname{Re} p_{rr}^{(3)}$ . Като заместим в (3.184), за  $\zeta(\beta)$  получаваме (вж. Тейлър и Акривос, 1964 г.)

$$\zeta(\beta) = 1 - \lambda \operatorname{We} p_2(\beta) - \frac{3\lambda(11k+10)}{70(k+1)} \frac{\operatorname{We}^2}{\operatorname{Re}} p_3(\beta) + \dots,$$

където

$$\lambda = \frac{1}{4(k+1)^3} \left[ \left( \frac{81}{80} k^3 + \frac{57}{20} k^2 + \frac{103}{40} k \right) - \frac{(\gamma-1)}{12} (k+1) + \frac{3}{4} \right].$$

Това показва, че в съгласие с експеримента (Хаберман и Мортън, 1953 г.) капката ще се деформира най-напред в елипсoid и с увеличаване на числото на Вебер  $\operatorname{We}$  формата ѝ ще се доближава до формата на „шапка“.

Точно решение в стоксово приближение е получено и при решаване на задачата за обтичане на две сферични капки в направление, успоредно на централата им (Раштон и Дейвис, 1973 г.; Хабър и др., 1973 г.). Намерена е в първо приближение и деформацията на две капки, когато те се движат една срещу (след) друга или в противоположни посоки (Е. Червениванова, З. Запрянов, 1985 г.).

### § 3.5. ВИСКОЗНО ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ ДВЕ БАВНО ВЪРТЯЩИ СЕ СФЕРИ

Нека са дадени две концентрични сфери с радиуси  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ), пространството между които е запълнено с вискозен флуид. Да предположим, че сферите се въртят бавно около един и същ диаметър съответно с ъглови скорости  $\omega$  и  $\Omega$ . Да изберем за характерен линеен размер радиуса  $a$  на малката сфера, а за характерна скорост  $-a\omega$ . Въвеждаме сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$ , началото  $O$  на която съвпада с общия център на сферите (фиг. 19), а оста  $\theta=0$  е диаметърът, около който се въртят сферите.

За краткост за компонентите на скоростта полагаме

$$v_r = u, \quad v_\theta = v, \quad v_\varphi = w.$$

Тогавя поради аксиалната симетрия на течението спрямо оста на въртене уравнението на непрекъснатостта на уравнения на Навие — Стокс (т. 2 от приложението) се записват в безразмерен вид така:

$$(3.204) \quad \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \sin \theta u] + \frac{\partial}{\partial \theta} [r \sin \theta v] = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2 + w^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[ \nabla^2 u - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v \cot \theta}{r^2} \right],$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv + w^2 \cotg \theta}{r^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} \right]$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{uw - vw \cotg \theta}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \nabla^2 w - \frac{w}{r^2 \sin^2 \theta} \right],$$

където

$$\text{Re} = \frac{\omega a^2}{\nu}$$

и

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

В безразмерен вид граничните условия на задачата са

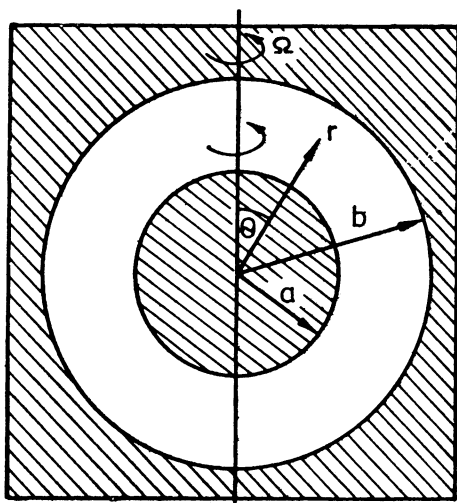
$$(3.205) \quad u = v = 0, \quad w = \sin \theta$$

при  $r = 1$ ,

$$u = v = 0, \quad w = \lambda \frac{\Omega}{\omega} \sin \theta$$

при  $r = \lambda$ ,

$$\text{където } \lambda = \frac{b}{a}.$$



Фиг. 19

Тъй като сферите се въртят около една и съща ос, в аксиално направление те увеличат полепналия по тях вискозен флуид и го привеждат също във въртливо движение, което се нарича *първично течение*. Поради действието на центробежните сили обаче, флуидните частици са принудени да участвуват и във *вторично течение*, което се извършва в равнините, минаващи през оста на въртене. Като вземем предвид това, решението на задачата (3.204)–(3.205) търсим във вид на ред по степените на числото на Рейнолдс  $\text{Re} = \frac{\omega a^2}{\nu}$ :

$$(3.206) \quad u = \text{Re } u_2(r, \theta) + O(\text{Re}^2),$$

$$v = \text{Re } v_2(r, \theta) + O(\text{Re}^2),$$

$$w = w_1(r, \theta) + \text{Re } w_2(r, \theta) + O(\text{Re}^2),$$

$$p = p_1 + \text{Re } p_2(r, \theta) + O(\text{Re}^2),$$

Тук налягането е обезразмерено посредством  $\rho a^2 \omega^2$ . Като заместим (3.206) в уравненията (3.204), получаваме, че първото приближение  $w_1(r, \theta)$  на първичното течение удовлетворява уравнението

$$\nabla^2 w_1 - \frac{w_1}{r^2} = 0.$$

Вземайки предвид граничните условия, за  $w$  полагаме

$$w_1(r, \theta) = f(r) \sin \theta.$$

Тогава за  $f(r)$  се получава следното обикновено диференциално уравнение от Ойлеров вид:

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f(r) = 0.$$

Общото решение на това уравнение може да се запише така:

$$(3.207) \quad f(r, \theta) = \omega \left( Ar + \frac{Ba^3}{r^2} \right).$$

Като намерим константите  $A$  и  $B$ , от граничните условия (3.205) получаваме

$$(3.208) \quad A = \frac{\frac{\Omega}{\omega} b^3 - a^3}{b^3 - a^3}, \quad B = \frac{b^3 \left( 1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)}{b^3 - a^3}.$$

Следователно първото приближение има вида

$$(3.209) \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad p = p_1,$$

$$w_1 = \left[ \frac{\Omega b^3 - \omega a^3}{b^3 - a^3} r + \frac{a^3 b^3 (\omega - \Omega)}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta.$$

Като заместим (3.206) в (3.204) и вземем предвид (3.207) — (3.209), за второто приближение получаваме уравненията

$$(3.210) \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta u_2) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_2) = 0,$$

$$(3.211) \quad \nabla^2 u_2 - \frac{2u_2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} - \frac{2v_2 \cot \theta}{r^2} = \frac{\partial p_2}{\partial r} - r \left( A + \frac{B}{r^3} \right)^2 \cos \theta \sin \theta,$$

$$(3.212) \quad \nabla^2 v_2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{v_2}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} - r \left( A + \frac{B}{r^3} \right)^2 \cos \theta \sin \theta,$$

$$(3.213) \quad \nabla^2 w_2 - \frac{w_2}{r^2 \sin^2 \theta} = 0.$$

Граничните условия за непротичане и полепване върху стените на двете сфери (3.205) ще бъдат удовлетворени с точност до  $O(\text{Re}^2)$ , ако

$$(3.214) \quad u_2(1, \theta) = u_2(\lambda, \theta) = 0,$$

$$v_2(1, \theta) = v_2(\lambda, \theta) = 0,$$

$$w_2(1, \theta) = w_2(\lambda, \theta) = 0.$$

Тъй като всеки член от уравнението (3.213) съдържа  $w_2$  съгласно (3.214), следва, че  $w_2 \equiv 0$ . Следователно остава да определим вторичното течение, което циркулира в меридионалните равнини. За



целта въвеждаме токова функция  $\Psi_2$  така, че да бъде удовлетворено уравнението на непрекъснатостта (3.210):

$$(3.215) \quad u_2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}, \quad v_2 = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}.$$

За да изключим налягането  $p_2$ , диференцираме (3.211) по  $\theta$  и (3.212) относно  $r$  и изваждаме получените равенства. Така след известни преобразувания получаваме

$$(3.216) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi_2 = -6B \left( \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^5} \right) \sin^2 \theta \cos \theta.$$

Граничните условия за  $\Psi_2(r, \theta)$  имат вида

$$(3.217) \quad \Psi_2(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \Psi_2(r, \theta) = 0 \quad \text{при } r=1,$$

$$(3.218) \quad \Psi_2(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \Psi_2(r, \theta) = 0 \quad \text{при } r=\lambda.$$

Действително от  $u_2(1, \theta) = u_2(\lambda, \theta) = 0$  и първото равенство на (3.215) следва, че  $\frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}$  е равно на нула при  $r=1$  и  $r=\lambda$ , т. е. и върху двете сфери. Това означава, че  $\Psi_2(1, \theta) = \alpha = \text{const}$  и  $\Psi_2(\lambda, \theta) = \beta = \text{const}$ . Ако допуснем, че  $\alpha \neq \beta$ , идваме до противоречие с второто равенство на (3.215), защото, за да остане  $v_2$  крайно върху оста на симетрията, трябва  $\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}(r, \theta) = 0$  независимо от големината на  $r$ . Следователно  $\alpha = \beta$ . Но съгласно (3.215) токовата функция е определена с точност до константа. Това означава, че може да бъде мащабирана така, че  $\alpha = \beta = 0$  върху стените на двете сфери, което трябваше да докажем.

Като положим

$$(3.219) \quad \Psi_2(r, \theta) = F(r) \sin^2 \theta \cos \theta,$$

от (3.216) за  $F(r)$  получаваме уравнението

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r} \right)^2 F(r) = -6B \left( \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^5} \right).$$

Или

$$(3.220) \quad r^4 F^{\text{IV}} - 12r^2 F^{\text{II}} + 24F^{\text{I}} = -6B \left( Ar^2 + \frac{B}{r} \right).$$

От (3.217) лесно намираме и граничните условия

$$(3.221) \quad F(1) = F^{\text{I}}(1) = F(\lambda) = F^{\text{I}}(\lambda) = 0.$$

Общият интеграл на уравнението (3.220) може да се запише така:

$$(3.222) \quad F(r) = \frac{1}{4} B \left( C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 r^3 + C_4 r^5 + Ar^2 - \frac{B}{r} \right),$$

където  $C_i (i=1, 2, 3, 4)$  са константи. От граничните условия

(3.221) за  $C_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) получаваме следната система от линейни алгебрични уравнения:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = B - A \\ \lambda^2 C_1 + C_2 + \lambda^5 C_3 + \lambda^7 C_4 = \lambda(B - \lambda^3 A) \\ -2C_2 + 3C_3 + 5C_4 = -(B + 2A) \\ -2C_2 + 3\lambda^5 C_3 + 5\lambda^7 C_4 = -\lambda(B + 2\lambda^3 A). \end{cases}$$

За основната детерминанта  $\Delta$  на тази система намираме

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda^5 & \lambda^7 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3\lambda^5 & 5\lambda^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-\lambda^2) & (\lambda^5-\lambda^2) & (\lambda^7-\lambda^2) \\ -2 & 3 & 5 \\ -2 & 3\lambda^5 & 5\lambda^7 \end{vmatrix} = \\ &= 4\lambda^{12} - 25\lambda^9 + 42\lambda^7 - 25\lambda^5 + 4\lambda^2 = \\ &= \lambda^2(\lambda-1)^4(4\lambda^6 + 16\lambda^5 + 40\lambda^4 + 55\lambda^3 + 40\lambda^2 + 16\lambda + 4). \end{aligned}$$

Като пресметнем константите  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и ги заместим в (3.219), намираме

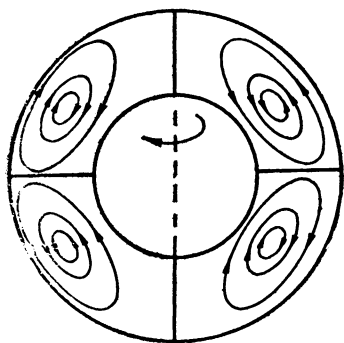
$$\Psi(r, \theta) = -\frac{(1-r)^3 (\lambda-r)^2 [P+Q]}{4(4\lambda^6 + 16\lambda^5 + 40\lambda^4 + 55\lambda^3 + 40\lambda^2 + 16\lambda + 4)r^2},$$

където

$$P = AB[\lambda(4\lambda^2 + 7\lambda + 4) + 2\alpha(\alpha+1)(4\lambda^2 + 7\lambda + 4)r + r(\lambda+1)^2(\lambda^2 + 3\lambda + 1)r^2 + 2(\lambda+1)(\lambda^2 + 3\lambda + 1)r^3],$$

$$Q = \frac{B^2}{\lambda} [2(\lambda+1)(\lambda^4 + 3\lambda^3 + 7\lambda^2 + 3\lambda + 1) +$$

$$+ (4\lambda^4 + 16\lambda^3 + 25\lambda^2 + 16\lambda + 4)r + + 2(\lambda+1)(3\lambda^2 + 4\lambda + 3)r^2 + (3\lambda^2 + + 4\lambda + 3)r^3].$$



Фиг. 20

На фиг. 20 с токовите линии е показана типична картина на течението в една от меридионалните равнини. Вторичното течение се състои от четири циркулиращи вихъра, които близо до екватора имат посока от вътрешната към външната сфера.

В предишния параграф видяхме, че олитът на Уайтхед да се пресметне второто приближение в задачата на Стокс за бавно транслационно

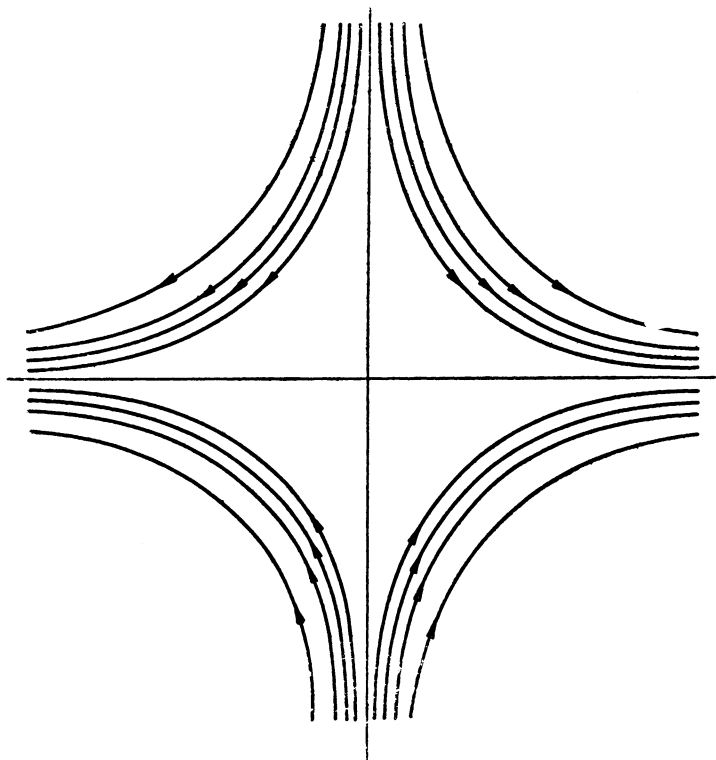
движение на сфера във вискозен флуид се оказва несполучлив. Причината за парадокса на Уайтхед, както знаем, е че на големи разстояния от сферата инерционните сили са сравними с вискозните сили. За въртливо движение на вискозен флуид между

две бавно въртящи се сфери методът на Уайтхед е приложим — поставената гранична задача за второ приближение се решава докрай.

За първичното течение може да пресметнем нормалните и тангенциалните напрежения:

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= \tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = -p, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = 0, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\varphi r} = \frac{-3\mu\omega a^3 B \sin\theta}{r^3},\end{aligned}$$

където на  $p$  може да се даде произволна постоянна стойност  $p_1$ .



Фиг. 21

Моментът върху външната сфера, който е равен на големината на момента на вътрешната сфера, се дава с формулата

$$\begin{aligned}M &= \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi b \sin\theta) (b \sin\theta) (\tau_{r\varphi})_{r=b} d(b\theta) = \\ &= -6\pi\mu\omega a^3 B \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\theta d\theta = -6\pi^2\mu\omega a^3 B = \frac{6\pi^2\mu a^3 b^3 (\Omega - \omega)}{b^3 - a^3}.\end{aligned}$$

Решението за въртене на единична сфера във вискозен флуид може да се получи от намереното решение на задачата за вискозно течение между две бавно въртящи се сфери, ако вземем  $b \rightarrow \infty$  и  $\Omega = 0$ . Тогава  $A = 0$  и  $B = 1$ . Тъй като скоростта на течението трябва да бъде крайна,  $C_3$  и  $C_4$  трябва да бъдат равни на нула. Тогава от граничните условия върху единичната сфера получаваме

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -2C_2 &= -1. \end{aligned}$$

Следователно  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$  и (3.219) дава

$$\Psi_2(r, \theta) = -\frac{1}{8} \left( 1 - \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta = -\frac{1}{8} (r-1)^2 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^2}.$$

На фиг. 21 е показана картината на вторичното течение, когато единичната сфера се върти бавно в безкраен вискозен флуид. Тук токовите линии не са затворени линии, т. е. четирите циркулиращи вихъра имат безкрайни центрове.

## ГРАНИЧЕН СЛОЙ

Теорията на граничния слой е най-разработеният раздел в механиката на вискозните флуиди. Именно тази теория сближава теоретичните методи на хидродинамиката на вискозните флуиди с инженерните приложения. *Понятието граничен слой отразява най-съществените механични процеси, които се извършват в потока около твърди повърхности при големи числа на Рейнолдс.* Механическият модел на граничния слой отчита основните свойства на теченията и в същото време има съществено по-прости уравнения в сравнение с изходните уравнения на Навие — Стокс. Това позволява решаването на много конкретни задачи, въпреки че този модел води до решения само за отделни области в полето на течението.

## § 4.1. УРАВНЕНИЯ НА ГРАНИЧНИЯ СЛОЙ

Да разгледаме двумерно течение на вискозна течност близо до твърда повърхност. Нека за определеност вземем стационарно обтичане на твърдо тяло от равномерен поток, като изводите, които ще направим, ще са валидни и за вътрешните течения. Да запишем постановката на задачата в безразмерни променливи, като използваме за мащабни величини скоростта на обтичащия поток  $U$  и характерния размер на тялото  $L$ :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

В тези уравнения плътността  $\rho$  е запазена, за да се намали външната разлика в безразмерното и размерното им записване. Формално това се постига с обезразмеряване на плътността с величината  $\rho^*$ , а налягането — с  $\rho^* U^2$ .

Граничните условия върху тялото се дават от условието за полевпване, а далече от него — от условието за преход на течението в равномерен поток:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u=0, \quad v=0, \quad \vec{r} \in S_T, \\ u=1, \quad v \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тук е въведено означението  $\varepsilon^2 = \text{Re}^{-1}$ , където  $\text{Re} = UL\nu^{-1}$ . В много случаи, представляващи интерес за приложенията в практиката, числото на Рейнолдс е голямо. Това е свързано преди всичко с коефициента на вискозност  $\nu$ , който за такива реални флуиди като водата и въздуха е много малък. Числото на Рейнолдс се увеличава също и с увеличаване скоростта на потока и линейния размер.

При големи стойности на числото на Рейнолдс параметърът  $\varepsilon^2$  пред производната от по-висок ред в уравненията (4.1) е малка величина. Наличието на малък параметър в уравненията обикновено подсказва и начин за тяхното решаване — разлагане по този параметър. За нулевото приближение по параметъра  $\varepsilon$  обаче редът на уравненията се намалява с единица, като от уравненията за движението на вискозни флуиди получаваме уравненията за движението на идеални флуиди. В постановка за идеален флуид може да бъде удовлетворено само условието за непротичане  $v_n = 0$ . По такъв начин условието за отсъствие на хлъзгане на флуида върху повърхността на тялото ( $v_\tau = 0$ ) остава неудовлетворено. Такова решение в най-добрия случай може да опише добре течението далече от тялото, но то е непригодно близо до него. Затова трябва да се прилага специален метод за разлагане по малък параметър, като се разглеждат тънки области (гранични слоеве) близо до твърдите тела.

**Вътрешно и външно решение.** Удобно е общият метод за изследване на граничен слой да се проследи при решаването на следния прост пример:

Да се реши уравнението

$$(4.3) \quad \varepsilon \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{du}{dy} - f = 0$$

с гранични условия

$$(4.4) \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Това уравнение описва движението на материална точка под действието на активната сила  $f$  и силата на триене  $-\frac{du}{dy}$ . Точното решение на формулираната гранична задача се намира лесно:

$$(4.5) \quad u = (1-f) \left(1 - e^{-\frac{y}{\varepsilon}}\right) \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{-1} + fy.$$

Решението (4.5) представлява функция, която е близка до линейната върху по-голяма част от интервала  $[0; 1]$ . Само близо до точката  $y=0$  тя рязко се отклонява от линейната зависимост.

Ако за решаване на уравнението (4.3) приложим метода за разлагане по малкия параметър  $\varepsilon$ , то в нулево приближение получаваме следното уравнение от първи ред:

$$\frac{du}{dy} - f = 0.$$

Общото решение на това уравнение съдържа една произволна константа, която може да се подбере така, че да се удовлетвори едно гранично условие. Като удовлетвори граничното условие в десния край на интервала  $[0; 1]$ , получаваме

$$(4.6) \quad u = 1 + f(y - 1).$$

Граничното условие в левия край остава неудовлетворено. Причината е следната: от точното решение (4.5) следва, че за произволно малко  $\epsilon$  около точката  $y=0$  има околност, в която  $y \sim \epsilon$  и величината  $y\epsilon^{-1}$  не може да се пренебрегне за никоя стойност на  $\epsilon$ . Затова близо до тази точка трябва да се построи друго разлагане. Въвеждаме променливата  $\eta = y\epsilon^{-1}$ , която се нарича *вътрешна променлива*. Като се използва новата променлива, уравнението (4.3) се преобразува в следния вид:

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{du}{d\eta} - \epsilon f = 0.$$

Вижда се, че близо до точката  $\eta=0$  основна роля играе силата на триене. Общото решение на това уравнение съдържа две константи, едната от които ще определим така, че да бъде изпълнено условието в левия край на интервала. Получаваме

$$(4.7) \quad u = A_1(1 - e^{-\eta}).$$

Получените решения (4.6) и (4.7) трябва да се съгласуват, като се вземе предвид, че те представляват една и съща функция (4.5) в различни части, които имат сечение, от интервала  $[0; 1]$ . От (4.6) намираме, че  $u \rightarrow 1 - f$ , когато  $y \rightarrow 0$ . От (4.7) следва, че с отдалечаване от точката  $\eta=0$ ,  $u \rightarrow A_1$ . Като приравним получените изрази, за  $u$  получаваме

$$A_1 = 1 - f.$$

И така построено е решение на уравнението (4.3), което се представя посредством двете функции (4.6) и (4.7). Сравнението с (4.5) показва, че (4.6) апроксимира точното решение далече от точката  $y=0$ , а (4.7) — в малката околност на тази точка. На това основание (4.6) се нарича *външно решение*, а (4.7) — *вътрешно решение*.

Важно е да се отбележат две обстоятелства: *не съществува единно разлагане по малкия параметър, което да е равномерно валидно в целия интервал; граничната задача на външното решение при  $y=0$  съвпада с граничната форма на вътрешното решение при  $\eta \rightarrow \infty$* . Получените решения (4.6) и (4.7) могат да се уточнят, като се намерят следващите членове от разлагането. В теорията на граничния слой обикновено се ограничаваме с нулевото приближение, т. е. с асимптотичното решение при  $Re \rightarrow \infty$ .

**Плоска пластина.** Да разгледаме най-напред обтичане на плоска пластина. Удобно е началото на координатната система да съвпада с левия край на интервала, като оста  $x$  се насочи в направление на потока по повърхността на пластината. При изследване

полето на течението в тази задача ще приложим понятията за вътрешно и външно решение. Като положим  $\varepsilon=0$  в (4.1), получаваме системата уравнения на идеален флуид, чието решение, удовлетворяващо условието за преход в равномерен поток, има вида

$$(4.8) \quad u=1, \quad v=0, \quad p=p_{\infty}.$$

Това решение не удовлетворява граничното условие върху пластината  $u(x, 0)=0$ , затова близо до повърхността  $y=0$  трябва да се построи вътрешно решение.

Да въведем вътрешната променлива  $\eta=y\varepsilon^{-1}$ , като в уравненията (4.1) извършим следната смяна на променливите:

$$(4.9) \quad u=\varepsilon\eta, \quad v=\varepsilon v'.$$

Тук преходът от  $v$  към  $v'$  се налага, за да се удовлетвори уравнението на непрекъснатостта. В новите променливи системата (4.1) приема вида

$$(4.10) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v' \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon^2 \left( u \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} = 0.$$

Като изоставим в (4.10) членовете от ред, по-висок от първи, получаваме уравненията на граничния слой. Да запишем тези уравнения в изходните променливи  $u$  и  $v$  (Л. Прантъл, 1904 г.):

$$(4.11) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Дебелината на граничния слой  $\delta$ , в рамките на който са в сила уравненията (4.11), може да бъде оценена съгласно формулата (4.9), чрез която се въвежда вътрешната координата

$$(4.12) \quad \frac{\delta}{L} = O(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}\right).$$

Ще напомним, че уравненията (4.11) са записани в безразмерни променливи. В размерни променливи тези уравнения запазват формално своя вид, като единствената разлика се състои в това, че  $\text{Re}^{-1}$  се заменя с  $\nu$ .

От първото уравнение на (4.11) заключаваме, че в граничния слой конвективните и един от вискозните членове в уравненията на Навие — Стокс имат един и същ порядък. Уравненията (4.11) за първи път са получени от Прантъл именно въз основа на сравня-



ването на конвективните и вискозните членове посредством следните оценки:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U^3}{L}, \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U}{\delta^2},$$

$$\frac{U^3}{L} \sim \frac{\nu U}{\delta^2} \rightarrow \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

По такъв начин отново идваме до уравненията (4.12).

От второто уравнение на (4.11), следва, че налягането с точност до величини от порядъка  $\varepsilon^2$  не се променя в напречно направление на граничния слой. Затова може да се приеме, че  $p = p_\infty$ . Тъй като при обтичането на пластина с идеален флуид  $p = \text{const}$ , налягането отпада от уравнения (4.11). Получената система служи за определяне компонентите на скоростта  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ .

Граничните условия за уравненията на граничния слой се получават от (4.2):

$$(4.13) \quad \begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0, \quad y = 0, \\ u &\rightarrow 1, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тъй като системата (4.11) има трети порядък по  $y$ , то може да се зададат само три условия, като четвъртото условие ( $v \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ ) не се използва. Както ще се види по-нататък от изложението в тази глава, при конкретни решения на уравненията на граничния слой това условие не е удовлетворено и представлява един неотстраним недостатък на теорията на граничния слой.

**Криволинейна повърхност.** Да разгледаме обтичане на плоско тяло с крайна кривина, която няма прекъсване, така че във всяка точка от повърхността му може да се прекара нормала. Да изберем криволинейна ортогонална координатна система по следния начин: координатата  $x$  отчитаме в направление на повърхността на тялото, координатата  $y$  вземаме да бъде във всяка точка  $x$  перпендикулярна на повърхността, а координатното начало поставяме в предната критична точка на потока. В тези координати уравненията на Навие—Стокс са дадени в приложението (т. 3 от приложението). Да допуснем, че в рамките на граничния слой

с дебелина  $\delta = O(\text{Re}^{-\frac{1}{2}})$  могат да се пренебрегнат ефектите на кривината на координатната система. Тогава за течението в граничния слой върху плоска изкривена повърхност получаваме отново уравненията (4.11).

За да демонстрираме влиянието на кривината на повърхността, нека запазим онзи от изоставените членове във второто уравнение на (4.11), който е от най-висок ред:

$$ku^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Като интегрираме това уравнение, намираме изменението на налягането по дебелината на граничния слой  $\delta$ :

$$\frac{1}{\rho} (p - p_\delta) = \int_0^\delta \frac{u^2}{R} dy \approx U^2 \frac{\delta}{R}.$$

Условието  $k\delta \ll 1$  е критерият за вярност на предположението, че уравненията на граничния слой, записани в свързаните с тялото криволинейни координати, са същите, каквито в праволинейни ортогонални координати. При наличието на това условие налягането е функция само на надлъжната координата  $p = p(x)$ . Тази функция не може да се определи от уравненията на граничния слой, тя трябва да бъде зададена като необходима допълнителна информация.

Далече от тялото течението се разглежда като идеално. Тогава съгласно интеграла на Бернули (1.68) връзката между налягането  $p(x)$  и скоростта  $U(x)$  има вида

$$\frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{\rho} p = \text{const},$$

откъдето получаваме

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{dU}{dx}.$$

Окончателният вид на уравненията на граничния слой около криволинейна повърхност е следният:

$$(4.14) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Функцията  $U(x)$  се счита за дадена. Тя представлява скоростта на идеалното течение на външната граница на граничния слой. Така за уравнения (4.14) имаме гранични условия, които включват и асимптотично условие при  $y \rightarrow \infty$ :

$$(4.15) \quad \begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0, \quad y = 0, \\ u &\rightarrow U(x), \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Асимптотичното условие  $u \rightarrow U(x)$  при  $y \rightarrow \infty$  практически се удовлетворява за малки крайни стойности на  $y$ , така че решението (4.14) зависи от  $\eta = y\epsilon^{-1}$ .

Да въведем токовата функция  $\Psi(x, y)$  посредством съотношенията

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Тогава от (4.14) и (4.15) получаваме още една формулировка на задачата за граничен слой:

(4.16)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3},$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow U(x), \quad y \rightarrow \infty.$$

**Ососиметрично тяло.** Да разгледаме ососиметрично обтичане на ротационно тяло относно криволинейна ортогонална координатна система  $xOy$ . Нека началото  $O$  съвпада с предната критична точка, като координатата  $x$  се измерва по направление на повърхността на тялото в коя да е негова меридиална равнина, а координатата  $y$  е перпендикулярна на повърхността във всяка точка  $x$ . Контурът на тялото предполагаме зададен посредством уравнението  $r=r(x)$ , където  $r(x)$  е радиусът на сечението на повърхността на тялото с равнина, която е перпендикулярна на оста на симетрия. Както и в случая на плоско тяло, предполагаме, че кривината на повърхността няма прекъсване.

Да допуснем, че дебелината на вискозния граничен слой  $\delta(x)$ , който се образува около повърхността на тялото, е много по-малка от радиуса, т. е.  $\delta r^{-1} \ll 1$ . Нека  $u$  и  $v$  са компонентите на скоростта по осите  $x$  и  $y$ , а  $U(x)$  е скоростта на външното невискозно течение близо до повърхността на тялото. Тогава може да се покаже, че уравненията на ососиметричния граничен слой имат вида (Е. Болтце, 1908 г.)

(4.17)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$-\frac{u^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial y} = 0.$$

Вижда се, че налягането в направление  $y$  във всяко сечение  $x = \text{const}$  се изменя с величина от порядъка на  $\delta r^{-1}$ . Затова, когато  $\delta r^{-1} \ll 1$ , може да се приеме, че  $p=p(x)$  и посредством интеграла на Бернули (1.68) в уравненията на граничния слой да се въведе скоростта  $U(x)$ .

Ще покажем, че уравненията (4.17) могат да се приведат към уравненията на плоския граничен слой. Да направим следната смяна на зависимите и независимите променливи (Е. Степанов, 1947 г.; В. Манглер, 1948 г.):

(4.18)

$$\bar{x} = \int_0^x r^2 dx, \quad \bar{y} = ry,$$

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = \frac{1}{r} \left( v + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} y u \right),$$

$$\bar{U} = U(\bar{x}).$$

Като вземем предвид съотношенията

$$\frac{\partial f}{\partial x} = r^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{r'}{r} \bar{y} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = r \frac{\partial f}{\partial y},$$

то (4.17) се привежда към системата (4.14) с една формална разлика — на променливите в (4.14) трябва да се поставят чертички. По такъв начин ососиметричното течение  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $U(x)$  се свежда със смяната (4.18) към еквивалентното на него плоско течение  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{v}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $U(\bar{x})$ .

**Открити течения.** Понятието граничен слой се отнася преди всичко за течения близо до твърда повърхност. Обаче това понятие може да се обобщи също и за течения, далече от твърди повърхности. Тук се отнасят така наречените *открити течения*: в струя, втичаща се в пространство, в което има флуид; в следа зад тяло, което се обтича; в слоя на смесване близо до разделителната граница на два потока. Характерното за тези течения е голямата несиметричност на свойствата в надлъжно и напречно направление  $x$  и  $y$  — градиентът на скоростта в направлението  $y$  е много по-голям от градиента на скоростта в направлението  $x$ . От това следва, че могат да се приложат същите оценки за производните, както в теорията на граничния слой, и да се получат уравненията на Прантъл. Да запишем тези уравнения едновременно за плоски и ососиметрични течения:

$$\begin{aligned} (4.19) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial (y^j u)}{\partial x} + \frac{\partial (y^j v)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Тези уравнения следват от пълната система уравнения на Навие — Стокс в цилиндрична координатна система (т. 1 от приложението), ако се използват означенията  $x, y$  вместо  $z, r$  и  $u, v$  вместо  $v_z, v_r$ . В ососиметричния случай  $j=1$ , а в плоския  $j=0$ .

За открити течения обикновено се счита, че  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ .

**Нестационарни течения.** Досега разглеждахме стационарни течения, но всички съображения, свързани с оценката на членовете и извода на уравненията на Прантъл, са приложими и за нестационарните течения. Без да нарушаваме хода на разсъжденията, в уравненията (4.10), (4.14) може да се добави членът  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . За налягането трябва да се използва съотношението

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x},$$

което за нестационарните течения следва от интеграла на Коши — Лагранж (1.69). За уравнения на нестационарния граничен слой това съотношение се съгласува с асимптотичното гранично условие  $u \rightarrow U$  при  $y \rightarrow \infty$ :

$$(4.20) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

**Общи свойства на уравненията на граничния слой.** Най-същественото различие на системата уравнения на Навие — Стокс от системата уравнения на Прантъл се състои в това, че първата е елиптична, а втората — параболична система. Това означава, че решението на уравненията на Навие — Стокс във всяка точка от разчетната област се определя от решенията във всички други точки от тази област. Решенията на уравненията на Прантъл в някое сечение  $x = x_0$  се определят само от решенията при  $x < x_0$ . Състоянието на граничния слой в сечението  $x_0$  не зависи от това, което ще става в потока след това сечение. Решението в целия граничен слой може да се намери, като се движим по  $x$  от някое сечение  $x = x_0$ , в което трябва да бъде зададено начално условие

$$(4.21) \quad u = u_0(y), \quad x = x_0.$$

Граничната задача (4.14) с гранични условия (4.15) и начални условия (4.21) е коректна. Решението на тази задача съществува, единствено е и се изменя слабо при смущения на началното условие (4.21) (О. А. Олейник, 1963 г.).

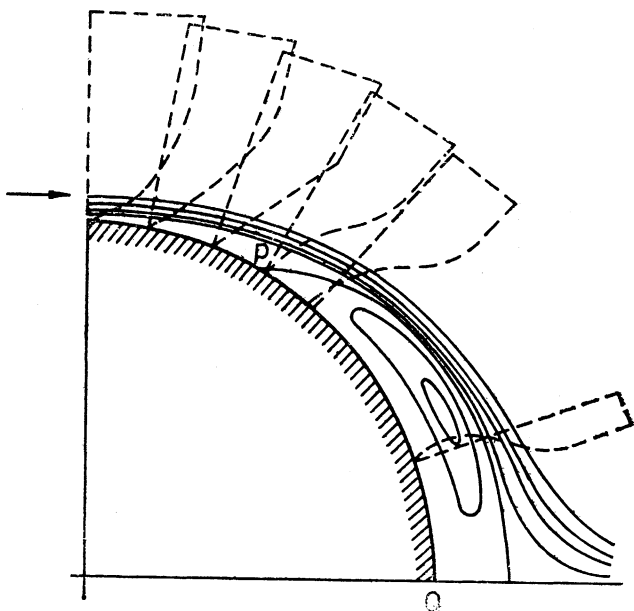
Областта на съществуване на решението зависи от поведението на функцията  $\frac{\partial p}{\partial x}$ . Ако  $\frac{\partial p}{\partial x} \leq 0$  при  $x > x_0$ , глобално решение съществува в интервала  $x_0 \leq x < \infty$ . Ако  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$  при  $x > x_0$ , теоремата за съществуване на глобално решение е вярна само при условие, че положителната функция  $\frac{\partial p}{\partial x}$  достатъчно бързо намалява с растенето на  $x$  (Н. В. Хуснутдинов, 1978 г.). В противен случай решение съществува само в крайния интервал след точката  $x = x_0$ .

Другата важна разлика на уравнението на Прантъл от уравнението на Навие — Стокс се състои в това, че за пресмятане на величините в граничния слой е необходимо да бъде зададена допълнителна информация за потока, а именно налягането в граничния слой  $p(x)$  или скоростта на неговата външна граница.

Ако се обтича тънко тяло, близко по форма до пластина, тънкият граничен слой незначително отмества токовите линии от повърхността. Поради това най-напред може да се реши задачата за обтичане на тялото от идеален флуид и като се използва

това решение, да се изчисли разпределението на налягането  $p(x)$  и скоростта  $U(x)$ .

Ако се обтича дебело тяло с крайни размери, измененията в картината на течението с невискозен поток поради наличието на



Фиг. 22

граничен слой са по-съществени. Тези изменения са свързани с откъсването на потока от повърхността на тялото и образуването на циркуляционна зона в задната част на тялото (вж. фиг. 22). В резултат на това токовите линии се отклоняват силно от повърхността и разпределението на налягането се изменя. В този случай решението трябва да се търси въз основа на пълните уравнения на Навие — Стокс. Друг начин за намиране на решението е разпределението на налягането по стената да се определи експериментално, а след това да се пресметне  $U(x)$ . Уравненията на граничния слой се решават, като се използва намереното разпределение на скоростта на външната граница. Това решение може да се намери само до точката, в която триенето става равно на нула, т. е. до точката на откъсване. След точката на откъсване започва зона на обратно течение и уравненията на граничния слой, строго казано, не са приложими. Обикновено точката на откъсване се разполага на малко разстояние след точката, в която налягането приема минимална стойност.

Изследванията на теченията в зоната на откъсването изискват използването на пълните уравнения на Навие — Стокс. Въз основа на метода за срастване на асимптотичните разлагания е

разработена теорията за „свободните взаимодействия“, която позволява да се проведат локални разчети за откъсването на граничния слой при големи числа на Рейнолдс (Б. Я. Нейланд, 1969 г.; К. Стюартсън, 1969 г.).

Уравненията на граничния слой фактически описват течението в много тънък слой близо до повърхността. Граничното условие, което се поставя при  $y \rightarrow \infty$  е свързано с математическата същност на задачата и не всички свойства на потока могат да бъдат отразени правилно в рамките на тези уравнения. Например от уравнението на непрекъснатостта следва, че скоростта  $v$  се изменя на големи разстояния, както —  $U_x \cdot y$ , което в реалните течения не е така.

## § 4.2. АВТОМОДЕЛНИ РЕШЕНИЯ НА УРАВНЕНИЯТА НА ГРАНИЧНИЯ СЛОЙ

Автомоделните решения са частни решения на уравненията на граничния слой. В отделни случаи е възможно да се намали броят на независимите променливи и задачата за граничния слой да се сведе към гранична задача за обикновено диференциално уравнение. При това начални условия не се задават. Важни групи автомоделни решения се получават при степенния закон за изменение на скоростта  $U(x)$ , в свободни гранични слоеве при постоянно налягане и в някои други случаи.

При изучаване свойствата на граничния слой и по-специално при търсене на автомоделни решения е удобно да се използват променливите

$$(4.22) \quad \Psi = \sqrt{Ux} f(x, \eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}.$$

Вместо токовата функция  $\Psi(x, y)$  търсим функцията  $f(x, \eta)$ , чрез която компонентите на скоростта се изразяват по следния начин:

$$(4.23) \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\sqrt{Ux} \left[ \frac{1}{2} \frac{(Ux)'}{Ux} f + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right]$$

В новите променливи системата (4.14) се свежда към едно уравнение:

$$(4.24) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{U} \frac{dU}{dx} \right) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{x}{U} \frac{dU}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = x \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right).$$

От (4.15) следва, че граничните условия за  $f$  имат вида

$$(4.25) \quad f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}=0, \quad \eta=0, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Като се реши уравнението (4.24), по формулите (4.23) могат да се изчислят компонентите на скоростта, а също и други характеристики на граничния слой. За коефициента на триене  $c_f$  по определение

$$\frac{1}{2} \rho U^2 c_f = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

Тогава от (4.23) за  $c_f$  намираме следната зависимост:

$$(4.26) \quad \frac{1}{2} c_f \sqrt{\text{Re}_x} = f''(0, x), \quad \text{Re} = \frac{Ux}{\nu}.$$

#### 4.2.1. Степенен закон на външната скорост

Уравнението (4.24) съдържа само един безразмерен параметър  $m = \frac{x}{U} \frac{dU}{dx}$ , който е свързан с външната скорост  $U(x)$ . Ако той не зависи от  $x$ , могат да се намерят частни решения на уравнението (4.24), които също не зависят от  $x$ , т. е. автомоделни решения. Тези решения удовлетворяват уравнението

$$(4.27) \quad f''' + \frac{1}{2}(1+m)ff'' + m(1-f'^2) = 0$$

и граничните условия (4.25). На тези автомоделни решения отговарят течения, за които външната скорост зависи от надлъжната координата по степенен закон:

$$(4.28) \quad U = u_1 x^m, \quad u_1 = \text{const.}$$

Да разгледаме някои частни решения от типа (4.28).

**Плоска пластина.** При  $m=0$  получаваме течение по направление на полубезкрайна пластина. Автомоделното решение се определя от граничната задача

$$(4.29) \quad \begin{aligned} f''' + \frac{1}{2} f f'' &= 0, \\ f &= 0, \quad f' = 0, \quad \eta = 0, \\ f' &\rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тази задача може да се реши само числено. На фиг. 23 е показана функцията  $f'(\eta)$ , която дава профила на надлъжната компонента на скоростта в граничния слой. С отдалечаване от пластината скоростта монотонно се увеличава от нула до единица. Тъй като съгласно постановката на задача (4.29) граничният слой е асимптотичен, понятието дебелина на граничния слой  $\delta$  при  $y \rightarrow \infty$  се дефинира като такова разстояние от пластината, на което скоростта в граничния слой се различава от скоростта на външното течение със зададена малка величина  $\varepsilon$

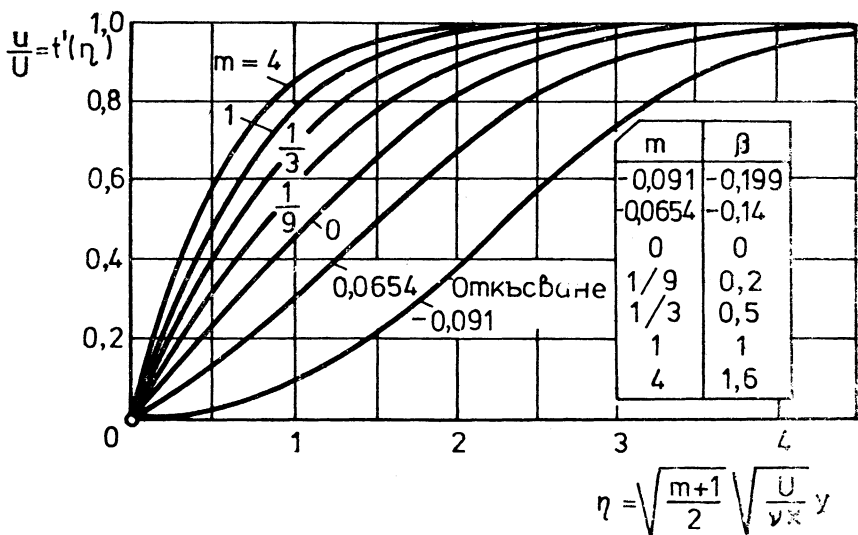
$$|f'(\delta) - 1| < \varepsilon.$$



При  $\epsilon=0,01$ , следвайки численото решение, получаваме

$$\delta \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Дебелината на граничния слой  $\delta$  е равна на нула в предния край на пластината и с растенето на  $x$  се увеличава, както  $\sqrt{x}$ .



Фиг. 23

По-точни характеристики на граничния слой са дебелината на изместване  $\delta_1$  и дебелината на загуба на импулса  $\delta_2$ , които се определят от равенствата

$$U\delta_1 = \int_0^{\infty} (U-u) dy \approx 1,721 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

$$U^2\delta_2 = \int_0^{\infty} u(U-u) dy \approx 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Физическият смисъл на  $\delta_1$  е дебелината на изтласкване на външното течение от граничния слой.

За коефициента на триене (4.26) численото решение дава

$$\frac{1}{2} c_f \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} = 0,332.$$

Местният коефициент на триене в предния край на пластината е

безкрайност и след това намалява, както  $x^{-\frac{1}{2}}$ . Коефициентът на пълното съпротивление на пластина с дължина  $L$  и единична ширина се дава от формулата

$$\bar{c}_f = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}}.$$

Тази формула, както и формулата за профил на скоростта  $u = U f'(\eta)$ , се потвърждава добре от експеримента за числа на Рейнолдс до  $\text{Re}_L = 5 \cdot 10^5 \sim 10^6$ . При по-големи числа на Рейнолдс  $\text{Re}_L$  течението става неустойчиво и преминава към турбулентен режим. По такъв начин ламинарен режим на движение, съответстващ на решение (4.24), се реализира само в предната част на пластината, след което той преминава в турбулентен.

Ще отбележим още, че нормалната компонента на скоростта  $v$  при  $y \rightarrow \infty$  не се анулира:

$$v \rightarrow 0,8604 U \sqrt{\frac{\nu}{xU}},$$

което е недостатък на теорията на граничния слой.

**Стесняващ се канал.** Разпределението на скоростта (4.28) при  $m = -1$  се реализира при потенциално течение в стесняващ се ( $u_1 < 0$ ) или разширяващ се ( $u_1 > 0$ ) канал между две наклонени една към друга пластини. Наистина в полярни координати за компонентите на скоростта имаме

$$v_r = \frac{u_1}{r}, \quad v_\varphi = 0.$$

В координатна система  $x, y$ , в която  $x$  се изменя по направление на една от страните, получаваме (4.28). В § 2.3.2 бяха разгледани някои автомобилни решения на уравнения на Навие — Стокс за вискозно течение между стени. Интересно е да се анализира връзката между тези решения и решенията на уравнения на граничния слой. Поради това, че скоростта  $U < 0$  за стесняващ се канал, необходимо е до известна степен да се изменят формулите за преобразуване (4.22), а именно:

$$\Psi = \sqrt{\varepsilon \nu U x} f(x, \eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{\varepsilon U}{\nu x}} y,$$

където  $\varepsilon = -1$  е за стесняващ се канал, а  $\varepsilon = 1$  — за разширяващ се.

За автомобилното решение на (4.24) и (4.25) извеждаме следната гранична задача (К. Полхаузен, 1921 г.):

$$\begin{aligned} (4.30) \quad & -\varepsilon f''' + 1 - f'^2 = 0, \\ & f = 0, f' = 0, \eta = 0, \\ & f' \rightarrow 1, \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Решението на тази задача може да се получи в квадратури. Като умножим уравнението (4.30) на  $f''$  и интегрираме, отчитайки граничните условия, намираме

$$(4.31) \quad \epsilon f''' + \frac{2}{3} (f' - 1)^2 (f' + 2) = 0.$$

Вижда се, че решение съществува само при  $\epsilon = -1$ . От (4.31)

$$\frac{df'}{d\eta} = \sqrt{\frac{2}{3} (f' - 1)^2 (f' + 2)}.$$

Като го интегрираме, намираме

$$\eta = \sqrt{2} \left[ \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{2+f'}{3}} - \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{2}{3}} \right].$$

Тогава за скоростта в граничния слой получаваме

$$(4.32) \quad \frac{u}{U} = 3\eta^2 \left( \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 2.$$

Скоростта  $u$  расте монотонно с отдалечаване от стената и достига  $U$  например при  $\eta = 3$ . Следователно за дебелината на граничния слой  $\delta$  получаваме оценка

$$\delta \approx 3 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Уравнението (4.30) съвпада с уравнението (2.99), ако в последното се направи смяна  $y \sqrt{-F_0 \nu^{-1}} = \eta$ , като се положи  $C = F_0^2$  и се премине към граница при  $F_0 \nu^{-1} \rightarrow \infty$ . Решението на пълните уравнения на Навие — Стокс в случая на разширяващ се канал  $\epsilon = 1$  води към откъсване на течението, докато в постановката на граничен слой за този случай решение не съществува.

**Обтичане на клин.** В широк диапазон на изменение на  $m$  разпределението на скоростта (4.28) съответствува на потенциално обтичане на клин. Наистина да разгледаме в полярни координати  $r, \varphi$  потенциално течение с токова функция

$$\Psi = A r^n \sin n\varphi.$$

Токовата функция се анулира върху лъчите  $n\varphi = k\pi$  ( $k$  е цяло число) и всеки такъв лъч може да се замени с твърда повърхност. По направление на тази повърхност скоростта се изменя по закона

$$(4.33) \quad u = A n r^{n-1} (-1)^k.$$

Сравнението с формула (4.28) показва, че от (4.33) получаваме степенно разпределение на скоростта по направление на стената, ако се приеме

$$u_1 = (-1)^k A n, \quad m = n - 1.$$

Нека сега по направление на лъча  $\varphi = \frac{1}{n} \pi$  да минава твър-

да повърхност. Ако  $n \geq 1$ , по лъча  $\varphi = -\frac{1}{n}\pi$  може да се разположи симетрично друга твърда повърхност и по такъв начин да се получи обтичане на клин с ъгъл на разтвора  $\beta = \frac{2m}{m+1}\pi$ . Този поток има критична точка във върха на ъгъла и се ускорява с отдалечаване от върха. Налигането по направление на повърхността намалява.

Ако  $n < 1$ , получаваме разширяващо се течение по направление на повърхността, която в точката  $x=0$  се отклонява на ъгъл  $\frac{1}{2}\beta$  от посоката на обтичащия поток. В ъгловата точка  $x=0$  скоростта се обръща в безкрайност и монотонно намалява с нарастването на  $x$ , т.е. течението е вакъснително. Сега налягането по направление на повърхността на клина се увеличава.

И така при  $\beta > 0$  степенното разпределение на скоростта (4.28) съответствува на ускорителното течение по направление на стените на клина, а при  $\beta < 0$  — на закъснителното течение. За тези течения трябва да се разглежда общата гранична задача (В. Фокнер, С. Скен, 1930 г.)

$$(4.34) \quad \begin{aligned} f''' + \frac{1}{2}(1+m)ff'' + m(1-f'^2) &= 0, \\ f=0, \quad f' &= 0, \quad \eta=0, \\ f' &\rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тази задача е решена числено при различни стойности на  $m$  (Д. Хартри, 1937 г.) и са съставени таблици за стойностите на функцията  $f(\eta)$  и нейните производни, които са необходими за пресмятане на характеристиките на граничния слой. На фиг. 23 са показани профилите на скоростта в граничния слой. Те са монотонни и при  $\beta \leq 0$  имат инфлексна точка.

Обезразмереното триене на повърхността  $f''(0)$  монотонно намалява с намаляването на  $\beta$  и при  $m = -0,166$  ( $\beta = -0,199$ ) се анулира, т.е. възниква откъсване на граничния слой. Това е автомоделно откъсване, тъй като триенето става равно на нула изведнъж върху цялата повърхност. Наличието на явлението откъсване в семейството на автомоделните решения потвърждава, че ламинарният граничен слой е полепнал по повърхността само при малък положителен градиент на налягането.

Частният случай на течение при  $m=1$  представлява интерес, когато ъгълът на разтвора е равен на  $\pi$ , т.е. когато има поток, обтичащ плоска стена. Дебелината на граничния слой се определя съгласно численото решение от условието  $|f'(\delta) - 1| < 0,001$  и е равна на

$$\delta \approx 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{U'}}.$$

За коефициента на триене имаме

$$\frac{1}{2} c_f \operatorname{Re}_x^{\frac{1}{2}} = 1,2326.$$

За това течение в § 2.2 е получено точно решение на уравненията на Навие—Стокс. Не е трудно да се покаже, че граничната задача (4.34) напълно се привежда към съответното точно решение (2.76) с проста смяна на променливите.

Следователно в този случай решението на уравненията на граничния слой е точно решение на уравненията на Навие—Стокс.

Ососиметричният аналог на течението (4.33) може да се изследва посредством трансформовачните формули. Тъй като за конус

$r = x \sin \frac{1}{2} \beta$ , то  $\bar{x} = \frac{1}{3} x^3 \sin^2 \frac{1}{2} \beta$ . На ососиметричния граничен слой със скорост на външната граница  $U(x) = u_1 x^m$  съответствува плосък граничен слой с разпределение на скоростта

$U(\bar{x}) = u_1 \bar{x}^{\frac{m}{3}}$ . В частност пресмятането на ососиметрично течение около критична точка ( $m=1$ ) се свежда до пресмятане на плоско течение около клин с ъгъл на разтвора  $\beta = \frac{1}{2} \pi$ .

## 4.2.2. Открити течения

**Следа зад обтичано тяло.** Да разгледаме автомоделно решение за течение в следа зад тяло, което се обтича от равномерен поток (В. Толмин, 1931 г.). На големи разстояния зад тялото скоростта на течението се отличава малко от скоростта на обтичащия поток. Това позволява да се линеаризират уравненията на граничния слой (4.19) и по такъв начин да се опрости решението. Да положим

$$u(x, y) = U - u_1(x, y)$$

и да предположим, че  $u_1$  е малка величина, така че квадратът ѝ да може да се пренебрегне. В случая на плоско течение от (4.19) получаваме уравнението

$$(4.35) \quad U \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2},$$

което има вида на уравнението на топлопроводността. За гранични условия приемаме условието за симетрия на течението относно линията  $y=0$  и условието за преход в равномерен поток:

$$(4.36) \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad y=0,$$

$$u_1 \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

Граничната задача (4.35), (4.36) притежава автомоделно решение, което е разглеждано в § 2.1:

(4.37)

$$u_1 = \frac{B}{2\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{1}{4}\eta^2},$$

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} y.$$

За да се определи произволният множител  $B$ , прилагаме уравнението за запазване на количеството на движението (1.13) към флуиден обем, ограничен от повърхността  $S_T$  на обтичаното тяло и затворена повърхност  $S_B$ , която е външна по отношение на тялото. Като преобразуваме пълната производна в (1.13) по формулата (1.4), получаваме уравнението

$$(4.38) \quad \int_{S_B} \rho \vec{v} v_n dS = \int_{S_B} \vec{p}_n dS - \vec{W}.$$

Тук с  $\vec{W}$  е означена силата, с която течността действа на обтичаното тяло. Ако повърхността  $S_B$  е достатъчно отдалечена от тялото, може да се приеме, че  $\vec{p}_n = -p \cdot \vec{n}$ . Преобразуваме уравнението (4.38), като използваме следните две равенства:

$$\int_{S_B} \vec{n} dS = 0, \quad \int_{S_B} \rho v_n dS = 0.$$

Първото от тях е удовлетворено за всяка затворена повърхност, а второто следва от уравнението на непрекъснатостта (1.9).

Нека  $p_\infty$  и  $\vec{v}$  са налягането и скоростта в обтичащия поток. Като умножим първото равенство с  $p_\infty$ , второто с  $\vec{U}$  и извадим сбора им от (4.38), получаваме

$$(4.39) \quad \int_{S_B} [\rho (\vec{v} - \vec{U}) v_n + (p - p_\infty) \vec{n}] dS = -\vec{W}.$$

Нека повърхността  $S_B$  има формата на паралелепипед с ширина, равна на единица, и стени  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  и  $y = \pm y_0$ . При  $y \rightarrow \infty$  на горната и долната стена ще се удовлетворяват условията  $\vec{v} \rightarrow \vec{U}$ ,  $p \rightarrow p_\infty$ , затова в (4.39) остават интеграли само върху две от стените. Да проектираме уравнението (4.39) върху оста  $Ox$ :

$$(4.40) \quad \int_{-\infty}^{\infty} [\rho (u - U) u + p - p_\infty]_{x_1}^{x_2} dy = -W_x.$$

Навсякъде на повърхността  $S_B$  извън следата можем да считаме, че течението е потенциално. Затова налягането се намира от интеграла на Бернули (1.68) и подинтегралната функция в (4.40) добива вида

$$\frac{1}{2} \rho [(u - U)^2 - v^2]_{x_1}^{x_2}.$$

Оттук следва, че приносът на интеграла върху частта от повърхността  $S_B$  в (4.40), която е извън следата, ще намалява като величина от втори порядък с отдалечаването на  $S_B$ .

В приближение на граничния слой налягането в него може да се счита постоянно, затова

$$(4.41) \quad -W_x = \int_{-\infty}^{\infty} \rho (u - U) U dy.$$

Като се вземе предвид асимптотичният характер на граничния слой интегрирането може да се разпространи по цялата ос  $y$ .

Да заместим решението (4.37) в (4.41). Получаваме уравнение, от което определяме  $B$ :

$$B = W_x \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu}} \frac{1}{\rho U}.$$

По такъв начин разпределението на скоростта в ламинарно течение в следа има вида

$$(4.42) \quad u = U \left[ 1 - \frac{W_x}{\rho U^2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{1}{4} \frac{y^2 U}{\nu x} \right) \right],$$

където  $W_x$  е съпротивлението, което тялото изпитва. Това разпределение се достига асимптотично при отдалечаване от тялото.

За плоска пластина с дължина  $L$  от решението на Блазиус имаме:

$$W_x = \frac{1}{2} \rho U^2 c_L 2L = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}} \rho U^2 L.$$

Тогава от (4.42) намираме разпределението на скоростта в следа зад плоска пластина:

$$u = U \left[ 1 - \frac{0.664}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{L}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{y^2 U}{4\nu x} \right) \right].$$

Това разпределение на скоростта е валидно зад пластина на разстояние  $x > 3L$ .

Решението (4.42) се обобщава лесно за ососиметричния случай. Уравнението за  $u_1$  получаваме от (4.19) при  $j=1$ :

$$(4.43) \quad U \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\nu}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).$$

Граничните условия (4.36) се запазват. Граничната задача (4.43), (4.36) има автомоделно решение

$$(4.44) \quad u_1 = \frac{B}{x} e^{-\frac{1}{4} \eta^2}.$$

За определяне на константата  $B$  използваме уравнението за запазване на количеството на движението при ососиметрични течения:

$$-W_x = 2\pi \int_0^{\infty} \rho(u-U) U y dy.$$

Оттук, като използваме (4.44), намираме

$$B = \frac{W_x}{4\pi\mu}.$$

Така разпределението на скоростта в далечна ососиметрична следа се дава с формулата

$$(4.45) \quad u = U \left[ 1 - \frac{W_x}{4\pi\mu U x} \exp\left(-\frac{y^2 U}{4\nu x}\right) \right].$$

Простите решения (4.42) и (4.45) имат главно теоретично значение, защото този вид течения са силно неустойчиви и лесно преминават в турбулентен режим дори при сравнително неголеми числа на Рейнолдс.

Да разгледаме сега нелинейната система уравнения на граничния слой (4.19), отнасяща се за плоски и ососиметрични течения, както и автомоделните решения на тези уравнения при постоянно налягане, които имат следния вид:

$$(4.46) \quad \begin{aligned} \Psi &= Bx^\beta f(\eta), \quad \eta = Ax^\alpha y, \\ y^j u &= \Psi_y = ABx^{\alpha+\beta} f', \\ y^j v &= -\Psi_x = -Bx^{\beta-1} (\beta f + \alpha \eta f'). \end{aligned}$$

Тук  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  засега са неопределени константи, които се определят така, че да съществува автомоделно решение и съответната гранична задача да има възможно най-прост вид. След заместване на (4.46) в (4.19) получаваме следното уравнение:

$$\begin{aligned} Q\eta^j (f'' - j\eta^{-1}f') &= (\alpha + \beta)f'^2 - \beta f f'' + j\eta^{-1}f'(\beta f + \alpha \eta f'), \\ Q &= \nu B^{-1} A^{1-j} x^{1-\beta+\alpha(1-j)}. \end{aligned}$$

Тогава условието за съществуване на автомоделно решение има вида

$$(4.47) \quad \beta = 1 + \alpha(1-j).$$

Удобно е да се приеме следното условие за нормировка:

$$(4.48) \quad \nu A^{1-j} B^{-1} = \beta.$$

Така за автомоделните решения се получава уравнението

$$(4.49) \quad \begin{aligned} \eta^j (f'' - j\eta^{-1}f')' &= -ff'' + \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) f'^2 + j\eta^{-1}f' \times \\ &\times \left(f + \frac{\alpha}{\beta} \eta f'\right). \end{aligned}$$

Това уравнение дава възможност да се изследват много течения, спецификата на всяко от които се задава чрез граничните условия и стойността на  $\alpha$ .



**Потопена струя.** Трябва да се намери движението на струя течност, изтичаща от края на тънка тръба в неограничено пространство, запълнено със същата течност.

При струйното течение на хомогенен флуид се удовлетворява условието за симетрия относно  $y=0$  и условието за затихване на скоростта на безкрайност

$$(4.50) \quad \begin{aligned} v &= 0, \quad y = 0, \\ u &\rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

След като умножим първото уравнение на (4.19) с  $y^j$ , интегрираме по  $y$ , вземем предвид (4.49) и условието за симетрия, получаваме

$$\int_0^{\infty} y^j u^2 dy = J.$$

Величината  $J$  характеризира импулса на струята и трябва да се счита за зададена константа. Условието за постоянство на импулса налага определено ограничение на автомоделното решение (4.46), а именно:

$$(4.51) \quad B^2 A^{1+j} x^{2\beta+\alpha(1+j)} \int_0^{\infty} \eta^{-j} f'^2 d\eta = J.$$

Оттук следва

$$(4.52) \quad 2\beta + \alpha(1+j) = 0.$$

Като решим системата уравнения (4.47) и (4.52) относно  $\alpha$  и  $\beta$ , намираме

$$(4.53) \quad \alpha = -\frac{2}{3-j}, \quad \beta = \frac{1+j}{3-j}.$$

В случая на плоска струя  $j=0$ ,  $\alpha = -\frac{2}{3}$ ,  $\beta = \frac{1}{3}$ . Наред с условията (4.50) като гранично условие приемаме и условието за симетричност на скоростта  $u$  относно оста  $y=0$ . Така получаваме следната гранична задача (Г. Шлихтинг, 1933 г.; У. Бикли, 1939 г.)

$$(4.54) \quad \begin{aligned} f''' + ff'' + f'^2 &= 0, \\ f &= 0, \quad f'' = 0, \quad \eta = 0, \\ f' &\rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

След двукратно интегриране получаваме

$$f' + \frac{1}{2} f^2 = q^2.$$

Без ограничение на общността може да положим  $q = \frac{1}{2}$ . Това уравнение има следното решение:

$$f = \operatorname{th} \xi, \quad \xi = \frac{1}{2} \eta.$$

Сега можем да намерим разпределението на скоростта

$$(4.55) \quad u = \frac{1}{2} ABx^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi}$$

и дебита на течността в струята

$$(4.56) \quad Q = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u dy = 2\rho Bx^{\frac{1}{3}}.$$

Константите  $A$  и  $B$  определяме от (4.48) и (4.51), като използваме намереното разпределение на скоростта:

$$A = \left( \frac{1}{3\nu^2} J \right)^{\frac{1}{3}}, \quad B = (9J\nu)^{\frac{1}{3}}.$$

От полученото решение (4.55), (4.56) следва, че в началното сечение  $x=0$  ширината на струята е равна на нула и че в това сечение няма поток на маса. Количеството течност, което е въввлечено в движението на струята, расте с отдалечаване от началото на струята. По такъв начин решението (4.55) съответствува на източник на импулс, а не на маса. Експериментите със струи, изтичащи от малки отвори, показват, че има пълно съответствие между теорията и експеримента след известно разстояние от началото на струята.

Течение, на което профилът на скоростта има вида (4.55), е неустойчиво и ламинарният режим на движение се сменя с турбулентен при малки стойности на числото на Рейнолдс.

В случая на ососиметрична струя  $j=1$ ,  $\alpha=-1$ ,  $\beta=1$ . Ще изискваме върху оста на струята компонентата на скоростта  $v$  да бъде равна на нула, а компонентата  $u$  да бъде крайна. Тогава се получава следната гранична задача (Г. Шлихтинг, 1933 г):

$$(4.57) \quad \begin{aligned} \eta (f'' - \eta^{-1} f')' + f f''' - \eta^{-1} f' (f - \eta f') &= 0, \\ f=0, f'=0, \eta &= 0, \\ f' \rightarrow 0, \eta &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

След като разделим на  $\eta$ , уравнението (4.57) може да се интегрира веднъж. Като вземем предвид граничните условия, намираме

$$f f' = f' - \eta f''.$$

Като решим това уравнение, използвайки граничните условия в (4.57), получаваме

$$f = \frac{\eta^2}{1 + \frac{1}{4} \eta^2}.$$

Тогава намираме разпределението на скоростта в струята

$$(4.58) \quad u = \frac{2A^2B}{x \left(1 + \frac{1}{4} \eta^2\right)^2}$$

и разхода на флуида през произволно сечение

$$Q = 2\pi \int_0^\infty u y dy = 8\pi B x.$$

Константите  $A$  и  $B$  намираме от (4.58), (4.51) при  $j=1$ :

$$A = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{J}{\nu^2}}, \quad B = \nu.$$

Дебитът на течността е равен на нула в началното сечение (източник на импулс) и не зависи от величината на импулса в противоположност на случая на плоска струя. Величината на импулса оказва влияние на размера на струята — с увеличаване на импулса  $J$  струята става все по-тънка.

Решението (4.58) съвпада с точното решение на уравненията на Навие—Стокс (2.108) при големи стойности на импулса и малки стойности на ъгъла  $\theta$ .

**Слой на смесване.** Нека в началното сечение  $x=0$  два плоско паралелни потока се движат с различни скорости  $U_1$  и  $U_2$ . Тогава в потока се образува слой на смесване, който може да се опише чрез уравненията на граничния слой (Р. Лок, 1951 г.). Граничните условия в този случай трябва да описват плавния преход към равномерно течение с отдалечаване от равнината  $y=0$ :

$$(4.59) \quad \begin{aligned} u &\rightarrow U_1, \quad y \rightarrow \infty, \\ u &\rightarrow U_2, \quad y \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

За да се съгласува автомобилното решение (4.46) с тези условия, трябва да бъде изпълнено равенството

$$ABx^{\alpha+\beta} = U_1.$$

Следователно

$$(4.60) \quad AB = U_1, \quad \alpha + \beta = 0.$$

Като решим съвместно (4.47), (4.48) и (4.60), намираме

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2},$$

$$A = \sqrt{\frac{U_1}{2\nu}}, \quad B = \sqrt{2\nu U_1}.$$

Така за определянето на  $f(\eta)$  от (4.49), (4.59) получаваме граничната задача

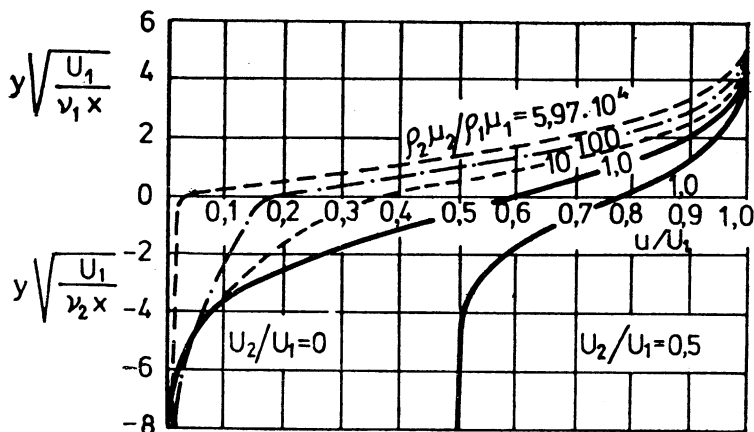
(4.61)

$$f''' + ff'' = 0,$$

$$f' \rightarrow 1, \eta \rightarrow \infty,$$

$$f' \rightarrow \frac{U_2}{U_1}, \eta \rightarrow -\infty.$$

Тази задача се решава числено за различни стойности на отношението  $\frac{U_2}{U_1}$ .



Фиг. 24

По подобен начин може да се изследва смесването на два еднородни потока с различни физически свойства  $\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$ . Решението се търси поотделно във всяка полуравнина  $y > 0$  и  $y < 0$ , като константите при интегрирането се определят така, че скоростите и тангенциалните напрежения на двете страни да са равни:

$$u_1 = u_2, \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}, y = 0.$$

Оказва се, че решението зависи от параметрите  $U_2/U_1$  и  $\left(\frac{\rho_2 \mu_2}{\rho_1 \mu_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ . На фиг. 24 са дадени профилите на скоростта за няколко варианта.

**Граничен слой, породен от действието на тангенциално напрежение (В. Я. Шкадов, 1970 г.).** Нека върху повърхността на дадена течност действа тангенциалната сила  $\tau(x)$ . Тогава слойът в непосредствена близост до повърхността под действието на тази сила започва да се движи. Да допуснем, че течността заема областта  $x > 0, y \leq 0$  и че тангенциалната сила се изменя по степен-

ния закон  $\tau = T \cdot x'$ . Тогава автомоделното решение (4.46) при  $j=0$  трябва да удовлетворява условието

$$\tau = \mu B A^2 x^{1+3\alpha} f''(0).$$

Оттук намираме

$$(4.62) \quad \mu B A^2 f''(0) = T,$$

$$\alpha = \frac{1}{3}(\gamma - 1).$$

Полагаме  $f''(0) = 1$ . Тогава получаваме следната гранична задача:

$$(4.63) \quad \begin{aligned} f''' + f f'' - \left(1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right) f'^2 &= 0, \\ f &= 0, \quad f'' = 1, \quad \eta = 0, \\ f' &\rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Уравнението (4.63) се получава от (4.49) при  $j=0$ , а граничните условия изразяват условието за непроницаемост на повърхността  $\eta=0$  и затихване на движението с отдалечаване от нея.

Като решим съвместно (4.47), (4.48), (4.62), намираме нормиращите множители

$$A = \left[ \frac{T(1+\alpha)}{\rho v^2} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad B = \frac{v}{1+\alpha} A.$$

Решението е определено напълно, ако са зададени величините  $T$  и  $\gamma$ . От (4.46) получаваме профила на скоростта.

Граничната задача се решава числено. При  $\alpha = -\frac{2}{5}$  триенето намалява по направление на повърхността, както  $x^{-\frac{1}{5}}$ ; при  $\alpha = -\frac{1}{3}$  триенето остава постоянно и при  $\alpha = -\frac{1}{4}$  — расте, както  $x^{\frac{1}{4}}$ . Във всички тези варианти  $f'(0) \approx 1$ , затова скоростта на повърхността е равна на

$$U = A B x^{1+2\alpha}.$$

Безразмерната дебелина на граничния слой е приблизително  $\delta \approx 5$ .

### 4.2.3. Обобщение на понятието автомоделност

Разгледаните досега автомоделни решения на уравнения (4.27) се отнасят за частния случай, когато скоростта на външния поток  $U(x)$  е степенна функция на  $x$ . Тогава решенията на уравненията на граничния слой се определят от един параметър  $p_1 = \frac{U'x}{U}$ , който е константа в цялото флуидно течение. При обтичане на крайни тела скоростта  $U(x)$  е по-сложна функция и параметърът

$p_1$  зависи от  $x$  в граничния слой. В този случай може да се построи многопараметрично решение.

Да въведем безразмерните параметри  $p_i$  посредством производните на  $U(x)$ , както следва:

$$(4.64) \quad p_i = \frac{U^{(i)} x^i}{U}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Лесно се вижда, че тези диференциални параметри са свързани посредством рекурентните съотношения

$$(4.65) \quad x \frac{dp_i}{dx} = i p_i - p_1 p_i + p_{i+1}.$$

Да въведем функцията  $f$  на променливите  $\eta, p_1, p_2, \dots$

$$f = f(\eta, p_i),$$

която удовлетворява следното уравнение (В. Я. Шкадов, 1962 г.):

$$(4.66) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + p_1 \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} (m p_m - p_m p_1 + p_{m+1}) \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial p_m \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right).$$

Ако в пространството на променливите  $p_i$  се зададе параметрично някаква крива с помощта на функцията  $U(x)$  и съотношенията (4.64), то поради рекурентните връзки (4.65) дясната страна на уравнението (4.66) се преобразува в израза

$$x \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right).$$

Следователно върху тази крива уравнението (4.66) съвпада с уравнението на граничния слой (4.24). Да зададем още и гранични условия за функцията  $f(\eta, p_i)$ :

$$(4.67) \quad f = 0, \quad f_\eta = 0, \quad \eta = 0, \\ f_\eta \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Тогаво граничната задача (4.66), (4.67) определя всички възможни решения на уравненията на граничния слой.

Уравненията (4.66) са универсални уравнения на граничния слой. Ако в някаква област на променливите  $p_m$  е построено решение на (4.66), (4.67), то може да се прилага за разчет на граничния слой около всяко тяло. Състоянието (характеристиките) на граничния слой в кое да е сечение  $x$  се определя напълно от стойностите на параметрите  $p_m$  в това сечение. Параметрите  $p_m$  могат да се нарекат локални параметри на подобие. За дадена функция  $U(x)$  те се пресмятат по формулите (4.64) при условие, че съответните производни съществуват. Когато  $p_m = 0$ , задачата (4.66), (4.67) се свежда до задачата на Блазиус за граничния слой върху пластина. При  $p_1 = 1$  и  $p_i = 0$  ( $i \geq 2$ ) получаваме задачата за граничен слой в окол-

ността на критичната точка на закръглено тяло. Накрая ще обърнем внимание, че когато  $U(x)$  е степенна функция, всички множители  $m p_m - p_1 p_m + p_{m+1}$  в дясната страна на уравнението (4.66) са равни на нула и се свежда до уравнение (4.27) на автомоделните решения.

### § 4.3. ГРАНИЧЕН СЛОЙ С ГРАДИЕНТ НА НАЛЯГАНЕТО

Във връзка с голямото практическо значение на задачите за граничен слой с градиент на налягането са разработени различни подходи за тяхното решаване. Днес има принципна възможност за числено решаване на системата (4.14) при произволно зададена функция  $U(x)$ . Недостатък на този начин за решаване е неговата комплицираност и това, че въз основа на числените резултати трудно се правят заключения за влиянието на отделните параметри. Затова се използват и приближени методи, които дават възможност да се извърши пълен анализ на полученото решение.

#### 4.3.1. Разлагане в ред

Нека скоростта на външното невискозно течение е зададена посредством разлагането

$$(4.68) \quad U(x) = x(1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots).$$

Това разпределение на скоростта съответствува на обтичането на закръглено симетрично тяло; координатата  $x$  се отчита от критичната точка. Решението на уравнението (4.24) ще търсим във вид на степенен ред (Г. Блазиус, 1908 г.; Л. Хоуърт, 1935 г.):

$$(4.69) \quad f = f_0 + a_2 f_{20} x^2 + (a_4 f_{40} + a_2^2 f_{42}) x^4 + \dots$$

Коефициентите  $f_{ki}$  на реда (4.69) са функции на  $\eta$ . Като заместим (4.69) в уравнението (4.24) и приравним на нула изразите пред различните степени на  $x$ , ще получим следните уравнения за коефициентите:

$$(4.70) \quad \begin{aligned} f_0''' + f_0 f_0'' - f_0^2 + 1 &= 0, \\ f_{20}'' + f_0 f_{20}'' + 3f_0'' f_{20} - 4f_0' f_{20}' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

и т. н. От (4.25) следва, че неизвестните функции  $f_{ki}(\eta)$  трябва да удовлетворяват и граничните условия

$$(4.71) \quad \begin{aligned} f_{ki} &= 0, \quad f_{ki}' = 0, \quad \eta = 0, \\ f_0' &\rightarrow 1, \quad f_{ki}' \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Граничните задачи (4.70), (4.71) образуват рекурентна система, която може да бъде интегрирана числено. Функцията  $f_0(\eta)$  се определя независимо от другите. Функциите, които са с ниво  $k > 1$ , се определят след намиране на всички функции от първите  $k-1$  нива.

Като се използват таблиците за числените стойности на функциите  $f_{ki}(\eta)$ ,  $f'_{ki}(\eta)$ ,  $f''_{ki}(\eta)$ , лесно се изчисляват профилите на скоростта в различните сечения  $x$  и триенето върху повърхността на обтичаното тяло.

Да разгледаме граничен слой върху кръгов цилиндър. Разпределението на скоростта върху повърхността на кръгов цилиндър при потенциалното му обтичане от равномерен поток има вида

$$(4.72) \quad U = 2 \sin x.$$

Разлагайки в ред по степените на  $x$ , получаваме разпределението (4.68) с коефициенти  $a_{2k} = (-1)^k \frac{2}{(2k+1)!}$ . На фиг. 25 са показани профилите на скоростта в различни сечения. Изчисленията в (4.69) са извършени, като са взети членовете до  $x^{10}$ . За сравнение са дадени и резултати от преки числени решения на уравненията на граничния слой (В. Шьонауер, 1964 г.). В точката  $x_*$ , която съответствува на ъгъла  $\varphi = 108,8^\circ$ , триенето се анулира и възниква откъсване на граничния слой. Решението (4.69) в околността на точката  $x_*$  забележимо се различава от по-точното числено решение. Поради откъсване на потока картината на обтичането на цилиндъра се променя значително и не съответствува на модела на потенциалното течение, в което няма откъсване на потока, и въз основа на това е получено разпределението на външната скорост (4.72). Съответствието на разчетите с реалните течения се подобрява, ако вместо функцията (4.72) се вземе функцията  $U(x)$ , съответстваща на обтичане с откъсване на потока от цилиндъра. Тя може да се намери въз основа на измервания на налягането върху тялото. Експериментално е била получена следната формула (К. Хименц, 1911 г.):

$$U(x) = 7,151x - 0,04497x^3 - 0,00033x^5.$$

Като се използва тази формула, от решението (4.69) се получава, че точката на откъсване на потока е при  $\varphi = 82^\circ$ , което се съгласува по-добре с опита. По какъвто и начин да се намери функцията  $U(x)$  обаче, точността на полученото решение (4.69) в близка околност на точката на откъсване намалява. С приближаване до точката на откъсване степенните разлагания (4.69) стават разходящи.

Нека за скоростта  $U(x)$  е в сила разложението

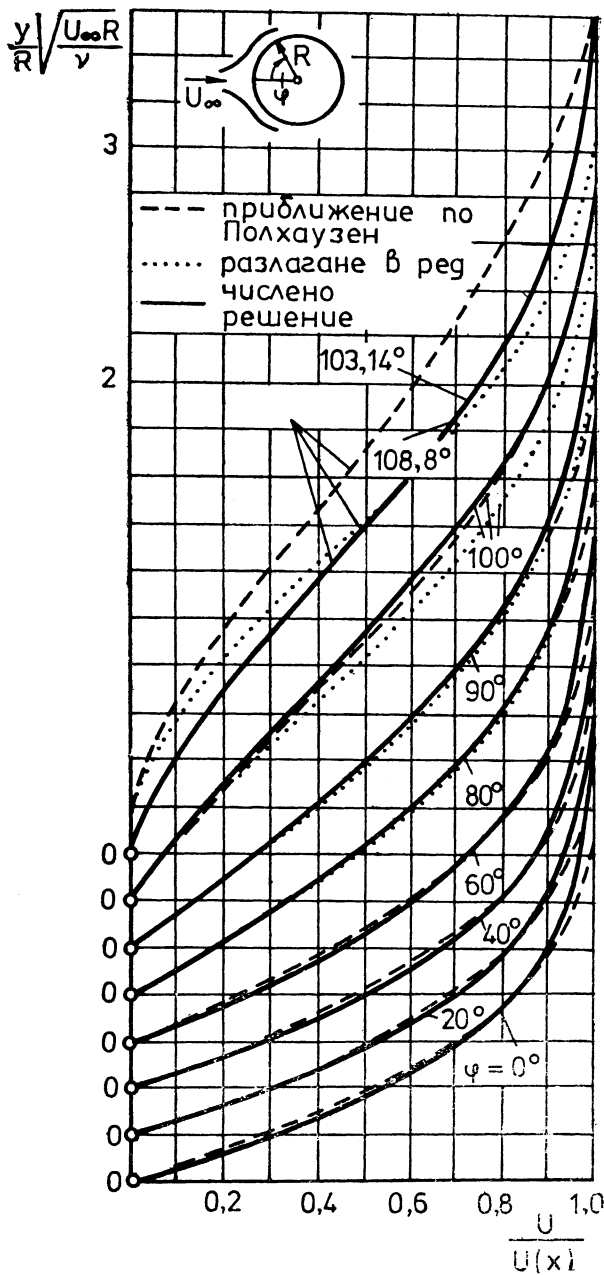
$$(4.73) \quad U(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

В този случай съответното обтичано тяло има остър преден край. Решението на задачата за граничния слой по аналогия с (4.69) се търси във вид на ред (Л. Хоуърт, 1938 г.):

$$(4.74) \quad f = \varphi_0 + a_1 \varphi_{10} x + (a_2 \varphi_{20} + a_1^2 \varphi_{21}) x^2 + \dots$$

За коефициентите на  $\varphi_{ki}$  от (4.24) се получава рекурентната система





Фиг. 25

$$(4.75) \quad \varphi_0''' + \frac{1}{2} \varphi_0 \varphi_0'' = 0,$$

$$\varphi_{10}''' + \frac{1}{2} \varphi_0 \varphi_{10}'' - \varphi_0' \varphi_{10}' + \frac{3}{2} \varphi_0'' \varphi_{10} = -1 + \varphi_0'^2 - \frac{1}{2} \varphi_0 \varphi_0''$$

и т. н. Граничните условия (4.71) се запазват. Уравненията (4.75) са интегрирани и за функциите  $\varphi_{ki}(\eta)$  са съставени таблици.

Да разгледаме частния случай на разпространение на скоростта от вида (4.73)

$$U(x) = 1 - x.$$

Изчисленията за триенето върху повърхността с използване на решение (4.74) води до извода, че при  $x \approx 0,12$  възниква точка на откъсване. Както при граничен слой около закръглено тяло, решението (4.74) е разходящо при доближаване до точката на откъсване.

Наред с решенията (4.69) и (4.74) може да се построи решение на задачата за граничния слой по метода на разлагане по параметрите  $p_i$ :

$$(4.76) \quad f = F_0 + p_1 F_{10} + (p_2 F_{20} + p_1^2 F_{21}) + \dots$$

Като заместим (4.76) в универсалното уравнение (4.66) и приравним на нула изразите при различните комбинации  $p_i$ , ще получим безкрайна рекурентна система от обикновени диференциални уравнения. Численото интегриране на тези уравнения с граничните условия (4.71) определя функциите  $F_{ki}(\eta)$ .

Има по-прост начин за намиране на тези коефициенти. Да използваме обстоятелството, че в частния случай, когато скоростта  $U(x)$  е зададена чрез разлагането (4.73), решението за  $f$  се разлага също в реда (4.74). По такъв начин решенията (4.74) и (4.76) трябва да бъдат еквивалентни и да се преобразуват едно в друго.

Наистина лесно е да се покаже, че са удовлетворени следните съотношения, в които сме се ограничили само с първите три разлагания:

$$(4.77) \quad \begin{aligned} a_1 x &= \frac{1}{d} \left( p_1 - \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{6} p_3 \right), \\ a_2 x^2 &= \frac{1}{d} \left( \frac{1}{2} p_2 - \frac{1}{2} p_3 \right), \\ a_3 x^3 &= \frac{1}{d} \frac{1}{6} p_3, \quad d = 1 - p_1 + \frac{1}{2} p_2 - \frac{1}{6} p_3. \end{aligned}$$

Да заместим (4.77) в решението (4.74) и да запишем резултата във вид на разлагане по параметрите  $p_i$ . Като сравним това разлагане с (4.76), получаваме връзката между функциите  $\varphi_{ki}$ ,  $F_{ki}$ , които позволяват да се пресметнат  $F_{ki}$ , ако са известни  $\varphi_{ki}$ .

За триенето върху стената се получава следният израз:

$$\frac{\tau}{pU^2} \sqrt{\frac{Ux}{v}} = 0,3206 + 8 \cdot 0,1929 p_1 - 8^2 (0,03129 p_1^2 + 0,06318 p_2) + \\ + 8^3 (0,01244 p_1^3 + 0,00132 p_1 p_2 + 0,00008 p_3).$$

Решението (4.76) е приложимо за всяка функция  $U(x)$ , която е диференцируема достатъчен брой пъти. В това се състои различието на решение (4.76) от решение (4.74), което съществува само в случая, когато  $U(x)$  се разлага в ред (4.73).

### 4.3.2. Метод на интегралните съотношения

В много от приложенията на теорията на граничния слой е достатъчно да се ограничим само с приближени стойности на търсените величини.

Чрез метода на интегралните съотношения се избягват дългите пресмятания, необходими при методите на разлагане в ред и резултатите получаваме бързо и в компактна форма.

Нека  $\delta(x)$  е дебелината на граничния слой, която се определя от условието  $|u(x, \delta) - U(x)| < \epsilon$ , където  $\epsilon$  е малка величина. Поради асимптотичния характер на  $u(x, y)$  при  $y \rightarrow \infty$  с увеличаване на  $y$  производните  $\frac{\partial^k u(x, y)}{\partial y^k}$  намаляват и при  $y = \delta(x)$  могат да се приравнят на нула.

Да интегрираме по  $y$  първото уравнение, на (4.14). Отчитайки асимптотичните свойства на граничния слой, ще получим интегралното съотношение (Т. Карман, 1921 г.)

$$(4.78) \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy = UU' \delta - \nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

Ако преди интегрирането на уравнение (4.14) предварително го умножим по  $u^k$ , получава се множество от други съотношения, които са обобщение на интегралното съотношение (4.78) — (Л. С. Лейбензон, 1935 г.; В. В. Голубьов, 1936 г.).

Да запишем интегрирането в (4.78) като интегриране по целия асимптотичен граничен слой. За целта да въведем величината  $q(x, y) = U(x) - u(x, y)$ ; тогава  $u = U - q$  и уравнението (4.78) може да се запише така:

$$(4.79) \quad U \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} q dy + 2U' \int_0^{\infty} q dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} q^2 dy = \nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

Да въведем дебелина на изместване  $\delta_1$  и дебелина на зазуба на импулса  $\delta_2$ , както при граничен слой върху пластина:

$$U\delta_1 = \int_0^{\infty} q dy, \quad U^2\delta_2 = \int_0^{\infty} u q dy.$$

Като се използват тези величини, уравнението (4.79) добива следния окончателен вид (Л. Прантъл, 1921 г.):

$$(4.80) \quad \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{U'}{U} (2\delta_2 + \delta_1) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}.$$

Нека  $y = \eta\delta$ ,  $u = Uf(\eta)$ . Използвайки изходните уравнения (4.14) и асимптотичното поведение на величините, с отдалечаването от стената за профила на скоростта  $f(\eta)$  намираме следните гранични условия:

$$(4.81) \quad \begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f''(0) = -\lambda, \quad f'''(0) = 0, \dots \\ f(1) &= 1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 0, \dots \end{aligned}$$

Оттук правим извода, че профилът трябва да зависи от безразмерната величина  $\lambda = \delta^2 U' v^{-1}$ . Ако е известен конкретният вид на профила  $f(\eta)$ , лесно се пресмятат величините, които участвуват в уравнението (4.80):

$$(4.82) \quad \begin{aligned} \frac{\tau_w}{\rho U^2} &= \frac{v}{U\delta} f'(0) = \frac{v}{U\delta} \Phi_0(\lambda), \\ \delta_1 &= \delta \int_0^1 (1-f) d\eta = \delta \Phi_1(\lambda), \\ \delta_2 &= \delta \int_0^1 f(1-f) d\eta = \delta \Phi_2(\lambda). \end{aligned}$$

Да запишем уравнението (4.80) така, че в него да участва в явен вид функцията  $\delta(x)$ . Да направим смяна на променливите (К. Полхаузен, 1921 г.) съгласно формулите (4.82) и полагането

$$z = \delta^2 v^{-1}, \quad \lambda = zU'.$$

Тогава

$$(4.83) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} U \frac{dz}{dx} &= g(\lambda) + \frac{U''U}{U'^2} \lambda^2 h(\lambda), \\ g(\lambda) &= [\lambda(\Phi_1 + 2\Phi_2) - \Phi_0] [\Phi_2 + 2\lambda\Phi_2']^{-1}, \\ h(\lambda) &= \Phi_2' (\Phi_2 + 2\lambda\Phi_2')^{-1}. \end{aligned}$$

Обикновеното диференциално уравнение (4.83) за  $z(x)$  се интегрира числено, ако е зададена начална стойност  $z(0)$ . Като намерим  $z(x)$ , изчисляваме  $\delta(x)$ , а след това и всички други характеристики на граничния слой.

Уравнението (4.83) съдържа втора производна  $U''$ , което представлява определено неудобство особено когато функцията  $U(x)$  е получена експериментално. Да умножим уравнението (4.80) с  $U\delta_2 v^{-1}$  и да го запишем в следния вид (Х. Холщейн, Т. Болен, 1940 г.):

$$(4.84) \quad \frac{1}{2} U \frac{dz}{dx} = -(2+H)x + T,$$

$$\bar{z} = \delta_2^2 v^{-1}, \quad \kappa = \bar{z} U',$$

(4.85)

$$H(\lambda) = \Phi_1(\lambda) [\Phi_2(\lambda)]^{-1},$$

$$T(\lambda) = \Phi_0(\lambda) \Phi_2(\lambda).$$

Връзката между параметрите  $\kappa$  и  $\lambda$ , която се намира въз основа на техните определения, има вида

(4.86)

$$\kappa = \lambda [\Phi_2(\lambda)]^2.$$

Тази формула определя неявната функция  $\lambda = \lambda(\kappa)$ , която не зависи от конкретния граничен слой.

По такъв начин получихме диференциалното уравнение (4.84) за определяне на  $\bar{z}(\kappa)$ . Това уравнение трябва да се решава съвместно с (4.85).

Да разгледаме някои приложения на метода на интегралните съотношения.

По метода на Полхаузен да зададем профила на скоростта като полином от четвърта степен:

(4.87)

$$f = 1 - (1 - \eta)^3 \left( 1 + \frac{6 - \lambda}{\lambda} \eta \right).$$

Този профил удовлетворява двете първи условия (4.81) при  $\eta = 0$  и първите три условия при  $\eta = 1$ . След прости пресмятания получаваме

(4.88)

$$\Phi_0 = 2 + \frac{1}{6} \lambda,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{120} (36 - \lambda),$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{315} \left( 37 - \frac{1}{3} \lambda - \frac{5}{144} \lambda^2 \right).$$

Ако численото решение започва от критичната точка, за която  $U = 0$ , то за да се изключи особеността, трябва да се избера  $z(0)$  и  $\lambda_0$  така, че  $g(\lambda_0) = 0$ , т. е.

$$\lambda^3 + 47,4\lambda^2 - 1670,4\lambda + 9072 = 0.$$

От трите реални корена на това уравнение най-подходящ е най-големият положителен корен  $\lambda_0 = 7,052$ . Следователно за дебелината на граничния слой в критичната точка на закръглено тяло получаваме

$$\delta_0 = 2,65 \sqrt{\frac{\nu}{U'_0}}.$$

Този израз може да се сравни с формулата  $\delta = 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{U'_0}}$ , получена посредством точното числено решение за граничния слой в критичната точка.

Численото решение се извършва до точката на откъсване, в която триенето  $\tau_w$  става равно на нула. От условието  $\Phi_0=0$  намираме  $\lambda=-12$ . Междинната стойност  $\lambda=0$  съответствува на точката, в която налягането е най-малко, т. е. в която  $U'=0$ .

Резултатите от пресмятанията по (4.83) в граничния слой около кръгов цилиндър с външна скорост (4.72) са представени на фиг. 25. Добро съответствие с по-точни решения има в областта на ускоряване на потока. В областта на забавяне — точността на интегралния метод намалява значително.

Съществува интересна възможност уравненията (4.84) да се интегрират в квадратури (А. Валц, 1941 г.; Н. Е. Кочин, Л. Г. Лойциански, 1942 г.). Като се използва съотношението (4.86), уравнението (4.84) може да се запише в следната еквивалентна форма:

$$\frac{1}{2} U \frac{d\bar{z}}{dx} = F(x).$$

Оказва се, че полиномният профил на скоростта  $F(x)$  може с голяма точност да се представи посредством линейната зависимост

$$F(x) = a - bx.$$

Ако се изисква отклонението да бъде най-малко в областта на ускоряване на потока, то за константите  $a$  и  $b$  се получава

$$a=0,47, \quad b=6.$$

Като заместим  $\bar{z}$  и  $x$  с техните изрази, от (4.84) получаваме следното диференциално уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{U \delta_2^2}{\nu} \right) = a - (b-1) \frac{U \delta_2^2}{\nu} \frac{1}{U} \frac{dU}{dx}.$$

Това уравнение има решение

$$(4.89) \quad \frac{U \delta_2^2}{\nu} = \frac{a}{U^{b-1}} \int_0^x U^{b-1} dx.$$

Във връзка с това, че методът на Полхаузен не отразява достатъчно добре картината на течението в областите, където налягането расте, са разработени и други приближени методи, които позволяват този недостатък до известна степен да се отстрани. Основната идея за подобряване на метода се състои в това, да се задава по-точно профилът на скоростта  $u(x, \eta)$ . За тази цел могат да се използват точни решения на уравненията на граничния слой. Семейството точни решения трябва да бъде съдържателно, а именно трябва да включва профили, които съответствуват най-добре на областта около точката на откъсване.

Нека е известно еднопараметрично семейство профили  $u = Uf(\xi, \eta)$ , където  $\xi$  е параметър. За това семейство могат да се изчислят  $H(\xi)$  и  $T(\xi)$  и да се намери връзката  $x = x(\xi)$  по формулите (4.85) и (4.86). Уравнението (4.84) позволява да се установи

зависимостта  $\xi = \xi(x)$  във всички точки от контура, ако е известна стойността на  $\xi$  в една каква да е точка.

Л. Хоуърт (1938 г.) е използвал за такъв метод решение, което съответствува на течение с линейно разпределение на външната скорост  $U = 1 - \xi$ . Н. Е. Кочин и Л. Г. Лойциански (1942 г.) са разработили метод, който се основава на използването на автомоделни решения при степенен закон на разпределение на скоростта

$$U = u_1 x^m, \quad \xi = \frac{2m}{m+1}.$$

#### § 4.4. ПРЕНОС НА ТОПЛИНА В ГРАНИЧЕН СЛОЙ

В съвременната аеродинамика на големите скорости определянето на силите на триене в редица случаи не е главна задача. Във връзка с отделянето на големи количества топлина и разработката на начини за топлинна защита изчисляването на топлинните потоци е извънредно важен проблем. За да добием представа за големината на характерните температури, да разгледаме невискозно течение на свършен газ. Тъй като при адиабатично течение е изпълнено съотношението

$$(4.90) \quad \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = c_p T,$$

от интеграла на Бернули следва

$$(4.91) \quad \frac{1}{2} U^2 + c_p T_\infty = c_p T_0,$$

където с  $U$ ,  $T_\infty$  и  $\rho$  са означени скоростта, температурата и плътността на външната граница на граничния слой, а с  $T_0$  — температурата в критичната точка на потока.

Величината  $\gamma \frac{p}{\rho}$  в свършен газ е равна на квадрата на скоростта на звука

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

Като използваме тази зависимост, от (4.90) и (4.91) намираме

$$(4.92) \quad T_0 = T_\infty \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right).$$

Параметърът  $M_\infty = \frac{U}{a}$  се нарича *число на Мах* и е най-важният безразмерен критерий за течения на газ с голяма скорост. От (4.92) следва, че при движението на тела във въздух при нормални атмосферни условия ( $T_\infty = 280^\circ \text{K}$ ) в зоните на адиабатично забавяне на движението локалната температура може рязко да се увеличи — при  $M_\infty = 5$  тази температурата е  $\approx 1500^\circ \text{K}$ .

#### 4.4.1. Уравнения на топлинния граничен слой

Да разгледаме общата система (1.49), (1.53), описваща движението на свиваем вискозен флуид, при който е взета предвид зависимостта на коефициентите на преноса от температурата. Както и в случая на несвиваема течност, въвеждаме ортогонална координатна система, свързана с тялото. Нека числото на Рейнолдс, което характеризира течението, е голямо —  $Re \gg 1$ . Тогава имаме следните оценки:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim 1, \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim Re^{-\frac{1}{2}}, \quad u \sim 1, \quad v \sim Re^{-\frac{1}{2}}.$$

Като оставим в уравненията (1.49), (1.53) само членовете от най-висок ред, намираме

$$(4.93) \quad \begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \rho \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \\ p &= R \rho T, \quad h = \int c_p dT. \end{aligned}$$

Ако заменим в уравнението на енергията градиента на налягането  $\frac{\partial p}{\partial x}$  с помощта на първото уравнение от (4.93) и въведем означението  $\Theta = h + \frac{1}{2} u^2$ , получаваме друг начин за записване на уравнението на енергията:

$$(4.94) \quad \rho \left( u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

Коефициентите  $k$  и  $\mu$  предполагаме, че зависят от температурата и са от един и същ ред. Числото на Прандтъл ( $Pr$ ), което се определя от равенството

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k},$$

предполагаме, че е постоянно. Този безразмерен критерий изразява съотношението на вискозните и топлинните процеси. За въздуха той е равен приблизително на 0,72.

Системата (4.93) съдържа като неизвестна функция температурата  $T$  (или енталпията  $h$ ), но вместо нея обикновено се използва величината  $\Theta$ . Уравнението за  $\Theta$  (или  $T$ ) е от втори ред по  $y$ , затова трябва да бъдат зададени две гранични условия.



Върху стевата се реализират различни топлинни режими, два от които са основни:

1) *топлоизолирана стена (задача за термометъра)*

$$(4.95) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \right), \quad y=0;$$

2) *стена със зададена температура (задача за теплообмена)*

$$(4.96) \quad T = T_w \quad (\Theta = \Theta_w), \quad y=0.$$

Далече от повърхността условието за асимптотичен преход във външния поток има вида

$$T \rightarrow T_{\infty} \quad (\Theta \rightarrow \Theta_{\infty}), \quad y \rightarrow \infty.$$

От (4.91) следва, че  $\Theta$  запазва по направление на токовите линии постоянна стойност, затова  $\Theta_{\infty} = \text{const}$ .

#### 4.4.2. Топлинен граничен слой в несвиваема течност

**Плоска пластина.** Ако течността е несвиваема, системата (4.93) се опростява. Особено прост резултат се получава при  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ,  $Pr = 1$ . В този случай уравнението за  $\Theta$  съвпада с уравнението за  $u$  и веднага може да се запише интегралът (Л. Кроко, 1932 г.)

$$\Theta = C_1 + C_2 u.$$

Константите  $C_1$  и  $C_2$  се определят от граничните условия.

В задачата за теплообмена получаваме решението

$$\frac{\Theta - \Theta_w}{\Theta_{\infty} - \Theta_w} = \frac{u}{U}.$$

Оттук следва, че топлинният и динамичният граничен слой са подобни и дебелините им  $\delta_T$  и  $\delta_u$  са еднакви. Ако  $Pr \neq 1$ , то от сравняването на членовете пред производните от по-висок ред в уравненията за  $\Theta$  и  $u$  получаваме оценката

$$\sqrt{Pr} \cdot \delta_T \approx \delta_u.$$

В задачата за термометъра получаваме решението

$$\Theta = \Theta_{\infty}.$$

Оттук следва, че температурата на стената е по-висока в сравнение с температурата на обтичащия поток и е равна на

$$T_w = T_{\infty} + \frac{1}{2c_p} U^2.$$

За да разгледаме обтичането на пластина в общия случай, когато  $Pr \neq 1$ , преминаваме към променливите  $\eta$  и  $f(\eta)$ :

$$(4.97) \quad \eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}.$$

$$u = U f'(\eta), \quad v = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U \nu}{x}} (\eta f' - f), \quad T = T(\eta).$$

Тогава функцията  $f(\eta)$ , удовлетворяваща уравнението на Блазиус (4.29), считаме за известна, а за  $T(\eta)$  получаваме уравнението (Е. Полхаузен, 1932 г.)

$$(4.98) \quad \frac{1}{Pr} T'' + \frac{1}{2} f T' + \frac{U^2}{c_p} (f'')^2 = 0.$$

Решението на линейното уравнение (4.98), което зависи от две произволни константи  $C_1$  и  $C_2$ , се записва във вида

$$(4.99) \quad T = C_1 + C_2 F_1(\eta; Pr) + \frac{U^2}{2c_p} F_2(\eta; Pr),$$

$$F_1(\eta; Pr) = \left[ \int_{\eta}^{\infty} (f'')^{Pr} d\eta \right] \left[ \int_0^{\infty} (f'')^{Pr} d\eta \right]^{-1},$$

$$F_2(\eta; Pr) = 2Pr \int_{\eta}^{\infty} (f'')^{Pr} \left[ \int_0^{\xi} (f'')^{2-Pr} d\eta \right] d\xi.$$

В задачата за термометъра решението има вида

$$T = T_{\infty} + \frac{1}{2c_p} U^2 F_2(\eta; Pr).$$

Определената оттук температура на стената се нарича *равновесна температура*, за която

$$(4.100) \quad T_e = T_{\infty} + \frac{U^2}{2c_p} b(Pr).$$

При  $Pr \approx 1$  може да се приеме  $b(Pr) = Pr^{\frac{1}{2}}$ . При големи стойности на  $Pr$  е в сила съотношението  $b(Pr) = 1,9 Pr^{\frac{1}{3}}$ . Точният вид на  $b(Pr)$  може във всеки случай да се получи посредством числено интегриране по формулите (4.99). Коефициентът  $b(Pr)$  се нарича *коэффициент на възстановяването*.

Ако е зададена температурата на стената  $T_w$ , от (4.99) намираме решението

$$T = T_{\infty} - (T_e - T_w) F_1 + \frac{U^2}{2c_p} F_2.$$

В този случай се извършва топлообмен между пластината и обкръжаващата я течност. За топлинния поток

$$(4.101) \quad q = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -k (T_w - T_e) F_1'(0; Pr) \sqrt{\frac{U}{\nu x}}.$$

Функцията на числото на Прантъл, участваща в тази формула, може да се апроксимира с голяма точност в интервала  $0,6 < Pr < 10$  по следния начин:

$$-F_1'(0; Pr) = 0,332 Pr^{\frac{1}{3}},$$

поради което за топлинния поток получаваме

$$(4.102) \quad q = 0,332 Pr^{\frac{1}{3}} k \sqrt{\frac{U}{\nu x}} (T_w - T_e).$$

Направлението на топлинния поток се определя от разликата между зададената и равновесната температура на стената. Ако  $T_w > T_e$ , то топлинният поток е насочен от стената към потока (охлаждане); ако  $T_w < T_e$ , то топлинният поток е насочен към стената (загряване). За да се поддържа постоянна температура  $T_w$ , в първия случай към стената трябва да се добавя външна топлина, а във втория — да се отнема топлина от нея.

Вместо топлинния поток често се използват безразмерни критерии — числото на Нуселт  $Nu$  и числото на Стантън  $St$ . Тези критерии се определят посредством съотношенията

$$(4.103) \quad q = Nu k \frac{T_w - T_e}{x},$$

$$q = St \rho c_p U (T_w - T_e).$$

Като заместим тези критерии за  $q$  във формулата (4.101), извеждаме следните зависимости между безразмерните критерии:

$$(4.104) \quad Nu = 0,332 Pr^{\frac{1}{3}} Re_x^{\frac{1}{2}},$$

$$St = 0,332 Pr^{-\frac{2}{3}} Re_x^{-\frac{1}{2}}.$$

Вземайки предвид, че съгласно (4.26) за плоска пластина

$$\frac{1}{2} c_f = 0,332 Re_x^{-\frac{1}{2}},$$

получаваме формулата

$$(4.105) \quad St = \frac{1}{2} c_f Pr^{-\frac{2}{3}}.$$

При  $Pr = 1$  от (4.105) получаваме  $St = \frac{1}{2} c_f$ .

Тази формула изразява дълбоката връзка между процесите на триене и топлообмена във флуидните течения, която се нарича *аналогия на Рейнолдс*. Ако е известен коефициентът на триене, като се използва аналогията на Рейнолдс, може да се пресметне топлообменът.

**Критична точка.** Значителен интерес за практическите приложения представлява топлообменът в околността на критичната точка на закръглено тяло.

Да изследваме автомоделно решение, като предполагаме, че скоростта и температурата във външното течение са дадени със степенен закон на изменение от общ вид

$$U = u_1 x^m, \quad T_\infty = T_w - T_1 x^n.$$

Да преминем в системата (4.93) по формулите (4.97) към безразмерни променливи, само че вместо  $T$  да разгледаме функцията

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}.$$

Тогава от (4.93), (4.97) за  $\vartheta(\eta)$  получаваме следната гранична задача (А. Фейдж, В. Фокнер, 1981 г.; С. Леви, 1952 г.):

$$(4.106) \quad -\frac{1}{\text{Pr}} \vartheta'' + \frac{1}{2} (m+1) f \vartheta' - n f' \vartheta = -\frac{u_1^2}{c_p T_1} x^{2m-n} f'^2,$$

$$(4.106) \quad \begin{aligned} \vartheta &= 1, \quad \eta = 0, \\ \vartheta &\rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Функцията  $f(\eta)$  не зависи от  $\vartheta(\eta)$  и се определя от решението на уравнението на Фокнер — Скен (4.34). Това означава, че в разглежданата постановка няма обратно влияние на топлообмена върху динамичния граничен слой.

Строго казано, автомоделно решение за температурата съществува само при  $n = 2m$ . Но поради това, че решението на (4.106) се разглежда в околността на точката  $x = 0$ , дясната страна в уравнението (4.106) е малка и може да се пренебрегне. Тогава решението на граничната задача (4.106) има смисъл да се разглежда за произволни  $m$  и  $n$  ( $2m - n > 0$ ).

Да въведем въз основа на съотношенията (4.97) и (4.103) *локалното число на Нуселт*

$$\text{Nu} = -\frac{x}{T_w - T_\infty} \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_{y=0} = -(\vartheta')_{\eta=0} \sqrt{\frac{U x}{\nu}}.$$

Производната  $\vartheta'(0)$  зависи от параметрите  $m$ ,  $n$ ,  $\text{Pr}$ . Въз основа на получените числени решения са съставени подробни таблици

за тази величина, които позволяват да се пресметне  $\text{Nu} \cdot \text{Re}^{-\frac{1}{2}}$  при дадени  $m$ ,  $n$  и  $\text{Pr}$ . По тези данни са построени също приближени аналитични зависимости. В частност за течение около критична точка ( $m = 1$ ) при постоянна температура на стената ( $n = 0$ ) са в сила асимптотичните формули

$$\text{Nu} \text{Re}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Pr}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Pr} \rightarrow 0,$$

$$\text{Nu} \text{Re}^{-\frac{1}{2}} = 0,661 \text{Pr}^{\frac{1}{3}}, \quad \text{Pr} \rightarrow \infty.$$

#### 4.4.3. Течение и топлообмен в граничен слой на свиваем флуид

При течение на свиваеми флуиди динамичната и топлинната задача не се разделят — не само полето на скоростта влияе върху топлообмена, но и обратно, топлообменът определя структурата на полето на скоростта.

Изследването на граничния слой в свиваем флуид се опростява съществено, ако се използват нови променливи, основен елемент на които е използването на интеграла от плътността вместо координатата  $y$ . Този преход позволява в пълна степен да се използва аналогията с граничен слой на несвиваем флуид (А. А. Дородницин, 1949 г.).

Да въведем независимите променливи  $\xi$ ,  $\eta$  и неизвестните функции  $f(\xi, \eta)$ ,  $\Theta(\xi, \eta)$  посредством съотношенията

$$(4.107) \quad \xi = \xi(x), \quad \eta = \left( \frac{U}{\sqrt{\rho_* \xi}} \right)^2 \int_0^y \frac{\rho}{\rho_*} dy,$$

$$\Psi = (U \sqrt{\rho_* \xi})^2 \rho_* f(\xi, \eta).$$

Компонентите на скоростта се изразяват чрез новите променливи по следния начин:

$$(4.108) \quad u = U \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$v = -\frac{\rho_*}{\rho} \sqrt{U \eta} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\xi} f + \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{\xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right].$$

Като запишем системата уравнения на граничния слой (4.93) посредством новите променливи (4.107), (4.108), получаваме две взаимосвързани уравнения:

$$(4.109) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{U' \xi}{U} \right) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{U' \xi}{U} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\xi}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} =$$

$$= \xi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{c}{\text{Pr}} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{U' \xi}{U} \right) f \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + U^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) c \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] =$$

$$= \xi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right).$$

Уравнението на енергията може да се запише също чрез функцията  $\Theta = h + \frac{1}{2} U^2 \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2$ . За целта трябва да се изключи градиентът на налягането с помощта на първото уравнение (4.109) или да се преобразува непосредствено (4.94). Така получаваме

$$(4.110) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{c}{Pr} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{U' \xi}{U} \right) f \frac{\partial h}{\partial \eta} + U^2 c \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)^2 + \\ + \frac{\xi}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} = \xi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right).$$

Тук са въведени означенията

$$c = \frac{\mu \rho}{\mu_* \rho_*} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1},$$

$U = U(\xi)$ , а  $\rho_*$ ,  $\rho_*$ ,  $\nu_*$  са постоянни характерни величини.

Въз основа на следствията от интеграла на Бернули (1.68) и дефиницията на  $\Theta$  намираме израз за члена, съдържащ градиента на налягането:

$$\frac{\xi}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} = - \frac{\xi U'}{U} \frac{\rho_\infty}{\rho} = - \frac{\xi U'}{U h_\infty} \left[ \Theta - \frac{1}{2} U^2 \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right].$$

В тези съотношения е използвано равенството

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \frac{T_\infty}{T},$$

което следва от обстоятелството, че налягането е едно и също във всяко сечение  $x$ .

Досега зависимостта  $\xi = \xi(x)$  не беше зададена. Да я определим чрез съотношението

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_*}.$$

Тогава за  $c$  получаваме

$$c = \frac{\mu \rho}{\mu_* \rho_*} \frac{\rho_*}{\rho} = \frac{\mu T_*}{\mu_* T}.$$

Сега уравненията (4.109) образуват затворена система уравнения за  $f$  и  $\Theta$ . Тази система е обобщение на уравнение (4.24), отнасящо се за несвиваем флуид. Влиянието на топлообмена на скоростното поле се проявява чрез коефициента  $c$  и плътността  $\rho$ , участващи в първото уравнение на (4.109). Уравнението (4.109) има най-прост вид, когато вискозността зависи линейно от температурата (тогава  $c=1$ ). В по-общия случай може приближено да се приеме  $\mu = aT$ , като константата  $a$  се избере така, че тази зависимост да бъде по-близка до точната формула на Сатерленд. При числения анализ може да се използва самата формула на Сатерленд.

Да обобщим за свиваем газ формулите (4.103) — (4.105) за безразмерните коефициенти, които характеризират течението на топлопrenoса в него:

$$(4.111) \quad \frac{1}{2} c_f Re_x^{\frac{1}{2}} = \frac{\rho_*^*}{\rho_\infty} \frac{\mu_w \rho_w}{\mu_* \rho_*} \left( \frac{x}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} f''(0),$$

$$StRe_x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pr} \frac{\rho_{\infty}}{\rho_w} \frac{\mu_w \rho_w}{\mu_{\infty} \rho_{\infty}} \left( \frac{x}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{h'(0)}{h_e - h_w},$$

$$Re_x = U x v_*^{-1}.$$

Тук предполагаме, че  $c_p = \text{const}$ ,  $Pr = \text{const}$ ,  $h_w \neq h_e$  и за коефициентите на триене се използва определения

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2 c_f = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Равновесната енталпия  $h_e$  се получава от решението за топлоизолирана стена (4.109). Вместо (4.111) удобно е да се прилага аналогията на Рейнолдс между преноса на количеството на движението и топлината:

$$St = \frac{1}{2s} c_f,$$

$$s = Pr f''(0) \frac{h_e - h_w}{h'(0)}.$$

Да разгледаме сега автомоделни решения на уравненията на граничен слой за свиваем газ. Нека скоростта на външния поток е зададена по степенен закон  $U = u_1 \xi^m$ . От (4.109) получаваме при  $\xi \rightarrow 0$  системата уравнения за автомоделните функции  $f(\eta)$ ,  $s(\eta) = (\theta - \theta_{\infty}) \theta_{\infty}^{-1}$ :

$$(4.112) \quad (cf'')' + \frac{1}{2} (1+m) f f'' + m \left( \frac{\rho_{\infty}}{\rho} - f'^2 \right) = 0,$$

$$\left( \frac{c}{Pr} S' \right)' + \frac{1}{2} (1+m) f S' + \frac{U^2}{\theta_{\infty}} \left[ \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) c f' f'' \right]' = 0.$$

Решенията на уравненията (4.112) трябва да удовлетворяват следните гранични условия:

$$(4.113) \quad f=0, f'=0, S=S_w (S'=0), \eta=0,$$

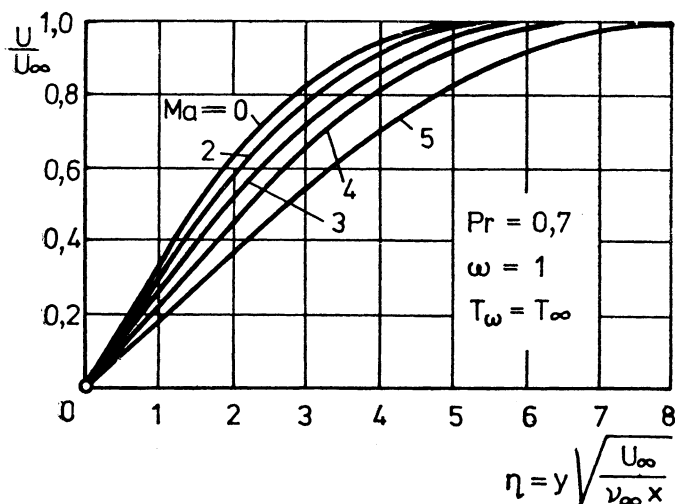
$$f' \rightarrow 1, S \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty.$$

Граничната задача (4.112), (4.113) включва най-важния за практиката случай за обтичане на пластина ( $m=0$ ) и течение около критична точка на закръглено плоско тяло ( $m=1$ ). В рамките на тази задача могат да бъдат изследвани различни условия за температурата на стената.

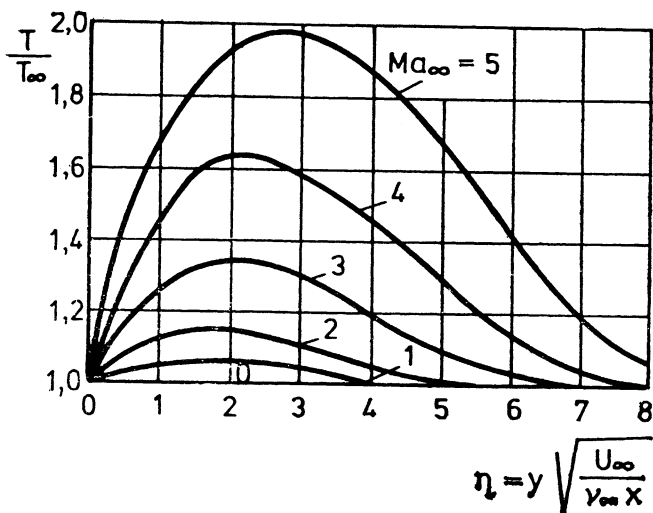
Автомоделните решения, които съответствуват на обтичането на плоска пластина, са изследвани подробно, като са използвани числени методи. При това уравнения за автомоделните функции са извеждани не само от системата (4.109), но и чрез други начини.

Интересно обстоятелство в задачата за пластина е пълното съвпадение на динамичното уравнение на системата (4.112) с уравнението на Блазиус за несвиваем флуид при  $c=1$ . Това условие е изпълнено, ако вискозността зависи линейно от температурата. В процеса на численото интегриране е възможно също да се взе-

ме предвид и по-точната зависимост на вискозността от температурата по закона на Сатерленд. На фиг. 26 и 27 са показани профилите на температурата и скоростта в граничния слой на пластината с отчитане на топлообмена (В. Ханцше, Г. Вент, 1940 г.), а



Фиг. 26

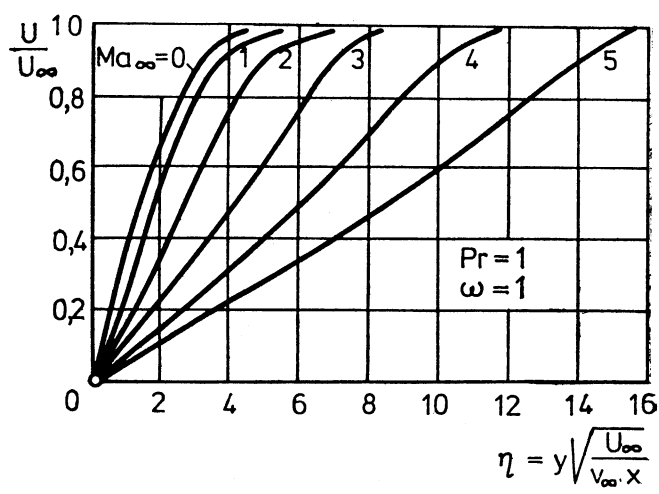


Фиг. 27

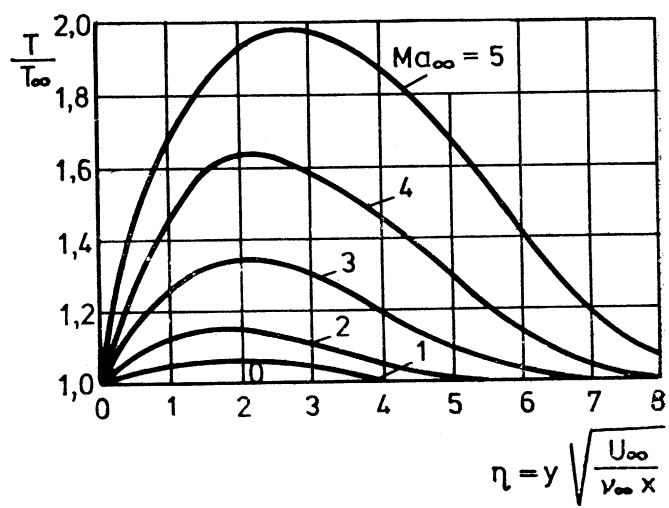
на фиг. 28 и 29 са дадени профилите на тези величини за топло-изолирана пластина (Л. Кроко, 1941 г.).



Както се вижда от тези резултати, при забавянето на потока в граничния слой силите на триене произвеждат много топлина, поради което температурата вътре в граничния слой е много пъти по-висока от температурата на стената и външната среда. Равно-



Фиг. 28



Фиг. 29

весната температура на пластината при  $M_\infty = 5$  превишава температурата в обтичащия поток (приблизително 6 пъти). За да се поддържа температурата на стената до зададена допустима стой-

ност, е необходимо да се отнема топлина от нея. С растенето на  $M_\infty$  расте и наклонът на кривите  $T'(\eta)$ , следователно растат и топлинните потоци.

Друга особеност на течението е силното обратно влияние на топлинните процеси на динамиката на течението. С растене на числото на Мах силно се увеличава и дебелината на граничния слой. При  $M_\infty = 5$  дебелината на граничния слой върху топлоизолирана пластина е почти 4 пъти по-голяма от дебелината на слоя при несвиваеми флуиди.

По резултатите от разчетите са построени интерполационни зависимости, които позволяват да се изчислят коефициентът на триенето и топлинните потоци.

Граничният слой в околността на критичната точка се описва от автомоделното решение (4.112) при  $m \neq 0$ . Тъй като в критичната точка  $U_\infty = 0$ , то  $\frac{\rho_\infty}{\rho} = \frac{\theta}{\theta_\infty} = 1 + S$ . В задачата за топлоизоли-

рана стена решението на топлинното уравнение е  $S = 0$ , а динамичното уравнение напълно съвпада с уравнението на Фолкнер — Скен, затова при  $m < -0,094$  безразмерното триене  $f''(0)$  на стената се анулира и настъпва откъсване на граничния слой.

В задачата за топлопроводяща повърхност решението зависи не само от  $m$ , но и от параметъра  $S_w$ . Може да се отбележи, че и при топлообмен решение без откъсване на потока съществува само при малки отрицателни стойности на  $m$ ; критичната величина  $m$  зависи от температурата.

#### § 4.5. СТАЦИОНАРНО ТЕЧЕНИЕ В НАЧАЛНИЯ УЧАСТЪК НА ПРАВА КРЪГОВА ТРЪБА

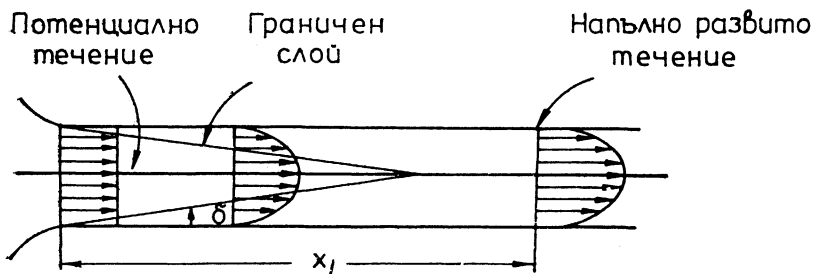
Да разгледаме стационарното вискозно течение, което се формира в началния участък на права кръгова тръба, т.е. в участъка, следващ непосредствено след входното сечение на тръбата. Нека предположим, че скоростта по цялото сечение на тръбата е постоянна и равна на  $U_0$ . Приближено решение на тази задача е получил Ж. Бусинеск през 1891 г. Да въведем цилиндрична координатна система  $O_{x\varphi r}$  и да насочим оста  $O_x$  по направление на потока (фиг. 30). Като означим с  $u, v, w$  компонентите на скоростта съответно в направленията  $x, \varphi, r$  и предположим, че течението не зависи от  $\varphi$ , уравненията на Навие — Стокс и уравнението на непрекъснатостта се записват във вида

$$(4.114) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right],$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (ru) + \frac{\partial}{\partial r} (r, w) = 0.$$

Тъй като компонентите на скоростта на флуида върху стената на тръбата са равни на нула, при големи числа на Рейнолдс върху нея се образува граничен слой. Течението във вътрешността на тръбата, наречено *ядро на потока*, следвайки идеите на



Фиг. 30

Прангъл, практически можем да считаме за идеално. Скоростта на флуидните частици в ядрото се увеличава, защото количеството течност, преминаващо през всяко сечение на тръбата, е едно и също, а в граничния слой има забавяне на течението. Съгласно закона на Бернули обаче увеличаването на скоростта по направление на тръбата води до намаляване на налягането в същата посока, поради което няма да има откъсване на граничния слой от стената на тръбата.

Като се отдалечаваме от входното сечение, дебелината на граничния слой расте, докато стане равна на радиуса на тръбата. След това течението се преустройва и асимптотично преминава в течение на Поазьой (при  $x \rightarrow \infty$ ), т. е. профилът на скоростта напречно на тръбата става параболичен.

Въз основа на по-горното качествено описание областта на течението в началния участък на тръбата може да се раздели на две части:

- а) първа част, в която дебелината на граничния слой расте от нула, докато стане равна на радиуса на тръбата;
- б) втора част, в която течението се преустройва асимптотично в течение на Поазьой.

При количественото изследване условно се казва, че в първата част разчетите се извършват, като се движиш „отпред-назад“, а във втората част — „отзад-напред“. При това в първата част се изучава развитието на граничния слой върху стената на тръбата под действието на ускореното течение в ядрото, а във втората — отклонението на разпределението на скоростта от параболичния профил на Поазьой.

#### 4.5.1. Хидродинамичен разчет в първата част на началния участък

Уравненията на Прантъл и уравнението на непрекъснатостта, когато не се изисква дебелината на граничния слой да бъде много по-малка от кривината му, имат вида

$$(4.115) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$(4.116) \quad \frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial r}(rw) = 0.$$

Като използваме интеграла на Бернули

$$\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \text{const},$$

получаваме

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{dU}{dx},$$

където  $U(x)$  е скоростта в ядрото на течението.

Следователно уравнението (4.115) може да се запише по следния начин:

$$(4.117) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial r} = U \frac{dU}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

За да изследваме течението в първата част на началния участък, въвеждаме токова функция така, че да бъде удовлетворено уравнението на непрекъснатостта (4.116):

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Граничните условия за компонентите на скоростта, докато в течението съществува идеално ядро, се записват така:

$$u = U_0, \quad w = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$u = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } r = a,$$

където  $a$  е радиусът на сечението на тръбата.

Първият разчет по метода на интегралните съотношения е направен от Шилер през 1922 г.

Имайки предвид решението на Блазиус за плоска пластина, полагаме

$$(4.118) \quad \xi = \sqrt{\frac{2x}{a\text{Re}}}, \quad \text{Re} = \frac{2U_0 a}{\nu}, \quad \zeta = \frac{1}{4\xi} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

$$(4.119) \quad U = U_0(1 + k_1 \xi + k_2 \xi^2 + \dots),$$

$$(4.120) \quad \Psi = -a^2 U_0 \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i f_i(\zeta),$$

където  $k_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) са неизвестни константи, а  $f_i(\eta)$  — неизвестни функции. Тогава

$$(4.121) \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} (-a^2 U_0) \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i f_i'(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{U_0}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{i-1} f_i'(\zeta).$$

Като заместим (4.118) — (4.121) в уравнението (4.117) и приравним коефициентите пред еднаквите степени на  $\xi$ , за определяне на неизвестните функции  $f_1, f_2, f_3, \dots$  получаваме следната система обикновени диференциални уравнения:

$$(4.122) \quad f_1''' + f_1 f_1' = 0,$$

$$(4.123) \quad f_2'' + f_1 f_2'' - f_1' f_2' + 2f_1'' f_2 = -4k_1 + 4\eta f_1 + 4f_1'',$$

$$(4.124) \quad f_3''' + f_1 f_3''' - 2f_1' f_3' + 3f_1'' f_3 = -8k_2 - 4k_1^2 + f_2'^2 - 2f_2 f_2'' + 4\eta f_2''' + 4f_2''.$$

Граничните условия за функциите  $f_i(\zeta)$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ )

$$(4.125) \quad f_i(0) = f_i'(0) = 0, \quad f_1'(\infty) = 2, \quad f_1''(\infty) = 2k_{i-1},$$

показват, че те могат да бъдат определени едва след намиране на константите  $k_i$  ( $1, 2, 3, \dots$ ), които определят идеалното течение в ядрото.

Очевидно в първо приближение, т. е. за  $f_1$ , получаваме задача, подобна на задачата за пластина.

От граничните условия (4.125) получаваме, че на безкрайност асимптотичното изменение на функциите  $f_1, f_2, f_3$  има вида

$$(4.126) \quad \begin{aligned} f_1 &\sim 2\eta + A_1 \\ f_2 &\sim 2k_1\eta + A_2, \\ f_3 &\sim 2k_2\eta + A_3, \end{aligned}$$

като константите  $A_1, A_2, A_3$  се получават от численото интегриране на уравненията (4.122) — (4.125).

За да изразим константите  $k_1, k_2, k_3$  чрез  $A_1, A_2, A_3$ , избираме да бъде равна на нула цилиндричната повърхнина на тока, която отговаря на повърхнината на тръбата. Като вземем предвид механичното тълкуване на функцията на тока  $\Psi$ , получаваме

$$2\pi\Psi|_{r=a} - 2\pi\Psi|_{r=0} = \pi U_0.$$

Или

$$\Psi|_{\zeta=0} - \Psi|_{\zeta=\frac{1}{4\xi}} = \frac{U_0}{2}.$$

Но

$$\Psi|_{\zeta=0} = 0.$$

Като предположим, че  $\frac{1}{4\xi}$  е достатъчно голямо, от  
 $-\Psi\left(\xi, \frac{1}{4\xi}\right) = \frac{U_0}{2}$  и (4.126) намираме

$$1 + \xi(2A_1 + k_1) + \xi^2(2A_2 + k_2) + \xi^3(2A_3 + k_3) + \dots = 1.$$

Следователно

$$k_1 = -2A_1, \quad k_2 = -2A_2, \quad k_3 = -2A_3.$$

След численото интегриране на посочените по-горе обикновени диференциални уравнения със съответните гранични условия за константите  $k_1, k_2, k_3$  получаваме

$$k_1 = 3,4415; \quad k_2 = 9,0938 \quad \text{и} \quad k_3 = 141,98, \dots$$

Това решение, разбира се, е валидно при малки стойности на параметъра  $\xi$ . Както показват числените пресмятания и сравнения с експеримента, при  $\xi \leq 0,05$  за  $\frac{r}{a} \leq 0,8$  получените резултати имат точност от порядъка на 1%, докато при  $\frac{r}{a} = 0,9$  точността е от порядъка на 5%. След  $\xi = 0,05$  редът (4.119) не дава достатъчно точни резултати дори ако в него се включи и членът  $k_4 \xi^4$ .

#### 4.5.2. Хидродинамичен разчет във втората част на началния участък

Във втората част на началния участък, където течението се преустройва така, че асимптотично да премине в Поазьово, налягането отново зависи само от  $x$  и втората производна  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  може да се пренебрегне (Ж. Бусинеск, 1891 г.).

Ще въведем следните независими променливи:

$$\xi = \left(\frac{2x}{a\text{Re}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = \frac{2(x-x_0)}{a} \frac{1}{\text{Re}}, \quad y = \frac{r^2}{a^2}, \quad \text{Re} = \frac{2U_0 a}{\nu}.$$

Тогава уравнението на непрекъснатостта се преобразува в

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y}w) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Като интегрираме това уравнение по  $y$  в граници от  $y$  до 1 и вземем предвид, че  $w|_{y=1} = 0$ , получаваме

$$(4.127) \quad w = \frac{1}{\sqrt{y} \cdot \text{Re}} \int_y^1 \frac{\partial u}{\partial z} dy.$$

След известни преобразувания уравнението (4.117) добива вида

$$(4.128) \quad u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \int_y^1 \frac{\partial u}{\partial z} dy = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 4U_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Съгласно решението на Поазьой получаваме

$$u = 2U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) = 2U_0(1-y).$$

Да означим с  $u'$  безразмерното отклонение на скоростта на течението във втората област от скоростта в течението на Поазьой, т. е. да положим

$$(4.129) \quad u(z, y) = 2U_0(1-y) + U_0 u'(z, y).$$

Ще предположим, че  $u'(z', y)$  е малка величина, така че  $u'^2$  е малка величина от втори ред и при разглеждането само на първото приближение може да се пренебрегне. Като заместим (4.127) и (4.129) в (4.128) и пренебрегнем членовете от втори и по-висок ред, за отклонението  $u'(z, y)$  получаваме уравнението

$$(4.130) \quad (1-y) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ y \frac{\partial u'}{\partial y} \right].$$

Това уравнение може да се запише и така:

$$(4.131) \quad \frac{1-y}{y} \frac{\partial}{\partial z} \left( y \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ y \frac{\partial u'}{\partial y} \right],$$

което представлява едно параболично уравнение относно производеното  $y \frac{\partial u'}{\partial y}$ . Решението на (4.131) търсим по метода на Фурье за отделяне на променливите. Полагаме

$$y \frac{\partial u'}{\partial y} = Z(z) \cdot \Phi(y)$$

и от (4.131) получаваме

$$\frac{Z'(z)}{Z(z)} = 2 \frac{y}{1-y} \frac{\Phi''(y)}{\Phi(y)} = -2\lambda,$$

където  $\lambda$  е постоянна величина. Като решим уравнението

$$\frac{Z'(z)}{Z(z)} = -2\lambda,$$

намираме  $Z(z) = Ce^{-2\lambda z}$ , където  $C$  е константа. Следователно

$$(4.132) \quad y \frac{\partial u'}{\partial y} = Ce^{-2\lambda z} \cdot \Phi(y).$$

Уравнението за  $\Phi(y)$  се записва така:

$$(4.133) \quad \Phi''(y) + \lambda \frac{1-y}{y} \Phi(y) = 0.$$

Ще определим граничните условия, при които това уравнение трябва да се решава.

Уравнението (4.132) при  $y=0$  има вида

$$(4.134) \quad \Phi(0)=0.$$

От равенството

$$\int_0^1 u dy = U_0 = \text{const}$$

и уравнението (4.129) следва, че

$$\int_0^1 u' dy = 0.$$

Второто гранично условие за уравнението (4.133) има вида

$$\int_0^1 \Phi(y) dy = 0.$$

Наистина, от една страна,

$$\int_0^1 y \frac{\partial u'}{\partial y} dy = \int_0^1 y du' = 0,$$

а, от друга,

$$\int_0^1 y \frac{\partial u'}{\partial y} dy = \int_0^1 C e^{-2\lambda z} \Phi(y) dy = C e^{-2\lambda z} \int_0^1 \Phi(y) dy.$$

Следователно

$$(4.135) \quad \int_0^1 \Phi(y) dy = 0.$$

Така за уравнението (4.133) при гранични условия (4.134) и (4.135) получаваме задачата на Шурм — Лиувил, т. е. задачата за *собствени стойности и собствени функции*. Тази задача притежава една редица от собствени стойности за  $\lambda$ , които ще означим с  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ . Тогава общото решение за  $y \frac{\partial u'}{\partial y}$  има вида

$$(4.136) \quad y \frac{\partial u'}{\partial y} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-2\lambda_i z} \Phi_i(y).$$

Като интегрираме това по  $y$  в граници от  $y$  до 1, намираме

$$-u' = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-2\lambda_i z} F_i(y),$$



където

$$F_i(y) = \int_y^1 \Phi_i(y) \frac{dy}{y}.$$

За разпределението на скоростта във втората област получаваме

$$u(z, y) = 2U_0(1-y) + U_0 u' = 2U_0(1-y) - U_0 \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-2\lambda_i z} F_i(y).$$

Това решение трябва да се съедини с решението (4.121) в първата област. Двете задачи за първи път през 1934 г. са съгласувани от Г. Шлихтинг за случая на плосък канал.

Аткинсън и Голдщейн (Голдщейн, 1965 г.) предлагат константите  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  да се определят от условието — при  $\xi = 0,05$  и  $z=0$ , интегралът

$$\int_0^1 \{u_{\text{I област}}(\xi, \zeta) - u_{\text{II област}}(z, y)\}^2 dy$$

да има минимална стойност, т. е.

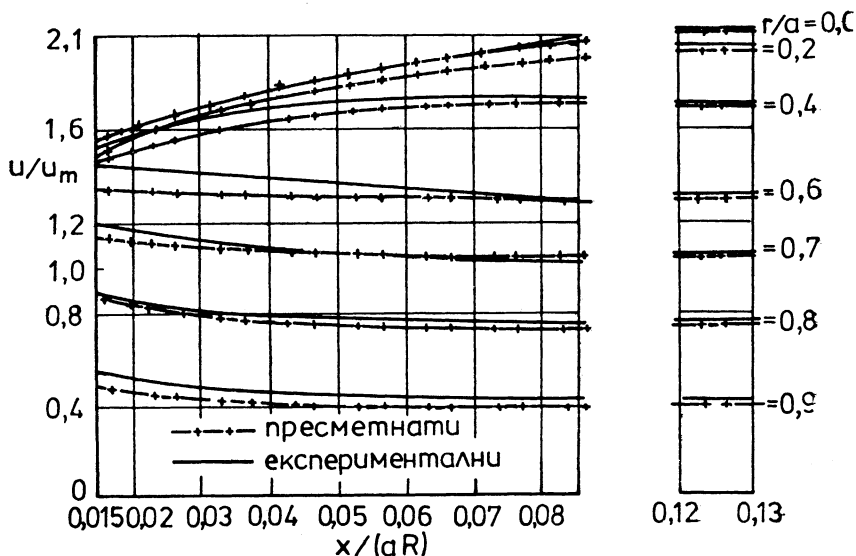
$$\int_0^1 \{u_{\text{I област}}[0,05, 5(1-y)] - 2U_0(1-y) + U_0(C_1 F_1(y) + C_2 F_2(y) + \dots + C_n F_n(y))\}^2 dy = \min.$$

Резултатите за величината  $\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$  са дадени в следната таблица:

лица:

$\frac{x}{a \text{ Re}}$	$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$	$\frac{x}{a \text{ Re}}$	$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$
0	0	0,015	1,36
0,001	0,32	0,020	1,63
0,002	0,46	0,020	1,88
0,003	0,56	0,030	2,10
0,004	0,65	0,040	2,51
0,005	0,73	0,05	2,88
0,007	0,87	0,06	3,24
0,009	1,00	0,07	3,59
0,011	1,11	0,08	3,93
0,013	1,22	0,09	4,26
0,015	1,33	0,10	4,59

Тук пресмятанията при  $\frac{x}{aRe} \leq 0,015$  са извършени, като е използвано решението в първата област, а при  $\frac{x}{aRe} \geq 0,015$  — от втората област.



Фиг. 31

На фиг. 31 е дадено сравнение на теоретичните пресмятания с експерименталните измервания за разпределението на скоростта при  $\frac{x}{aRe} \geq 0,015$ , което показва, че има съгласуваност както в направление на тръбата, така и при преминаването на течението към профила на Поазьой.

#### § 4.6. НЕСТАЦИОНАРЕН ГРАНИЧЕН СЛОЙ

Съществуват два основни класа течения, при които се прилага теорията на нестационарния граничен слой:

- 1) *нестационарни движения, възникващи от състояние на покой;*
- 2) *периодични движения.*

##### 4.6.1. Импульсивно и равноускорително движение. Решение на Блазиус

За нестационарния граничен слой при обтичане на тела е характерно това, че той не се образува (формира) веднага, а след

изтичане на някакво време, което е сравнимо с времето, необходимо, за да измине тялото път, равен на неговата характерна дължина.

Експерименталното изследване на движенията на тела от покой дава възможност да се наблюдава в самото начало отсъствието на граничен слой, неговото зараждане и началният му стадий на развитие, докато възникне обратно течение, което довежда до откъсване на потока на тялото.

Нека  $U_{\infty}$  е характерна скорост и  $a$  е характерна дължина на разглежданото течение. Тогава приближението на Прантълвия граничен слой за движенията, възникващи от състояние на покой, е валидно, ако за временния мащаб  $T_0$  е в сила  $T_0 \ll \frac{a}{U_{\infty}}$ ,

т. е. когато числото на Струхал  $St = \frac{a}{U_{\infty} T_0}$  е много голямо.

Образуваният в началото на движението граничен слой е много тънък и в него скоростта на течението се изменя много по-бързо от скоростта на тялото, достигайки скоростта на течението на известно разстояние от него. По такъв начин малко след началото на движението около тялото се формира течение, което е потенциално извън граничния слой. След известно време настъпва откъсване на потока от тялото, дебелината на граничния слой нараства силно и предположенията, при които са изведени уравненията на Прантъл, се нарушават.

Появата на откъсване на потока води до рязко увеличаване на съпротивлението, което изпитва движещото се в потока тяло. Така възниква задачата за определяне на времето от започване на движението на тялото до момента на откъсването на потока от него.

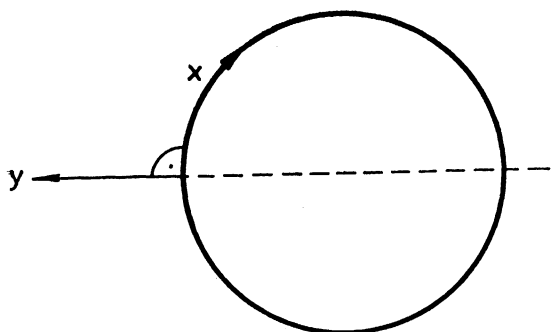
*Първи Блазиус* през 1908 г. прилага теорията на нестационарния граничен слой, като изследва проблема за импулсивно и равномерно движение на кръгов цилиндър в безкраен вискозен несвиваем флуид. Предложеният от него метод за търсене на решението в ред по степените на времето не е изгубил своята привлекателност и до днес, когато се интересуваме от формирането и началния стадий на развитие на граничен слой около движещо се тяло.

Да разгледаме *обтичане на прав кръгов цилиндър с радиус  $a$  в направление, перпендикулярно на оста му*. Тъй като картината на течението е една и съща във всички равнини, които са перпендикулярни на оста на цилиндъра, ще изучим течението само в една от тях.

Нека неподвижно с тялото да е свързана ортогонална координатна система  $Oxy$ , началото  $O$  на която съвпада с предната критична точка на цилиндъра, а надлъжната координата  $x$  е насочена по направление на контура му (фиг. 32). Ще предполагаме, че компонентите на скоростта  $u$  и  $v$  съответствуват на направлението  $Ox$  и  $Oy$ . Тогава уравненията на равнинния нестационарен граничен слой имат вида

$$(4.137) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$(4.138) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$



Фиг. 32

където  $U=U(x, t)$  е скоростта на потенциалното течение във външния граничен слой.

Да разгледаме най-напред случая, когато движението от състояние на покой възниква със „скок“, като придобива окончателна скорост  $U_0(x)$ . По такъв начин за скоростта

$U(x, t)$  на външното течение получаваме

$$(4.139) \quad U(x, t) = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

$$(4.140) \quad U(x, t) = U_0(x) \quad \text{при } t > 0,$$

където  $U_0(x)$  е скоростта на потенциалното течение около цилиндъра при стационарното му обтичане с идеален флуид.

Началните и граничните условия при импулсивно движение се записват така:

$$(4.141) \quad u = U_0(x), \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad t = 0;$$

$$(4.142) \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad t > 0;$$

$$(4.143) \quad u \rightarrow U_0(x) \quad \text{при } y \rightarrow \infty; \quad t \geq 0.$$

Решаването на смесената начално-гранична задача (4.137)–(4.143) може да се извърши посредством метода на последователните приближения, който в случая се основава на определени физически съображения.

Двете равенства в (4.141) изразяват условието, че при  $t = 0$  още няма граничен слой и течността, като идеална, се хлъзга по контура на цилиндричното тяло. При малки интервали от време граничният слой е все още много тънък и компонентата на скоростта  $v$  се отличава малко от нулата, а  $u$  има стойности, близки до  $U_0(x)$ . Освен това, когато граничният слой е много тънък, членът  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , който съответствува на силите на триене, приема големи

стойности в сравнение с конвективните членове и се уравнива с локалното ускорение. Тогава, ако представим скоростта  $u$  във вид на сбор от две приближения  $u_1$  и  $u_2$ , получаваме, че  $u_1$  удовлетворява уравнението

(4.144)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$$

и граничните условия  $u_1=0$  при  $y=0$  и  $u_1=U_0(x)$  при  $y \rightarrow \infty$ .

За да решим уравнението (4.144), използваме въведената във втора глава нова автомоделна променлива

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

Като положим  $u_1 = U_0(x) \cdot F_1(\eta)$ , за  $F_1(\eta)$  получаваме

$$F_1''(\eta) + 2\eta F_1'(\eta) = 0.$$

Решението на това уравнение, което удовлетворява граничните условия, се дава с функцията

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta',$$

която е известна като *гаусова функция на грешките*. Понякога за краткост тя се бележи с  $\Phi(\eta)$  (съгласно §. 2.1).

Следователно

$$u_1 = U_0(x) \Phi(\eta).$$

От уравнението за непрекъснатостта (4.138) за  $v_1$  намираме

$$v_1 = -2\sqrt{\nu t} \frac{dU_0}{dx} [\eta \Phi - \sqrt{\pi} (1 - e^{-\eta^2})].$$

За второто приближение получаваме уравнение, аналогично, както и за първото, но не хомогенно:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = U_0 \frac{dU_0}{dx} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Или

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} \Phi + 1 - \Phi^2 - \frac{2}{\pi} (e^{-\eta^2} - e^{-2\eta^2}) \right].$$

Следвайки Блазиус, полагаме

$$u_2 = t U_0 \frac{dU_0}{dx} F_2(\eta).$$

Тогава за  $F_2(\eta)$  получаваме уравнението

$$F_2'' + 2\eta F_2' - 4F_2 = 4 \left[ \Phi^2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} \Phi - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{-\eta^2} - e^{-2\eta^2}) \right].$$

Решението на това уравнение се записва така:

$$F_2(\eta) = \frac{1}{2} (2\eta^2 - 1) \Phi^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \eta e^{-\eta^2} \Phi + 1 - \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} + \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} + C_1 (2\eta^2 + 1) + C_2 \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\eta^2 + 1) \Phi + \eta e^{-\eta^2} \right].$$

От граничните условия при  $\eta=0$  и  $\eta=\infty$  получаваме

$$C_1 = -1,212, \quad C_2 = 0,804.$$

Необходими са по-дълги, но не сложни пресмятания, за да се намери и  $v_2$ :

$$v_2 = 2\sqrt{v}t^3 \left[ U_0 \frac{d^2 U_0}{dx^2} + \left( \frac{dU_0}{dx} \right)^2 \right] \left\{ \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{3}{3\sqrt{\pi}} \right) - \frac{1}{6} (2\eta^3 - 3\eta) \Phi^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6\sqrt{\pi}} [4 - (4\eta^2 - 11)e^{-\eta^2}] \Phi - \eta - \frac{1}{3\pi} \eta e^{-\eta^2} - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \Phi(\eta\sqrt{2}) + \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{2}{3\pi} \right) \left( \frac{2}{3} \eta^3 + \eta \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{6} (2\eta^3 + 3\eta) \Phi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} (\eta^2 + 1) e^{-\eta^2} \right] \right\}.$$

Абсцисата на точката на откъсване  $x_s$  и времето от започването на движението до момента на откъсването на потока от тялото  $t_s$  се получават от условието  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\eta=0} = 0$ . Като вземем предвид членовете до второ приближение, получаваме, че  $t_s$  удовлетворява уравнението

$$1 + \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \left( \frac{dU_0}{dx} \right)_s t_s = 0.$$

От него следва, че откъсване може да има само при отрицателни стойности на  $\frac{dU_0}{dx}$  и се появява най-напред там, където тази производна приема максимални абсолютни стойности. Така за  $t_s$  намираме

$$t_s = \frac{0,702}{\left( -\frac{dU_0}{dx} \right)_{\max}}.$$

Като вземем предвид, че функциите  $U_0(x)$  и  $\frac{dU_0}{dx}$  при обтичане на прав кръгов цилиндър от идеален флуид са равни съответно на

$$U_0(x) = 2U_\infty \sin\left(\frac{x}{a}\right); \quad \frac{dU_0}{dx} = 2 \frac{U_\infty}{a} \cos\left(\frac{x}{a}\right),$$

получаваме, че максималната абсолютна стойност на  $\frac{dU_0}{dx}$ , а именно  $\frac{dU_0}{dx} = -2 \frac{U_\infty}{a}$ , се достига при  $x = \pi \cdot a$ , т. е. в задната критична точка. Това означава, че времето от започване на движението до откъсване на потока в задната критична точка ще бъде равно на

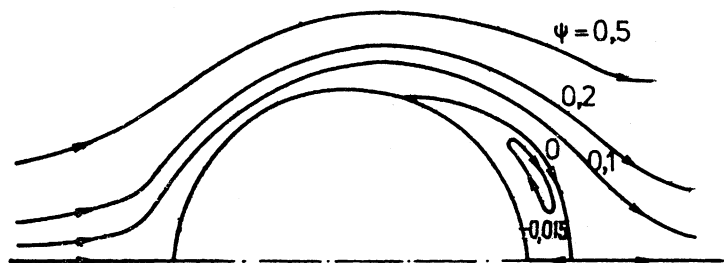
$$t_s = \frac{0,702}{\left( -\frac{dU}{dx} \right)_{\max}} = 0,351 \frac{a}{U_\infty}.$$

Може да се изчисли и пътът  $\sigma$ , който ще измине потокът от началото на движението до откъсването му от цилиндъра в задната критична точка:

$$\sigma = U_{\infty} \cdot t_s = 0,351a.$$

Ще отбележим, че като отчитат и третото приближение за  $u$ , Голдщейн и Розенхед получават

$$\sigma = 0,32a.$$



Фиг. 33

На фиг. 33 е дадена картината на течението след откъсване на граничния слой при импулсивно движение на цилиндъра в момента  $T=1$ .

През 1908 г. Блазиус е решил и задачата за равноускорително движение на прав кръгов цилиндър във вискозен флуид, който започва движението си от покой.

За външното движение в този случай

$$(4.145) \quad U(x, t) = 0 \quad \text{при } t = 0;$$

$$(4.146) \quad U(x, t) = U_0(x) \cdot t \quad \text{при } t > 0,$$

където  $U_0(x)$  е скоростта на потенциалното течение около цилиндъра при стационарното му обтичане от идеален флуид.

Началните и граничните условия сега имат вида

$$(4.147) \quad u = 0, v = 0 \quad \text{при } y = 0, t > 0;$$

$$(4.148) \quad u \rightarrow U_0(x) \cdot t \quad \text{при } y \rightarrow \infty, t \geq 0.$$

Като вземем предвид (4.146), уравнението (4.137) се записва така:

$$(4.149) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_0(x) + t^2 U_0 \frac{dU_0}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

За да реши задачата (4.145) — (4.149) за малки времена, Блазиус търси отново решението във вид на ред по степените на  $t$ . За токовата функция той полага

$$(4.150) \quad \psi = 2\sqrt{vt} \left[ U_0(x) \cdot F_1(\eta)t + U_0(x) \frac{dU_0(x)}{dx} F_3(\eta) t^3 + \dots \right],$$

където  $\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}}$ , а  $F_1(\eta)$ ,  $F_3(\eta)$ , ... са неизвестни функции. Урав-

нението на непрекъснатостта е автоматично удовлетворено, като вземем предвид определения на  $\phi$ :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = U_0(x) F_1'(\eta) \cdot t + U_0(x) \frac{dU_0(x)}{dx} F_3'(\eta) t^3 + \dots,$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2\sqrt{vt} \left\{ \frac{dU_0(x)}{dx} F_1(\eta) t + \left[ U_0(x) \frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} + \left( \frac{dU_0}{dx} \right)^2 \right] F_3(\eta) t^3 + \dots \right\}.$$

Тогава за уравненията, с които се определят неизвестните функции  $F_1(\eta)$  и  $F_3(\eta)$ , получаваме

$$F_1'''(\eta) + 2\eta F_1''(\eta) - 4F_1'(\eta) + 4 = 0,$$

$$F_3'''(\eta) + 2\eta F_3''(\eta) - 12F_3'(\eta) = 4[F_1'^2(\eta) - F_1(\eta)F_1''(\eta) - 1].$$

Аналогично от граничните условия намираме

$$F_1(0) = 0, \quad F_1'(0) = 0, \quad F_3(0) = 0, \quad F_3'(0) = 0,$$

$$F_1'(\infty) = 1, \quad F_3'(\infty) = 0.$$

При решението на граничната задача за  $F_1'(\eta)$  се получава

$$F_1'(\eta) = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \eta e^{-\eta^2} + (1 + 2\eta^2) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' \right].$$

Аналогичен, но по-дълъг израз се получава за решението на граничната задача за  $F_3'(\eta)$ . Като вземем предвид представянето на тангенциалната компонента на скоростта  $u(x, y, t)$ , от уравнението

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

получаваме следното уравнение за пресмятане на времето за откъсването на потока от цилиндъра:

$$F_1''(0) + t_s^2 \frac{dU_0}{dx} F_3''(0) = 0.$$

Така за определяне на времето  $t_s$  от началото на движението до откъсването на потока от цилиндъра получаваме

$$1 + 0,427 t_s^2 \frac{dU_0(x)}{dx} = 0,$$

или

$$t_s^2 \left( \frac{dU_0(x)}{dx} \right)_s = -2,34.$$

Но за кръговия цилиндър

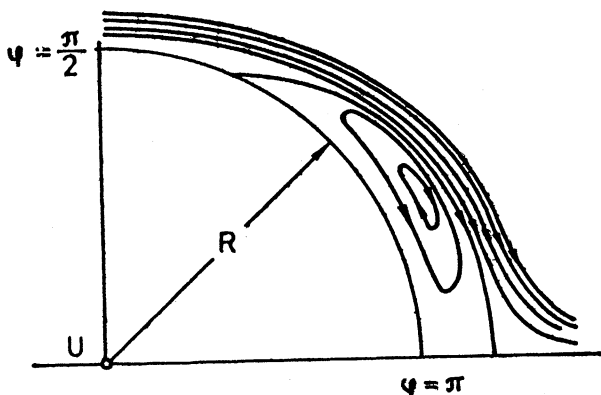
$$U(x, t) = U_0(x) \cdot t = 2bt \sin \frac{x}{a},$$

където  $b$  е ускорението на равноускорителното движение на ци-



линдъра. Тогава абсолютната стойност на производната  $\frac{dU_0(x)}{dx} = \frac{2b}{a} \cos \frac{x}{a}$  приема най-голямата си стойност, когато  $\cos \frac{x}{a} = -1$ , т. е. при  $x = \pi \cdot a$ . Следователно

$$t_s^2 = 1,04 \frac{a}{b}.$$



$$T = t \sqrt{b/R}$$

Фиг.34

На фиг. 34 е дадена картината на течението при равноускорително движение на кръгов цилиндър в момента  $T = 1,58$ .

Тук пътят, изминат от цилиндъра от началото на движението до момента на откъсването, е равен на

$$\sigma = \frac{1}{2} b \cdot t_s^2.$$

Това означава, че

$$\sigma = 0,52 a.$$

От направените изследвания за импулсивно и равноускорително движение на кръгов цилиндър във вискозен флуид следва изводът, че при втория вид движение пътят, изминат до откъсването на потока от тялото, е по-дълъг в сравнение с пътя при първия вид движение.

Приблизения от по-висок ред. От физични съображения е ясно, че външното (идеалното) течение и течението в граничния слой си влияят взаимно. В полученото по-горе решение на Блазнус е взето предвид (вж. първите два члена в дясната страна на (4.150)) само влиянието на външното течение върху граничния слой. За да получим по-точно решение, включващо и обратното влияние на граничния слой върху външното течение, ще прило-

жим метода за съравняване на асимптотичните разлагания (Уоні, 1967 г.).

Обезразмерените уравнения на непрекъснатостта и на Навие — Стокс, записани в цилиндрична координатна система  $(r, \varphi)$ , имат вида

$$(4.151) \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0,$$

$$(4.152) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{St} \left( \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uv}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{Re \cdot St} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} \right),$$

$$(4.153) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{St} \left( \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \frac{1}{Re \cdot St} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right),$$

където  $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$ ,  $St = \frac{a}{U_\infty T_0}$ ,  $v_\varphi = u$ ,  $v_r = v$  и налягането  $p$  е

мащабирано чрез  $\frac{\rho U_\infty^2}{St}$ . Тъй като скоростта на звука в несвиваем флуид е безкрайна, в началния момент  $t=0^+$  на импулсивното движение цялото течение има потенциален характер. Затова началните условия в задачата за импулсивно обтичане на кръгов цилиндър в посока, перпендикулярна на оста му, се записва така:

$$(4.154) \quad \left. \begin{aligned} u=v=0 & \text{ при } t=0 \text{ и } r=1; \\ u &= \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin \varphi \\ v &= -\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \text{ при } t=0^+ \text{ и } r>1.$$

За граничните условия

$$\left. \begin{aligned} u=v=0 & \text{ при } r=1 \text{ и } t \geq 0; \\ u \rightarrow \sin \varphi \\ v \rightarrow \cos \varphi \end{aligned} \right\} \text{ при } r \rightarrow \infty \text{ и } t \geq 0.$$

Ще предпологаеме, че

$$\frac{1}{St} = \frac{1}{\beta Re} = \varepsilon \ll 1,$$

където  $\beta$  е константа от порядъка на единица и  $\varepsilon$  е малък параметър. След като получим решението, може да заместим  $\varepsilon$  с  $\frac{1}{St}$  и  $\beta$  с  $\frac{St}{Re}$ . По този начин се запазва индивидуалността както на числото на Рейнолдс, така и на числото на Струхал.

Използваме функцията на тока  $\Psi$ , дефинирана чрез равенствата

$$(4.155) \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi},$$

елиминираме налягането  $p$  от уравненията (4.152), (4.153) и получаваме

$$(4.156) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi) + \frac{\varepsilon}{r} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial r} \right] = \varepsilon^2 \beta \nabla^4 \psi,$$

където

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Началните и граничните условия за токовата функция имат вида

$$(4.157) \quad \psi = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{при } r=1 \quad \left. \vphantom{\psi = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial r}} \right\} t \geq 0$$

$$(4.158) \quad \psi \sim r \sin \varphi \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

$$(4.159) \quad \psi \sim \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \quad \text{при } t \rightarrow 0^+ \text{ за } r > 1.$$

Условието за токовата функция в началния момент  $t=0^+$  (4.159) се получава от решението на задачата за обтичане на кръгов цилиндър от идеален поток. За хидродинамичните величини във от граничния слой, който ще означаваме с главни букви, предполагаме

$$(4.160) \quad \Psi = \Psi_1 + \varepsilon \Psi_2 + \dots,$$

$$(4.161) \quad u = U_1 + \varepsilon U_2 + \dots,$$

$$(4.162) \quad v = V_1 + \varepsilon V_2 + \dots,$$

$$(4.163) \quad p = P_1 + \varepsilon P_2 + \dots$$

От (4.156) следва, че при направените по-горе предположения флуидното течение във от граничния слой е идеално и безвихрово, т.е. всички функции  $\Psi_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) удовлетворяват уравнението на Лаплас в цилиндрични координати:

$$(4.164) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Тъй като изменението на хидродинамичните величини в граничния слой е много по-голямо в перпендикулярно към повърхнината на цилиндъра направление, вместо  $r$  за удобство ще въведем нова „деформирана“ координата  $\zeta$ :

$$(4.165) \quad \zeta = \frac{r-1}{\varepsilon} \quad (r=1+\varepsilon\zeta).$$

Неизвестните функции в граничния слой търсим във вида

$$(4.166) \quad u = u_1 + \varepsilon u_2 + \dots, \quad v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots;$$

$$p = p_1 + \varepsilon p_2 + \dots, \quad \psi = \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots$$

Замествайки (4.165) и (4.166) в (4.152), (4.153), за първите две приближения получаваме уравненията:

а) първо приближение ( $\varepsilon^0$ ):

$$(4.167) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} = - \frac{\partial p_1}{\partial \varphi},$$

$$(4.168) \quad \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = 0;$$

б) второ приближение ( $\varepsilon^1$ ):

$$(4.169) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u_2}{\partial \zeta^2} = -v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \zeta \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial p_2}{\partial \varphi},$$

$$(4.170) \quad \frac{\partial p_2}{\partial \zeta} = 0.$$

По същия начин от (4.152), (4.153) и разлаганията за външното течение (4.161) — (4.163) се получават уравненията за външното течение:

а) първо приближение ( $\varepsilon^0$ ):

$$(4.171) \quad \frac{\partial U_1}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial r};$$

б) второ приближение ( $\varepsilon^1$ ):

$$(4.172) \quad \frac{\partial U_2}{\partial t} + \left[ \frac{U_1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + v_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{U_1 V_1}{r} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + \beta \left[ \frac{U_1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{U_1^2}{r} \right] = - \frac{\partial P_2}{\partial r}.$$

Граничните условия на уравненията във вътрешната област са условията за полевване върху цилиндъра, а във външната област — условията на безкрайност. Недостигащите гранични условия определяме, като използваме принципа на Каплун за срастване на асимптотичните разлагания. Асимптотичните разлагания на една хидродинамична величина (например токовата функция) във вътрешната и външната област трябва да съвпадат в областта на прекриване, затова, за да извършим срастването, въвеждаме нова (междина) променлива

$$(4.173) \quad \eta_k = \frac{r-1}{\Delta(\varepsilon)},$$

където величината  $\Delta(\varepsilon)$  трябва да клони към нула по-бавно, отколкото  $\varepsilon$ , т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(\varepsilon) = 0, \text{ но } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \infty$$

(например  $\Delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ ).

Съгласно принципа на Каплун за срастване на асимптотичните разлагания трябва да бъде изпълнено равенството

$$(4.174) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\eta_k, \varphi, t) \Big|_{\eta_k = \text{const}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(\eta_k, \varphi, t) \Big|_{\eta_k = \text{const}}.$$

Граничният преход, при който  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\eta_k$  е фиксирана величина, се нарича *граничен преход на Каплун*. Равенството (4.174) е еквивалентно на

$$(4.175) \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi(\zeta, \varphi, t) = \lim_{r \rightarrow 1} \Psi(r, \varphi, t),$$

ващото граничният преход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\eta_k = \text{const}$  е еквивалентен на граничните преходи при  $\zeta \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow 1$ .

Наистина съгласно направените по-горе предположения:

1) от  $r = 1 + \Delta(\varepsilon)\eta_k$  следва, че при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\eta_k$  фиксирано  $r \rightarrow 1$ ;

2) от  $\zeta = \frac{r-1}{\varepsilon} = \frac{\Delta(\varepsilon)\eta_k}{\varepsilon}$  следва, че при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\eta_k$  фиксирано

$\zeta \rightarrow \infty$ .

**Първо приближение.** Решението на (4.164), удовлетворяващо условията (4.157) — (4.159) с изключение на  $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$ , е токовата функция за идеалното потенциално течение около цилиндъра  $r = 1$ . Следователно за първо приближение на токовата функция на външното течение получаваме

$$\Psi_1 = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi.$$

След като знаем  $\Psi_1$ , може да определим компонентите на скоростта за външното течение

$$(4.176) \quad U_1 = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin \varphi, \quad V_1 = -\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \varphi.$$

Уравнението (4.168) показва, че  $P_1$  не се изменя напречно на граничния слой, т. е.

$$(4.177) \quad p_1 \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = p_1 \Big|_{r=1}.$$

Тогава от уравненията за първо приближение във външната област получаваме

$$(4.178) \quad -\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = -\frac{\partial P_1}{\partial \varphi} \Big|_{r=1} = \frac{\partial U_1}{\partial t} \Big|_{r=1} = 0.$$

Следователно трябва да решим уравнението

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} = 0,$$

където функцията  $u_1(t, \zeta, \varphi)$  удовлетворява условието за полепване  $u_1(0, \varphi, t) = 0$  и условието за срастване

$$(4.179) \quad u_1 \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = U_1 \Big|_{\zeta=0} = U_1 \Big|_{r=1}.$$

Като въведем автомоделната променлива

$$(4.180) \quad \eta = \frac{\zeta}{2\sqrt{\beta t}},$$

намираме, че решението на (4.167), удовлетворяващо (4.154), (4.178) и условието за срастване (4.179), има вида

$$(4.181) \quad u_1 = U_1|_{r=1} \Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} U_1|_{r=1} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Така получаваме, че (4.181) съвпада с първото приближение на решението на Блазиус за  $u_1$ . От (4.155) и (4.180) следва, че

$$u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} = \frac{1}{2\sqrt{\beta t}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}.$$

Тогава

$$(4.182) \quad \psi_1 = 2\sqrt{\beta t} \int_0^{\eta} u_1 d\eta = 4\sqrt{\beta t} \sin \varphi \left[ \eta \Phi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-\eta^2} - 1) \right].$$

Като вземем предвид (4.155) и равенството

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1+\varepsilon\zeta} = 1 - \varepsilon\zeta + O(\varepsilon^2),$$

с точност до първи ред намираме

$$v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} = -4\sqrt{\beta t} \cos \theta \left[ \eta \Phi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-\eta^2} - 1) \right].$$

**Второ приближение.** И тук ще започнем с намирането на токовата функция във външната област. Функцията  $\Psi_2(r, \varphi, t)$  удовлетворява уравнението (4.164) и характеризира влиянието на граничния слой върху външното течение с точност до  $O(\varepsilon)$ . Тъй като това влияние трябва да затихва при  $r \rightarrow \infty$ , необходимо е  $\Psi_2(r, \varphi, t)$  да удовлетворява граничните условия

$$(4.183) \quad U_2 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

$$V_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

За да определим функцията  $\Psi_2(r, \varphi, t)$ , трябва още едно гранично условие, което ще намерим от условието за срастване (4.179) с точност до  $O(\varepsilon)$ .

Въвеждаме междинна променлива

$$(4.184) \quad \eta_k = \frac{r-1}{\Delta(\varepsilon)} = \frac{r-1}{\sqrt{\varepsilon} 2\sqrt{\beta t}} = \sqrt{\varepsilon} \eta,$$

като за удобство в пресмятанията положим  $\Delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} 2\sqrt{\beta t}$ . Заменяме (4.184) във вътрешното разлагане (4.166) и развиваме функцията  $\psi$  по степените на  $\varepsilon$ . Получаваме

$$\begin{aligned}\psi = \varepsilon \psi_0 + \dots = \varepsilon 4\sqrt{\beta t} \sin \varphi \left[ \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-\eta^2} - 1) \right] + \\ + \dots = \varepsilon 4\sqrt{\beta t} \sin \varphi \left[ \frac{2\eta_k}{\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\eta_k}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{-\left(\frac{\eta_k}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} d\left(\frac{\eta_k}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ e^{-\left(\frac{\eta_k}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} - 1 \right] + \dots \right],\end{aligned}$$

или

$$(4.185) \quad \psi = 4\sqrt{\beta t} \sin \varphi \left[ \sqrt{\varepsilon} \eta_k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \right] + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \eta_k, \varepsilon^2 \eta_k^2, \dots).$$

Тук сме взели предвид, че

$$\int_0^{\frac{\eta_k}{\varepsilon}} e^{-\left(\frac{\eta_k}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} d\left(\frac{\eta_k}{\varepsilon}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Да изразим външното разлагане чрез междинната променлива  $\eta_k$ . Получаваме

$$(4.186) \quad \Psi = \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi + \varepsilon \Psi_2 + \varepsilon^2 \Psi_3 + \dots$$

Съгласно (4.184)

$$r - \frac{1}{r} = 1 + \sqrt{\varepsilon} (2\sqrt{\beta t} \eta_k) - [1 - \sqrt{\varepsilon} (2\sqrt{\beta t} \eta_k) + \varepsilon 4\beta t \eta_k^2 + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})].$$

Следователно, като разположим (4.185) в Тейлъров ред в околността на точката  $r=1$ , получаваме

$$(4.187) \quad \begin{aligned}\Psi = 4\sqrt{\beta t} \sin \varphi \sqrt{\varepsilon} \eta_k - 4\beta t \varepsilon \eta_k^2 + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \eta_k^3) + \\ + \varepsilon \Psi_2 \Big|_{r=1} + \varepsilon (r-1) \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \Big|_{r=1} + \dots + \varepsilon^2 \Psi_3 \Big|_{r=1} + \dots\end{aligned}$$

Тъй като  $\varepsilon(r-1) = \varepsilon^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{\beta t} \eta_k$ , първият член (4.187) се среща с първия член от (4.185) и за  $\Psi_2$  получаваме граничното условие

$$(4.188) \quad \Psi_2 \Big|_{r=1} = -4 \sqrt{\frac{\beta t}{\pi}} \sin \varphi.$$

Решението на (4.164), което удовлетворява граничните условия (4.183), (4.188), има вида

$$(4.189) \quad \Psi_2(r, \varphi, t) = -4 \sqrt{\frac{\beta t}{\pi}} \frac{\sin \varphi}{r}.$$

Полученото потенциално течение е резултат от надбеляването на граничния слой и е известно като „изместващ ефект“.

За да намерим второто приближение в граничния слой, вземаме предвид, че съгласно (4.172)

$$\frac{\partial p_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} \Big|_{r=1} = - \frac{\partial U_2}{\partial t} \Big|_{r=1} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} \Big|_{r=1} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{r=1} + U_1 V_1 \Big|_{r=1},$$

където  $U_1$  и  $V_1$  се определят от (4.176) и

$$U_2 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = 4 \sqrt{\frac{\beta t}{\pi}} \frac{\sin \varphi}{r^2}.$$

Освен уравненията (4.169), (4.170) и условието за полевване  $u_2 = v_2 = 0$  функциите  $u_2$  и  $v_2$  трябва да удовлетворяват и условията за срастване, които се намират от срастването на  $u_1 + \epsilon u_2$  с  $U_1 + \epsilon U_2$  и  $\epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2$  с  $\Psi_1 + \epsilon \Psi_2 + \epsilon^2 \Psi_3$ . След известни пресмятания получаваме

$$(4.190) \quad u_2 = -4 \sqrt{\beta t} \sin \varphi \eta + 2 \sqrt{\frac{\beta t}{\pi}} \sin \varphi (2 - 2e^{-\eta^2} + 3 \sqrt{\pi} \eta \operatorname{erfc} \eta) + \\ + 4 \sin \varphi \cos \varphi f(\eta), \\ \psi_2 = -4 \beta t \sin \varphi \eta^2 + \frac{4 \beta t}{\sqrt{\pi}} \sin \varphi \left[ 2 \eta - \frac{\sqrt{\pi}}{4} (1 - \operatorname{erfc} \eta) + \right. \\ \left. + \frac{3 \sqrt{\pi}}{2} \eta^2 \operatorname{erfc} \eta - \frac{3 \eta}{2} e^{-\eta^2} + 8 \sqrt{\beta t} \cdot t \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] \sin \varphi \cos \varphi,$$

където  $\operatorname{erfc} \eta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$  и

$$\int_0^\eta f(\eta) d\eta = \frac{11}{6 \sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \operatorname{erfc} \eta - \frac{8}{3 \sqrt{2\pi}} \operatorname{erfc} \sqrt{2} \eta + \frac{\eta^3}{3} \operatorname{erfc}^2 \eta - \\ - \frac{2}{3 \sqrt{\pi}} \eta^2 e^{-\eta^2} \operatorname{erfc} \eta + \frac{1}{3\pi} \zeta e^{-2\eta^2} - \frac{\eta}{2} \operatorname{erfc} \eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{4}{9\pi} - \frac{3}{2} \right) e^{-\eta^2} - \\ - \left( 1 + \frac{4}{9\pi} \right) \eta^3 \operatorname{erfc} \eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{4}{9\pi} \right) \eta^2 e^{-\eta^2} + \frac{2}{3 \sqrt{\pi}} \operatorname{erfc} \eta + \\ + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi} \right) \eta \operatorname{erfc} \eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{8}{3 \sqrt{2}} - \frac{4}{9\pi} - 1 \right).$$

Като съберем вътрешното и външното разлагане и извадим общата им част, получена от срастването, намираме следното съставно равномерно валидно решение за токовата функция:

$$(4.191) \quad \psi = \sin \varphi \left( r - \frac{1}{r} \right) + \epsilon \cdot 4 \sqrt{\frac{\beta t}{\pi}} \sin \varphi \left( e^{-\eta^2} - \frac{1}{r} - \sqrt{\pi} \eta \operatorname{erfc} \eta \right) +$$



$$+ \epsilon^2 \cdot 4 \frac{\beta t}{\sqrt{\pi}} \sin \varphi \left[ -\frac{\sqrt{\pi}}{4} (1 - \operatorname{erfc} \eta) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \eta^2 \operatorname{erfc} \eta - \frac{3}{2} \eta e^{-\eta^2} \right] + \\ + \epsilon^2 8 \sqrt{\beta t} \cdot t \sin \varphi \cos \varphi \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta + O(\epsilon^3).$$

Началният стадий на развитие на граничния слой около тела е изследван в случая, когато скоростта на обтичащия поток се изменя по степенен закон относно времето. Посредством метода за срастване на асимптотичните разлагания са решени задачите за обтичане със скорост  $At^a$  на кръгов цилиндър (Сл. Славчев, 1975 г.), на два кръгови цилиндъра (П. Калицова-Куртева, З. Запрянов, 1985 г.) и на две сфери, когато посоката на обтичащия поток е успоредна на централата им (П. Калицова-Куртева, З. Запрянов, 1985 г.).

#### 4.6.2. Периодичен граничен слой.

##### Хармонични осцилации на кръгов цилиндър във вискозен флуид

Друг клас нестационарни флуидни движения, при които успешно се прилагат уравненията на нестационарния граничен слой, са *осцилиращите вискозни течения*. Оказва се, че под действието на силите на триене при малки амплитудни осцилации на тела във вискозен флуид възникват вторични стационарни течения въпреки чисто периодичния характер на движението на тялото.

Първъ Фарадей през 1831 г. експериментално открива съществуването на *стационарно течение около напречно осцилираща пластина в безкраен вискозен флуид*. Опит за теоретично обяснение на явлението прави Релей през 1884 г. По-късно, през 1932 г., Шлихтинг прилага теорията на нестационарния граничен слой, за да изследва теоретично флуидното течение, индуцирано от осцилациите на прав кръгов цилиндър в безкраен вискозен флуид. Тази задача се явява обобщение на втората основна задача на Стокс, в която се изследва флуидното течение, породено от хармоничните осцилации на равнина в собствената си равнина. Качественото различие на получените резултати от изследванията на тези две задачи ще бъде изяснено по-нататък.

**Решение на Шлихтинг.** Да предположим, че прав кръгов цилиндър с радиус  $a$  се намира във вискозен флуид, който извършва малки амплитудни осцилации със скорост  $U(x, t) = U_0(x) \cos \omega t$ . Считайки, че координатната система  $Oxy$  е неподвижно свързана с цилиндъра, граничните условия за решаване на задачата имат вида

$$(4.192) \quad u=0, \quad v=0 \text{ при } y=0;$$

$$(4.193) \quad u \rightarrow U_0(x) \cos \omega t \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Тъй като за амплитудата  $A$  предполагаме  $A = \frac{U_\infty}{\omega} \ll 1$ , то уравненията на граничния слой (4.137), (4.138) са приложими. Уравнението (4.137) е нелинейно и получаването на точно решение при произволно  $U_0(x)$  е трудно. Но ако честотата на осцилациите  $\omega$  е такава, че числото на Струхал  $St = \frac{\omega a}{U_\infty}$  е много голямо, то линейните членове в уравнението (4.137) са малки величини от втори ред в сравнение с линейните членове. Това е позволило на Шлихтинг да предложи решението на проблема за намиране на флуидното течение около осцилиращ цилиндър да се търси в следния вид:

$$(4.194) \quad u(x, y, t) = u_1(x, y, t) + \left( \frac{1}{\omega} \frac{dU_0}{dx} \right) u_2(x, y, t) + O(\omega^{-2}).$$

Като заместим (4.194) в уравнението (4.137), получаваме, че първото приближение удовлетворява уравненията

$$(4.195) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

$$(4.196) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0,$$

а второто —

$$(4.197) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y},$$

$$(4.198) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

За по-рационално извършване на пресмятанията ще представим скоростта  $U(x, t)$ , с която осцилира потенциалното течение около цилиндъра, в комплексен вид:

$$U(x, t) = U_0(x) e^{i\omega t},$$

като, разбира се, физически смисъл ще имат само реалните части на получените по-долу резултати.

Уравнението на непрекъснатостта (4.196) е удовлетворено, ако положим

$$(4.199) \quad \psi_1(x, y, t) = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} U_0(x) f_1(\eta) e^{i\omega t},$$

където

$$u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Следователно

$$u_1 = U_0(x) f_1'(\eta) e^{i\omega t}, \quad v_1 = -\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{dU_0}{dx} e^{i\omega t}.$$

За определяне на  $f_1'(\eta)$  от уравнението (4.195) и съответните гранични условия получаваме следната гранична задача:

$$(4.200) \quad if_1'(\eta) - f_1'''(\eta) = i;$$

$$(4.201) \quad f_1'(0) = 0;$$

$$(4.202) \quad f_1'(\infty) = 1.$$

Решението на уравнението (4.200), което удовлетворява граничните условия (4.201), (4.202), има вида

$$(4.203) \quad f_1'(\eta) = 1 - e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\eta}.$$

Следователно за реалната част на  $u_1$  получаваме

$$u_1 = U_0(x) \left[ \cos \omega t - e^{\frac{-\eta}{\sqrt{2}}} \cos \left( \omega t - \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

За да намерим второто приближение, използваме уравненията (4.197) и (4.198), като заместим  $u_1$  и  $v_1$  с равните им.

Поради нелинейността на конвективните членове в дясната страна на уравнението (4.197) се появява множителят  $\cos^2 \omega t$ .

Тъй като

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) = \text{стационарна част} + \text{нестационарна},$$

то в решението на (4.197) и (4.198) ще има стационарна и нестационарна част. Затова полагаме

$$(4.204) \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} U_0(x) [f_{2a}(\eta) e^{2i\omega t} + f_{2b}(\eta)].$$

Следователно

$$u_2 = U_0(x) [f_{2a}'(\eta) e^{2i\omega t} + f_{2b}'(\eta)],$$

$$v_2 = -\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{dU_0}{dx} [f_{2a}(\eta) e^{2i\omega t} + f_{2b}(\eta)].$$

Като заместим  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$ ,  $v_2$  в уравнението (4.197), за  $f_{2a}'$  и  $f_{2b}'$  получаваме следните две диференциални уравнения:

$$(4.205) \quad 2if_{2a}' - f_{2a}''' = \frac{1}{2} (1 - f_1'^2 + f_1 f_1'''),$$

$$(4.206) \quad -f_{2b}''' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} f_1' f_1' + \frac{1}{4} (f_1 \bar{f}_1'' + \bar{f}_1 f_1'').$$

Ще отбеджим, че чертата, поставена над някои величини, е кратко означение на съответните комплексно спрегнати величини.

Граничните условия за нестационарната част на второто приближение  $f_{2a}(\eta)$  се дават от условията за полепване върху тялото и  $f_{2a}' \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \infty$ .

Така за нестационарната част на второто приближение на решението Шлихтинг получава

$$(4.207) \quad u_2^{\text{нест.}} = U_0(x) \left[ -\frac{i}{2} e^{-(1+i)\eta} + \frac{i}{2} e^{-\frac{1+i}{2}\eta} - \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \eta e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta} \right].$$

Що се отнася до граничните условия за стационарната част на второто приближение  $f_{2b}$ , естествено е да се изисква отново да бъдат удовлетворени условията за полепване върху тялото и освен това  $f'_{2b}(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . При тези гранични условия обаче уравнението (4.206) не може да се реши. Затова Шлихтинг отстъпва от граничното условие — стационарната част на тангенциалната компонента на скоростта да се анулира на големи разстояния от тялото, и го заменя с условието тази скорост да приема крайна стойност при  $\eta \rightarrow \infty$ . Това позволява на Шлихтинг да реши проблема.

За тангенциалната компонента на скоростта на стационарната част от течението той получава

$$(4.208) \quad u_2^{\text{ст.}} = U_0(x) \left[ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-\frac{2\eta}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \eta e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \left( \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

Тази формула показва, че на големи разстояния от тялото, т. е. извън граничния слой, съществува стационарно течение, скоростта на което в направление на осцилациите на външния поток е равна на

$$u_2^{\text{ст.}} = -\frac{3}{4} U_0(x).$$

Полученият резултат е забележителен с това, че в едно нестационарно течение, предизвикано от хармонични осцилации на флуидните частици, се появява не само граничен слой, но и вторично стационарно течение извън него. Това допълнително течение е един нелинеен ефект, проявяващ се при хармоничните осцилации на кръгов цилиндър във вискозен флуид.

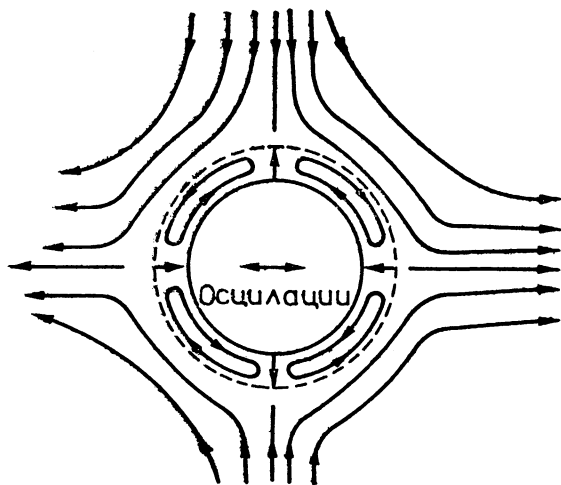
Картината на вторичното стационарно течение, породено от хоризонталните хармонични осцилации на кръгов цилиндър във вискозен флуид е дадено на фиг. 35 (Шлихтинг, 1932 г.). В граничния слой има стационарно циркулиращо течение, а извън него — стационарен вихър.

Ще отбележим, че при втората основна задача на Стокс, в която се изследва флуидното течение, породено от хармоничните осцилации на равнина в собствена равнина, такова стационарно течение не се появява, защото решаваната там задача е линейна.

Проблемът за хармоничните осцилации на други тела (сфера, елиптичен цилиндър и др.) във вискозен флуид е изследван от много други автори. Интересът към този вид нестационарни течения е свързан именно с възможността за получаване на стационарни циркулиращи течения, които спомагат за размесването

на флуидните частици в потока и за осъществяването на по-добър контакт между тях, който от своя страна съдействува за интензифицирането на топло-масообмена в редица химикотехнологични процеси.

**Високочестотни трансационни осцилации на сфера.** Приближения от по-висок ред. Да разгледаме флуидно вискозно течение, осцилиращо на безкрайност със скорост  $U_0 \cos \omega t$ , където  $U_0$  е характерна скорост и  $\omega$  — честота на осцилациите. Нека във флуида е потопена твърда сфера с радиус  $a$ , неподвижно свързана със сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$ , така че



Фиг. 35

началото ѝ да бъде в центъра на сферата и линията  $\theta=0$  да съвпада с оста на осцилациите. Тази задача е ососиметрична — картината на течението е една и съща във всички равнини  $\varphi = \text{const.}$  За простота да въведем означенията  $v'_r = u'$ ,  $v'_\theta = v'$ . Изхождаме от уравненията на Навие — Стокс в сферични координати (1.85), (1.86). Като изключим налягането и вземем предвид, че уравнението на непрекъснатостта се удовлетворява автоматично при

$$(4.209) \quad u' = \frac{1}{r'^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi'}{\partial \theta}, \quad v' = -\frac{1}{r' \sin \theta} \frac{\partial \Psi'}{\partial r'},$$

за функцията  $\Psi'$  получаваме уравнението

$$(4.210) \quad \frac{\partial}{\partial t} (D^2 \Psi') + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial (\Psi', D^2 \Psi')}{\partial (r', \beta)} + \frac{2}{r'^2} D^2 \Psi' L \Psi' = \nu D^4 \Psi'.$$

$$\text{Тук } D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1-\beta^2}{r'^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L \equiv \frac{\beta}{1-\beta^2} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \beta},$$

$\beta = \cos \theta$  и  $\nu$  е кинематичният вискозитет на флуида. Полагаме

$$u' = a U_0 u, \quad v' = U_0 v, \quad \Psi' = a^2 U_0 \Psi, \quad r' = ar, \quad t = \frac{\tau}{\omega},$$

обезразмеряваме уравнението (4.210) и получаваме

$$(4.211) \quad M^2 \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \Psi) + \text{Re} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\Psi, D^2 \Psi)}{\partial (r, \beta)} + \frac{2}{r^2} D^2 \Psi L \Psi \right] = D^4 \Psi,$$

или

$$(4.212) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \Psi) + \varepsilon \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\Psi, D^2 \Psi)}{\partial (r, \beta)} + \frac{2}{r^2} D^2 \Psi L \Psi \right] = \\ = \frac{1}{M^2} D^4 \Psi,$$

където

$$M^2 = \frac{a^2 \omega}{\nu}, \quad \text{Re} = \frac{U_0 a}{\nu}.$$

Граничните условия върху сферата са

$$(4.213) \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=1,$$

а на безкрайност

$$(4.214) \quad \Psi = \frac{1}{2} r^2 (1 - \beta^2) e^{i\tau} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Ще предпологаме, че амплитудата на осцилациите  $\frac{U_0}{\omega}$  е малка в сравнение с радиуса на сферата  $a$ , т. е. величината  $\varepsilon = \frac{U_0}{\omega a}$  може да се разглежда като малък параметър. При високочестотните осцилации  $M^2 = \frac{\omega a^2}{\nu} \gg 1$ , а при нискочестотните —  $M^2 = \frac{\omega a^2}{\nu} \ll 1$ . От уравнението (4.212) следва, че при високочестотните осцилации ( $M^2 \gg 1$ ) около сферата се образува нестационарен граничен слой с дебелина  $O(M^{-1})$ . Ако умножим (4.211) с  $\varepsilon^2$ , получаваме

$$(4.215) \quad \text{Re}_s \frac{\partial (D^2 \Psi)}{\partial \tau} + \varepsilon \text{Re}_s \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\Psi, D^2 \Psi)}{\partial (r, \beta)} + \frac{2}{r^2} D^2 \Psi L \Psi \right] = \varepsilon^2 D^4 \Psi,$$

където величината  $\varepsilon^2 M^2$  е означена с  $\text{Re}_s$ . Тъй като  $\text{Re} = \frac{U_0 a}{\nu} = \varepsilon M^2$ , то  $\text{Re}_s = \varepsilon \text{Re}$ .

Ще покажем, че безразмерното число  $\text{Re}_s = \frac{\varepsilon U_0 a}{\nu}$  характеризира стационарно течение, чиято скорост е от порядъка на  $O(\varepsilon U_0)$ . Ще разгледаме течението на флуида при високочестотни осцилации, т. е. при  $M = \frac{\omega a^2}{\nu} \gg 1$ . Да приложим метода за срастване на асимптотичните разлагания. Търсим токовата функция в граничния слой и вън от него във вид на асимптотични редове:

$$(4.216) \quad \psi = \psi_1 + \varepsilon \psi_2 + \dots$$

$$(4.217) \quad \Psi = \Psi_1 + \varepsilon \Psi_2 + \dots$$

Като заместим токовата функция  $\Psi$  от (4.217) в уравнението (4.215) и приравним коефициентите пред  $\varepsilon^0$ , получаваме, че  $\Psi_1$  удовлетворява уравнението

$$(4.218) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \Psi_1) = 0.$$

Тъй като  $\Psi_1$  е периодична функция, от (4.218) следва, че

$$(4.219) \quad D^2 \Psi_1 = 0.$$

Освен уравнението (4.219) функцията  $\Psi_1$  трябва да удовлетворява и граничното условие

$$(4.220) \quad \Psi_1 = \frac{1}{2} r^2 (1 - \beta^2) e^{i\tau} \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Както знаем, решението (4.219), удовлетворяващо граничното условие (4.220), има вида

$$(4.221) \quad \Psi_1 = \left( \frac{1}{2} r^2 + \frac{2c}{r} \right) (1 - \beta^2) e^{i\tau}.$$

Неизвестната константа  $c$  ще бъде определена от условието за съравнение с решението в областта на граничния слой.

Съгласно (4.215) дебелината на граничния слой около сферата е равна на  $\epsilon/\sqrt{\text{Re}_s}$ . Въвеждаме нова „разтегната“ променлива в граничния слой

$$(4.222) \quad \zeta = (r-1) \frac{\sqrt{\text{Re}_s}}{\epsilon \sqrt{2}} = (r-1) \frac{M}{\sqrt{2}}.$$

За да намерим връзката между токовата функция в граничния слой ( $\psi$ ) и външната област ( $\Psi$ ), заместваме (4.222) в (4.209). Тъй като при  $M \rightarrow \infty$  компонентите на скоростта  $u$  и  $v$  в граничния слой не трябва да се анулират, получаваме

$$(4.223) \quad \psi = \Psi \frac{M}{\sqrt{2}}.$$

От (4.222) и (4.223) следва, че относно новите променливи  $\zeta$  и  $\psi$  уравнението (4.215) добива вида

$$(4.224) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right) + \epsilon \left[ \frac{\partial \left( \psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right)}{\partial (\zeta, \beta)} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \cdot \frac{\beta}{1 - \beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right] = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \zeta^4}.$$

Тогава  $\psi_1$  удовлетворява уравнението

$$(4.225) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \zeta^4} = 0.$$

Съгласно (4.213) граничните условия за  $\psi_1$  върху сферата се записват така:

$$(4.226) \quad \psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} = 0 \text{ при } \eta = 0.$$

Като положим  $\psi_1 = f(\zeta)(1 - \beta^2) e^{i\tau}$ , получаваме, че  $f(\zeta)$  удовлетворява следното уравнение:

$$(4.227) \quad f^{IV} - 2if'' = 0.$$

За общото решение на (4.227) получаваме

$$f(\zeta) = C_1 + C_2 \zeta + C_3 e^{(1+i)\zeta} + C_4 e^{-(1+i)\zeta}.$$

Тогава

$$(4.228) \quad \psi_1 = [C_1 + C_2 \zeta + C_3 e^{(1+i)\zeta} + C_4 e^{-(1+i)\zeta}] (1 - \beta^2) e^{i\tau}.$$

От условието за срастване на решенията в граничния слой и извън него намираме

$$(4.229) \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}.$$

Използвайки граничните условия (4.226) и условието за срастване (4.229), намираме

$$C_1 = -\frac{3}{4}(1-i), \quad C_2 = \frac{3}{2}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{3}{4}(1+i), \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Следователно

$$(4.230) \quad \psi_1 = \frac{3}{2} \left[ \zeta - \left( \frac{1-i}{2} \right) (1 - e^{-(1+i)\zeta}) \right] (1 - \beta^2) e^{i\tau},$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} \left( r^2 - \frac{1}{r} \right) (1 - \beta^2) e^{i\tau}.$$

**Второ приближение.** От (4.216) и (4.224) след приравняване на коефициентите пред  $\varepsilon^1$  намираме следното уравнение за  $\psi_2$ :

$$(4.231) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \zeta^4} = - \left[ \frac{\partial \left( \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \zeta^2} \right)}{\partial (\zeta, \beta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\beta}{1-\beta^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \right].$$

Тъй като само реалната част на  $\psi_2$  има физически смисъл, преобразуваме дясната страна, като вземем предвид, че реалната част на произведение на две комплексни числа не е равна на произведението на реалните им части. Получаваме

$$(4.232) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \zeta^4} = 9\beta (1 - \beta^2) e^{-\zeta} \left\{ i \left( \zeta - \frac{1}{2} \right) (e^{-i\zeta} + \right.$$

$$\left. + e^{i(2\tau - \zeta)}) - \frac{e^{i(2\tau - \zeta)} - e^{-i\zeta}}{2} + \frac{e^{-\zeta}}{2} [1 + e^{2i(\tau - \zeta)} (1 + i)] \right\}.$$



В дясната страна на това уравнение има чисто стационарни членове и членове, които съдържат множителя  $e^{2i\tau}$ . Затова полагаме

$$(4.233) \quad \psi_2 = -\frac{1}{2} [x_{20}(\zeta) + x_{22} e^{2i\tau}] \beta (1 - \beta^2).$$

Като заместим (4.233) в (4.232), получаваме, че  $x_{20}$  удовлетворява уравнението

$$(4.234) \quad x_{20}^{IV} = -18 e^{-\zeta} \left[ i \zeta e^{-i\zeta} - \frac{e^{-\zeta}}{2} + \frac{1+i}{2} e^{-i\zeta} \right].$$

Функцията  $x_{20}(\zeta)$  трябва да удовлетворява граничните условия върху сферата

$$(4.235) \quad x_{20}(\zeta) = x'_{20}(\zeta) = 0 \quad \text{при } \zeta = 0$$

и условията за срастване

$$(4.236) \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} [x_{20} \beta (1 - \beta^2)] = \lim_{r \rightarrow 1} \Psi_2(r),$$

$$(4.237) \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} [x'_{20} \beta (1 - \beta^2)] = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial \Psi_2(r)}{\partial r}.$$

Общото решение на (4.234) има вида

$$\begin{aligned} x_{20}(\zeta) = & A_1 + A_2 \zeta + A_3 \zeta^2 + A_4 \zeta^3 + \frac{9}{2} i \zeta e^{-(1+i)\zeta} + \\ & + \frac{9}{4} (5 + 3i) e^{-(1+i)\zeta} + \frac{3}{16} e^{-2\zeta}. \end{aligned}$$

Аналогично получаваме, че  $x_{22}(\zeta)$  удовлетворява уравнението

$$(4.238) \quad 4i x_{22}'' - x_{22}^{IV} = 18 e^{-\zeta} \left[ i \left( \zeta - \frac{1}{2} \right) e^{-i\zeta} - \frac{e^{-i\zeta}}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1+i}{2} e^{-(1+2i)\zeta} \right],$$

граничните условия

$$(4.239) \quad x_{22}(\zeta) = x'_{22}(\zeta) = 0 \quad \text{при } \zeta = 0$$

и условията за срастване

$$(4.240) \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} x_{22} \beta (1 - \beta^2) = \lim_{r \rightarrow 1} \Psi_3^{(u)}(r),$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} x'_{22} \beta (1 - \beta^2) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Общото решение на (4.238) се записва така:

$$\begin{aligned} x_{22}(\zeta) = & B_1 + B_2 \zeta + B_3 e^{-(1+i)\zeta \sqrt{2}} + B_4 e^{(1+i)\zeta \sqrt{2}} - \\ & - \frac{9}{2} i \zeta e^{-(1+i)\zeta} + \frac{9}{4} (1+i) e^{-(1+i)\zeta} + \frac{9}{32} (1+i) e^{-2(1+i)\zeta}. \end{aligned}$$

Да намерим сега второто приближение във външната област. Като заместим (4.217) в (4.215) и приравним коефициентите  $\epsilon^1$ , получаваме

$$(4.241) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \Psi_2) = 0.$$

Граничното условие за  $\Psi_2$  на безкрайност се записва така:

$$(4.242) \quad \Psi_2 \sim O(r^2) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Освен това  $\Psi_2$  трябва да удовлетворява и условията за състване с решението в граничния слой

$$(4.243) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \Psi_2 = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\phi_1 \sqrt{2}}{\sqrt{\text{Re}_s}}.$$

Функцията  $\Psi_2$  търсим във вида

$$(4.244) \quad \Psi_2 = F(r, \beta) + \Phi(\tau) \cdot G(r, \beta),$$

където  $G$  удовлетворява уравнението

$$(4.245) \quad D^2 G = 0.$$

От условието за състване (4.242) намираме

$$\Psi_2 = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_s}} \cos\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right) (1 - \beta^2) \beta \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

Това показва, че

$$(4.246) \quad \Phi(\tau) = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_s}} \cos\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right), \quad \lim_{r \rightarrow 1} F(r, \beta) = 0$$

и

$$(4.247) \quad \lim_{r \rightarrow 1} G(r, \beta) = \beta (1 - \beta^2).$$

Като вземем предвид (4.242), (4.245) и (4.247), получаваме

$$(4.248) \quad G(r, \beta) = \frac{\beta (1 - \beta^2)}{r}.$$

Тъй като в условията за състване (4.236), (4.237) и (4.240) участва функцията  $\Psi_3$ , засега не можем да определим  $F(r, \beta)$ . След приравняване на коефициентите пред  $\varepsilon^2$  в (4.215) намираме, че  $\Psi_3$  удовлетворява уравнението

$$(4.249) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \Psi_3) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \beta} (D^2 \Psi_2) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial r} (D^2 \Psi_2) + 2 D^2 \Psi_2 L \Psi_1 \right] = 0.$$

Но  $D^2 \Psi_2$  не зависи от  $\tau$  (вж. (4.241)), а  $\Psi_1$  е пропорционално на  $\cos \tau$ . Следователно съгласно (4.249)  $D^2 \Psi_3$  има вида

$$(4.250) \quad D^2 \Psi_3 = F_1(r, \beta) + G_1(r, \beta) \sin \tau,$$

където  $G_1(r, \beta)$  може да се намери, ако  $F(r, \beta)$  е известна. Затова няма да решаваме уравнението (4.250), а ще запишем уравнението за  $\Psi_4$ . Като използваме (4.215), от (4.217) получаваме

$$(4.251) \quad \text{Re}_s \frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \Psi_4) + \frac{\text{Re}_s}{r^2} \left[ \frac{\partial (\Psi_1, D^2 \Psi_3)}{\partial (r, \beta)} + 2 D^2 \Psi_3 L \Psi_1 \right] +$$

$$+ \frac{Re_s}{r^2} \left[ \frac{\partial (\Psi_2, D^2 \Psi_2)}{\partial (r, \beta)} + 2D^2 \Psi_2 L \Psi_2 \right] = D^4 \Psi_2.$$

Окзва се, че от това уравнение може да се получи уравнението за функцията  $F(r, \beta)$ .

Знаем, че  $\Psi_1$  е пропорционална на  $\cos \tau$ ,  $D^2 \Psi_2$  не зависи от  $\tau$  и  $D^2 \Psi_3$  има вида (4.250). Предполагаме, както в оригиналната работа на Райли (1966 г.), че  $\frac{\partial}{\partial \tau} (D^2 \Psi_4)$  не съдържа стационарна част. Тогава от членовете, независещи от времето в (4.251), получаваме следното уравнение за  $F(r, \beta)$ :

$$(4.252) \quad \frac{Re_s}{r^2} \left[ \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \beta} (D^2 F) - \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial r} (D^2 F) + 2D^2 F L F \right] = D^4 F.$$

Вижда се, че параметърът  $Re_s = \varepsilon Re$  може да се разглежда като число на Рейнолдс на стационарната част на течението, имаща характерна скорост  $O(\varepsilon U_0)$ . Когато  $Re_s \gg 1$ , наред с нестационарния граничен слой се появява и стационарен граничен слой с дебелина  $O\left(Re_s^{-\frac{1}{2}}\right)$ , в който стационарното течение затихва. Когато  $Re_s = O(1)$  или  $Re_s \ll 1$ , завихреността около тялото дифузира по цялото течение.

Да разгледаме случая  $Re_s \ll 1$ . Тогава уравнението (4.252) добива по-простия вид

$$(4.253) \quad D^4 F = 0.$$

За граничните условия на  $F(r, \beta)$  имаме:

$$(4.254) \quad F(r, \beta) \sim O(r^2) \quad \text{при } r \rightarrow \infty;$$

$$(4.255) \quad \lim_{r \rightarrow 1} F(r, \beta) = 0,$$

$$(4.256) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial F}{\partial r} = \left[ \frac{45}{16} + 3A_4 \zeta^2 \right] \beta (1 - \beta^2).$$

Следователно  $A_4 = 0$ . Решението на (4.253), удовлетворяващо условията (4.254)–(4.256), има вида

$$(4.257) \quad F = \left( \frac{a_1}{r^2} + b_1 \right) \beta (1 - \beta^2).$$

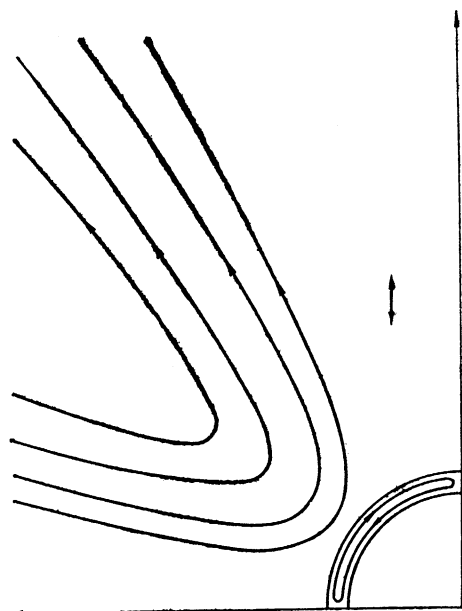
Тъй като

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{2a_1}{r^3} \beta (1 - \beta^2),$$

от (4.256) следва, че  $a_1 = -\frac{45}{32}$ . Използувайки (4.255), намираме, че  $b_1 = \frac{45}{32}$ . Следователно

$$F(r) = \left( -\frac{45}{32} \frac{1}{r^2} + \frac{45}{32} \right) \beta (1 - \beta^2).$$

По такъв начин, като удовлетворим граничните условия и условията за съравнение за  $x_{20}(\zeta)$ ,  $x_{22}(\zeta)$  и  $\Psi_2$ , получаваме



Фиг. 36

$$x_{20}(\zeta) = -\frac{21}{16} + \frac{5}{8} \zeta + \frac{1}{16} e^{-2\zeta} + \frac{5}{4} e^{-\zeta} \cos \zeta + \frac{3}{4} e^{-\zeta} \sin \zeta + \frac{3}{2} e^{-\zeta} \sin \zeta,$$

$$x_{22}(\zeta) = \frac{9\sqrt{2}-9}{32} (1+i) - \frac{9\sqrt{2}}{32} (1+i) e^{-(1+i)\zeta\sqrt{2}} + \frac{1}{4} (1+i) e^{-(1+i)\zeta} + \frac{1}{32} (1+i) e^{-2(1+i)\zeta} - \frac{i}{2} \zeta e^{-(1+i)\zeta},$$

$$\Psi_2 = -\frac{45}{32} \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right) \beta (1 -$$

$$-\beta^2) - \frac{3}{2r} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_s}} \cos\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right) \beta (1 - \beta^2).$$

Картината на вторичното стационарно течение, индуцирано от трансляционните хармонични осцилации на сфера във вискозен флуид, е дадена на фиг. 36 (Райли, 1966 г.).

В научната литература са решени и много други задачи от осцилиращи течения. Изследвано е по-специално хидродинамичното взаимодействие на две сфери в осцилиращ поток в успоредно или перпендикулярно направление на централата им (С. Табакова, З. Запрянов, 1982 г.).

#### § 4.7. ВЪЛНОВИ ТЕЧЕНИЯ СЪС СВОБОДНА ГРАНИЦА

Идеята на Прантъл за граничния слой като приближен модел на пълната задача, описваща вискозните течения, се оказва ползотворна и за теченията със свободни граници. В частност в приближение на граничен слой се разглеждат и вълновите движения в тънки слоеве и струи.

Нека по вертикална повърхност под действието на силата на тежестта тече вискозна течност. Ще считаме, че повърхността на

слоя е свободна, т. е. върху нея не действа силата на триене на въздуха. Да насочим оста  $x$  по продължение на стената в направление на силата на тежестта, а оста  $y$  — перпендикулярно на нея и насочена към течността. В този случай е възможно стационарно плоско течение, което се описва от формулите (2.51) с параболичен профил на скоростта и постоянно налягане:

$$(4.258) \quad U = -\frac{\rho g}{\mu} \left( \frac{y^2}{2} - ly \right),$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_a$$

$$h = l = \text{const.}$$

Експериментално е установено, че теченията, които се описват от формулите (4.258), се наблюдават само при малък дебит на течността. Увеличаването на дебита в слоя води до преход към вълнов режим на движението на течността, който е по-устойчив от плоскопаралелното течение (4.258).

Да разгледаме установеното вълново течение (В. Я. Шкадов, 1967 г.). Въвеждаме безразмерните променливи

$$(4.259) \quad t = \frac{\alpha U_0}{l} \bar{t}, \quad x = \frac{\alpha}{l} \bar{x}, \quad y = \frac{1}{l} \bar{y},$$

$$u = \frac{1}{U_0} \bar{u}, \quad v = \frac{\alpha}{U_0} \bar{v}, \quad h = \frac{1}{l} \bar{h},$$

$$p = \frac{1}{\rho U_0^2} (\bar{p} - \bar{p}_a).$$

Размерните величини са отбелязани с чертичка и за характерна скорост на течността е взета величината

$$(4.260) \quad U_0 = \frac{\rho g h^2}{3\mu}.$$

Пълната система уравнения на Навие—Стокс (1.50) и уравнението на непрекъснатостта (1.10) се записват в следния вид:

$$(4.261) \quad u_t + uu_x + vv_y = -p_x + \frac{1}{\alpha \text{Re}} (u_{yy} + \alpha^2 u_{xx}) + H,$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -\frac{1}{\alpha^2} p_y + \frac{1}{\alpha \text{Re}} (v_{yy} + \alpha^2 v_{xx}),$$

$$u_x + v_y = 0.$$

Тук граничните условия на свободната повърхност (1.87), (1.89) се записват във вида

$$(4.262) \quad u_y + \alpha^2 \left( v_x + \frac{4h_x}{1 - \alpha^2 h_x^2} v_y \right) = 0,$$

$$p - 2 \frac{\alpha}{\text{Re}} \frac{1 + \alpha^2 h_x^2}{1 - \alpha^2 h_x^2} v_y = -\frac{\alpha^2}{w} \frac{h_{xx}}{(1 + \alpha^2 h_x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$h_t + uh_x = v, \quad y = h(x, t).$$

Да се ограничим с разглеждането на дълги вълни, като направим предположението  $\alpha^2 \ll 1$ . Числото на Рейнолдс  $Re = \frac{3U_0 l}{\nu}$  ще считаме за умерено голямо ( $\alpha Re \sim 1$ ). За да не отпадне членът, свързан с повърхностното напрежение, ще приемем оценката

$$(4.263) \quad \frac{\alpha^2}{w} \sim 1.$$

Това означава, че числото на Вебер  $We = \frac{\rho U_0^2 l}{\sigma}$  е достатъчно малко; в (4.261) участва също и величината  $H = \frac{1}{Fr\alpha}$ , където  $Fr = \frac{U_0^2}{gl}$  е числото на Фруд.

Да изоставим членовете в (4.261), (4.262), които са от порядъка на  $\alpha^2$ . Така получаваме система уравнения, която съвпада с уравненията на граничния слой:

$$(4.264) \quad u_t + uu_x + vv_y = -p_x + \frac{1}{\alpha Re} u_{yy} + H,$$

$$0 = -p_y$$

$$u_x + v_y = 0.$$

Граничните условия също се опростяват:

$$(4.265) \quad u_y = 0,$$

$$p = -\frac{\alpha^2}{w} h_{xx},$$

$$h_t + uh_x = v, \quad y = h(x, t).$$

Задачата (4.264), (4.265), допълнена с условията за полепване, може да се реши числено, като се търси периодично по  $x$  и по  $t$  решение, съответстващо на стационарни вълни. Тя може да се сведе и към по-проста задача. Намерените решения на (4.264), (4.265), а също и експерименталните измервания при вълновите течения показват, че и при вълновите движения профилът на надлъжната скорост се различава несъществено от параболичния профил. Затова да положим

$$(4.266) \quad u = 3U(x, t) \left[ \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right].$$

Изразът (4.266) удовлетворява граничните условия при  $y=0$  и  $y=h$ . Да определим напречната скорост  $v$  от уравнението на непрекъснатостта:

$$(4.267) \quad v = - \int_0^y u_x dy.$$

Заместваме (4.266), (4.267) в първото уравнение на (4.264) и го

интегрираме в граници  $0 \leq y \leq h$ . Така получаваме следното уравнение:

$$(4.268) \quad \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{12}{5} \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{6}{5} \frac{q^2}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x} - G \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - H - \mathcal{E} \frac{q}{h^3} = 0.$$

За дебита на течността в слоя имаме

$$q = \int_0^h u dy = Uh.$$

Лесно се вижда, че кинематичното уравнение на повърхността за  $h(x, t)$  се свежда към

$$(4.269) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

За функциите  $h(x, t)$  и  $q(x, t)$  получаваме две уравнения — (4.268) и (4.269). Тази система съдържа за параметри следните величини:

$$G = \frac{9\alpha^2 \gamma R_0^{1/3}}{R^2}, \quad H = \frac{g R_0}{\alpha R^2}, \quad \mathcal{E} = \frac{g}{R \alpha^3},$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{\rho} (\gamma^4 g)^{-\frac{1}{3}}, \quad R_0 = \frac{g l^3}{v^2}.$$

Да приложим уравнението (4.268) за течения с постоянна дебелина и постоянен дебит, което е динамически възможно при всяко число Re. От (4.268) за този случай имаме

$$(4.270) \quad H = \mathcal{E}, \quad R_0 = R.$$

Ясно е, че вълновите движения зависят от три параметъра:  $\gamma$ ,  $R$  и  $\alpha$ , като  $\gamma$  характеризира физическите свойства на течността,  $R$  — средния дебит и  $\alpha$  — дължината на вълната. За дадена течност при фиксиран дебит вълновите решения трябва да са еднопараметрично семейство.

Да разгледаме вълновите решения за системата (4.268), (4.269). За целта да въведем координата, свързана с бягащата вълна:

$$\xi = x - ct,$$

и да търсим решение от вида  $h = h(\xi)$ ,  $q = q(\xi)$ . Преди всичко, като интегрираме (4.269), намираме

$$(4.271) \quad q = ch + q_0 - C.$$

За дебелината на слоя да запишем разлагането

$$(4.272) \quad h = 1 + \rho \sin \xi + \rho^2 (\varphi_{20} \sin 2\xi + \varphi_{21} \cos 2\xi) + \dots$$

В решението (4.272) предварително са отбелязани следните обстоятелства: средната дебелина на слоя се приема да бъде равна на единица. Ако положим  $q_0 = 1$ , при такъв избор на средните величини равенството (4.270) ще се нарушава и величината  $R_0$

следва да се счита за неизвестна. Изместването на фазата  $\xi$  не влияе на вълновото решение, затова в (4.272) е изоставен членът, съдържащ  $\cos \xi$ . Амплитудата на решението  $\rho$  приема най-голяма стойност, поради което е удобно предварително да се вземе предвид порядъкът на членовете в (4.272).

Замествайки (4.271), (4.272) в уравнението (4.268) и приравнявайки на нула изразите пред различните хармоники  $\sin k\xi$ ,  $\cos k\xi$  ( $k=0, 1, 2$ ), получаваме следната система уравнения за  $\rho$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\varphi_{21}$ ,  $c$ ,  $R_0$ :

$$(4.273) \quad A\rho^2 + \frac{2}{3} r = 0,$$

$$4(1-\rho)\rho^{-2} - 12A\varphi_{20} - 4(13+B)\varphi_{21} + 3 + B = 0,$$

$$4D\rho^{-2} - 12A\varphi_{21} + 4(13+B)\varphi_{20} + 3A = 0,$$

$$2(4-\rho)\varphi_{21} + D\varphi_{20} - \frac{1}{3}(3+2B) = 0,$$

$$D\varphi_{21} - 2(4-\rho)\varphi_{20} - \frac{3}{2}A = 0.$$

Поради нелинейния характер на уравненията (4.268) необходимо е предварително преобразуване на произведенията от хармониките. Коефициентите на системата (4.273) се изразяват по следния начин чрез основните параметри на задачата:

$$\rho = \frac{5c^2 - 12c + 6}{45\gamma R_0^{\frac{1}{3}} \alpha^2} R^2, \quad r = \frac{R_0 - R}{\gamma R_0^{\frac{1}{3}} \alpha^3}, \quad D = \frac{3R_0 - cR}{\gamma R_0^{\frac{1}{3}} \alpha^3},$$

$$A = \frac{R_0^{\frac{2}{3}}}{\gamma \alpha^3}, \quad B = \frac{c^2}{5c^2 - 12c + 6} \rho.$$

Нелинейната система (4.273) се решава числено. При всяка двойка стойности  $R$ ,  $\gamma$  съществува еднопараметрично семейство решения  $\rho$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\varphi_{21}$ ,  $c$ ,  $R_0$ , зависещи от параметъра  $\alpha$ . Тези решения имат следното по-важно свойство: амплитудата на вълната при изменение на  $\alpha$  започва да расте от нулата, достига максимума при някоя стойност на  $\alpha_m$  и отново намалява. Средната дебелина на слоя, която се определя от стойността  $R_0$ , е минимална при тази стойност на  $\alpha_m$ . В равнината  $\alpha$ ,  $R$  вълновите решения, които притежават свойството оптималност, се изобразяват в точките върху крива, наричана „крива на оптималните режими“. В таблицата са дадени решенията на системата (4.273), които отговарят на оптималните режими. Изчисленията са извършени за вода при нормална температура. Използвайки стойностите  $\rho$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\varphi_{21}$ , за всяка стойност на  $R$  съгласно (4.272) може да се построи формата на вълната. В таблицата са дадени също стойностите на вълновото число и фазовата скорост. Тези разчетни данни съответствуват на експерименталните измервания (П. Л. Капица, 1948 г.).



$c$	$p$	$-10p^2\varphi_{20}$	$10p^2\varphi_{21}$
2,945	0,080	0,159	0,036
2,760	0,174	0,328	0,159
2,569	0,241	0,435	0,292
2,401	0,234	0,520	0,424
2,268	0,334	0,561	0,529
2,161	0,565	0,601	0,627
2,078	0,390	0,618	0,705
2,010	0,410	0,626	0,773
1,955	0,427	0,628	0,832
1,909	0,441	0,626	0,885
1,871	0,452	0,620	0,941
1,839	0,426	0,611	0,972
1,810	0,471	0,605	1,014
1,786	0,478	0,598	1,053
1,746	0,490	0,575	1,116

#### § 4.3. ТЕМПЕРАТУРЕН ГРАНИЧЕН СЛОЙ ПРИ ЕСТЕСТВЕНА КОНВЕКЦИЯ

Съществуват три начина за пренасяне на топлина във флуидите *топлопроводност, излъчване и конвекция*. Пренасяне на топлина чрез теплопроводност възниква при наличието на разлика между температурите в различните части на течностите или газовете и е свързано с движението на микроскопичните частици (молекулите) на флуида. При втория начин за пренасяне на топлина излъчването се извършва във вид на електромагнитни вълни. Топлината, предадена от едно място на друго чрез излъчване, преминава през вакуум или среда, която поглъща, отразява или пропуска излъчването. Пренасянето на топлина чрез конвекция се дължи на движението и механичното смесване на различните части на флуида. Конвекцията неизбежно се съпътствува от теплопроводност, като предаването на енергия от един флуиден елемент на друг се осъществява чрез теплопроводност. Причината за доближаването на тези елементи и по-бързия обмен на топлина между тях е конвекцията. По такъв начин относителното движение на различните части във флуида (*конвекцията*) създава допълнителен механизъм за пренасяне на енергия.

Различаваме *два вида конвекция* — *принудена и свободна (естествена)*. Ако движението на флуида възниква под действието на външни фактори, например под действието на помпа, вентилатор, вятър или външно обтичане на нагрятото твърдо тяло и др., конвекцията се нарича *принудена*. Когато движението на флуида не се дължи на наложени отвън течения, а на нехомогенност на масовите сили в гравитационното поле, т. е. на разликата в плътностите на флуидните частици, дължаща се на разликата в техните температури, говорим за *естествена конвекция*. Разликата в плътностите създава архимедова подемна сила, под

действието на която възниква флуидно течение. Движението на флуида пренася топлина от по-нагнетите му части към по-слабо нагнетите и по този начин изравнява температурата на флуидните частици в разглеждания обем. Могат да се посочат много примери на свободна конвекция — движението на въздуха около нагрятата вертикална пластина, циркулацията на въздуха в атмосферата или в затоплено помещение и др.

Разликата между естествената и принудената конвекция е в характера на съответните флуидни течения. При принудената конвекция наложеното външно течение е известно, а при естествената конвекция течението възниква в резултат на взаимодействието на разликата в плътностите на флуидните частици с гравитационното поле на масовите сили и трябва да се определи от съвместното разглеждане на топлемасообменните и динамичните процеси. В повечето случаи скоростите на теченията при естествената конвекция са много по-малки в сравнение със скоростите при принудената конвекция.

В практиката се налага да се разглеждат сложни течения, които са резултат от едновременното действие на принудената и естествената конвекция. Тогава казваме, че има *смесена конвекция*.

В случая на естествена конвекция в гравитационно поле външната сила  $F$ , участваща в уравненията на Навие—Стокс, се определя по формулата  $\vec{F} = \rho \vec{g}$ , където  $\vec{g}$  е земното ускорение. По такъв начин посредством изменението на плътността промените в температурата водят до промени в скоростта на индуцираното течение. Затова за определяне на разпределението на скоростта, налягането и температурата е необходимо да се решават съвместно уравненията на Навие—Стокс и уравнението за изменение на температурата.

Налягането  $p$  в уравненията за движението може да се представи чрез два члена — *хидростатично налягане*  $p_a$  и *динамично налягане*  $p_d$ , т. е

$$p = p_a + p_d.$$

Хидростатичното налягане  $p_a$  е свързано с масовата сила и е причина за движението. То се определя от уравнението  $\nabla p_a = -\rho_a \vec{g}$ . Ако приемем, че  $p_a = 0$  при  $x = 0$  и гравитационната сила е насочена по посока на оста  $Ox$ , получаваме  $p_a = \rho_a g x$ . Тогава

$$\vec{F} - \nabla p = \rho \vec{g} - \nabla p_a - \nabla p_d = (\rho - \rho_a) \vec{g} - \nabla p_d.$$

**Естествена конвекция близо до вертикална пластина.** Да разгледаме течението, създадено от вертикална пластина с температура  $T_w$ , намираща се в изотермичен флуид с температура  $T_a$ . Архимедовата сила, отнесена към единица обем от флуида, е

$$(\rho - \rho_a) g.$$

За да преодолее трудностите за намиране на свободната конвекция, индуцирана от нагрятата вертикална пластина, Бусинеск (Бусинеск, 1903 г.) предполага, че разликата на плътностите  $\rho_a - \rho$ , предизвикваща флуидното течение, може приближено да се изрази само чрез температурата посредством формулата

$$\rho_a - \rho = \rho\beta(T - T_a),$$

където  $\beta = \frac{1}{T_\infty}$  е термичният коефициент на обемното разширение. Освен това той допуска, че в уравнението на непрекъснатостта може да се пренебрегнат измененията на плътността. Тогава основните уравнения за конвекцията на флуид с постоянни физически свойства имат вида

$$(4.274) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{e} g \beta \rho (T - T_a) - \nabla p_a + \mu \nabla^2 \vec{v},$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \frac{dp}{dt} + \mu \Phi_v,$$

където  $c_p$  е специфичната топлемост при постоянно налягане,  $k$  е коефициентът на топлопроводност и  $\Phi_v$  — вискозна та дисипация.

Задачата за свободна конвекция при нагрятата вертикална пластина ще решим, като използваме уравненията на граничния слой. Основните предположения при извеждането на уравненията на граничния слой при свободна конвекция са аналогични на тези, използвани при получаването на уравненията на граничния слой за принудена конвекция. Поради това, че дебелината на граничния слой е много малка, предполагаме, че измененията на търсените величини в направление, перпендикулярно на повърхността на пластината, са много по-големи, отколкото в направление на течението. Като пренебрегнем съответните членове, системата уравнения се трансформира от елиптична в параболична.

И така уравненията на граничния слой при естествена конвекция имат вида

$$(4.275) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T_w - T_a)\vartheta,$$

$$(4.276) \quad u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2},$$

където  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  е коефициентът на термичната дифузия и  $\vartheta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a}$ . Тази система е автомоделна (Полхаузен, 1921 г.).

Нека въведем следните нови променливи:

$$(4.277) \quad \bar{\eta} = \frac{y}{x} \sqrt[4]{\frac{g x^3 (T_w - T_a)}{4 \nu^2 T_a}} = \frac{y}{x} \left( \frac{Gr}{4} \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\Psi = 4\nu \sqrt[4]{\frac{gx^3(T_w - T_a)}{4\nu^2 T_\infty}}, \quad F(\bar{\eta}) = 4\nu \left(\frac{G_r}{4}\right)^{\frac{1}{4}} F(\bar{\eta}),$$

$$T = T_a + (T_w - T_a) \vartheta(\bar{\eta}).$$

След диференциране за компонентите на скоростта получаваме

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{4\nu}{x} \left(\frac{G_r}{4}\right)^{\frac{1}{2}} F'(\bar{\eta}),$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\nu}{x} \left(\frac{G_r}{4}\right)^{\frac{1}{4}} [\bar{\eta} F'(\bar{\eta}) - 3F(\bar{\eta})].$$

Като заместим  $u$  и  $v$  в (4.275) и (4.276), получаваме

$$(4.278) \quad F'''(\bar{\eta}) + 3F(\bar{\eta})F''(\bar{\eta}) - 2F'^2(\bar{\eta}) + \vartheta(\bar{\eta}) = 0$$

$$\vartheta''(\bar{\eta}) + 3PrF(\bar{\eta})\vartheta'(\bar{\eta}) = 0.$$

Уравненията (4.278) решаваме при следните гранични условия:

$$(4.279) \quad F(0) = 0,$$

$$F'(0) = 0, \quad \text{при } \bar{\eta} = 0$$

$$\vartheta(0) = 1,$$

и

$$(4.280) \quad \begin{aligned} F'(\infty) &= 0, \\ \vartheta(\infty) &= 0, \end{aligned} \quad \text{при } \bar{\eta} \rightarrow \infty.$$

Системата (4.278) при гранични условия (4.279) и (4.280) е решена числено от Полхаузен през 1921 г. и от Острах през 1953 г. за различни числа на Прантъл.

#### § 4.9. ДИФУЗИОНЕН ГРАНИЧЕН СЛОЙ

Уравненията на хидроаеромеханиката за случая на хомогенен по своя състав флуид бяха изведени в глава I. За да се опише движението на смес от течности или газове, чийто състав се мени в нейния обем, тези уравнения трябва да се изменят и допълват. Ще се ограничим с разглеждането на смеси, състоящи се само от две компоненти, предполагайки, че те имат постоянни физически характеристики (коэффициент на вискозност, коэффициент на топлопроводност и др.). Това предположение е напълно допустимо, когато скоростите на движение са много по-малки от скоростта на звука и разликите в температурите и концентрациите са също малки.

За описание на сместа се въвеждат масовите концентрации  $\rho_A$  и  $\rho_B$  на влизащите в състава ѝ вещества  $A$  и  $B$ . Тогава масовата плътност  $\rho$  на сместа е  $\rho = \rho_A + \rho_B$ . Понякога е по-удобно да се използват молните концентрации  $C_A$  и  $C_B$ . Те се дефинират с равенствата

$$C_A = \frac{\rho_A}{M_A}, \quad C_B = \frac{\rho_B}{M_B},$$

където  $M_A$  и  $M_B$  са молекулните тегла на веществата  $A$  и  $B$ . Изменението на масовите концентрации  $\rho_A$  и  $\rho_B$  на компонентите на сместа се извършва с два механизма.

Първо, *чрез молекулно пренасяне* на едно от веществата на сместа от участък с по-голяма концентрация в участък с по-малка концентрация. Механизмът на пренасяне на веществата чрез изравняване на концентрацията им в различни участъци на флуида се нарича *молекулна, или обикновена дифузия*. Второ, при макроскопичното движение на сместа всеки неин участък се движи от едно място на друго, като се извършва *механично смесване на различните части на флуида*. По такъв начин концентрацията на намиращата се в дадена неподвижна точка от пространството компонента се изменя с течение на времето, въпреки че при отсъствие на химическа реакция съставът на всяка от компонентите на сместа като цяло не се изменя.

Изменението на концентрацията на веществата чрез механично движение и смесване на компонентите на флуида се нарича *конвективна дифузия*. Промяната на концентрацията на компонентите на сместа чрез конвективна дифузия е *термодинамично обратим процес* и не води до разсейване на енергия.

Изменението на концентрацията на компонентите чрез молекулната дифузия е *необратим процес* и заедно с триенето и топлопроводността е един от източниците за разсейване на енергията във флуидни смеси.

#### 4.9.1. Уравнение на дифузията в бинарна смес

В първа глава разгледахме нютоновия закон за вискозитета и фуриеровия закон за топлопредаването. В този параграф ще формулираме законите на Фик за дифузията, които описват движението на една от компонентите, например  $A$ , в бинарната смес на  $A$  и  $B$  поради съществуващ градиент на концентрацията на  $A$ .

Тъй като скоростите на компонентите на една дифундираща смес в дадена точка са различни, трябва да се дефинира какво ще разбираме под *скорост на сместа* в тази точка. Нека скоростите на компонентите  $A$  и  $B$  на сместа са съответно  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$ . Тогава осреднената скорост  $\vec{v}$  на сместа се дефинира посредством равенството

$$\vec{v} = \frac{\rho_A \vec{v}_A + \rho_B \vec{v}_B}{\rho_A + \rho_B}.$$

Ще отбележим, че  $\rho \vec{v}$  е *локалната скорост*, посредством която масата на сместа преминава през единица площ от сечение, перпендикулярно на посоката на скоростта  $\vec{v}$ . Произведението

$\rho_A \vec{v}_A (\rho_B \vec{v}_B)$  се нарича *масов поток на компонентата A (B) на сместа* и се бележи с  $\vec{n}_A (\vec{n}_B)$ .

Първият закон на Фик, който ще използваме, има вида

$$(4.281) \quad \vec{n}_A = \rho_A \vec{v} - \rho D_{AB} \cdot \nabla \left( \frac{\rho_A}{\rho} \right),$$

където  $D_{AB}$  е дифузионен коефициент.

За да изведем уравненията на непрекъснатостта, на компонентите и на сместа, да разгледаме обемен елемент от нея, представляващ правоъгълен паралелепипед със страни,  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Нека в пределите на този елемент масовата концентрация на компонентата  $A$  може да се променя от химическа реакция със скорост  $r_A$ . Тогава в баланса на масата за компонентата  $A$  в обемния елемент  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ще участвуват величините:

- 1) скорост на изменение на масата на компонентата  $A$  в обемния елемент  $\Delta x \Delta y \Delta z$  —  $\frac{\partial \rho_A}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$ ;
- 2) втичане на масов поток от компонентата  $A$  през стената  $x$  —  $n_{Ax}|_x \Delta y \Delta z$ ;
- 3) изтичане на масов поток от компонентата  $A$  през стената  $x + \Delta x$  —  $n_{Ax}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ ;
- 4) скорост за производство на компонентата  $A$  от химическата реакция —  $r_A \Delta x \Delta y \Delta z$ .

Втичане и изтичане има също и в направление  $y$  и  $z$ . Като направим пълен баланс на масата на компонентата  $A$  в обемния елемент и разделим на  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , получаваме

$$(4.282) \quad \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \left( \frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial n_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial n_{Az}}{\partial z} \right) = r_A.$$

Компонентите  $n_{Ax}, n_{Ay}, n_{Az}$  са правоъгълни проекции на вектора на потока на масата на компонентата  $A$  от разглежданата бинарна смес. Уравнението (4.282) може да се запише и така:

$$(4.283) \quad -\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{n}_A) = r_A.$$

Аналогично е уравнението и за непрекъснатостта на компонентата  $B$  на бинарната смес

$$(4.284) \quad -\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{n}_B) = r_B.$$

Тогава, като съберем почленно (4.283) и (4.284) и вземем предвид, че  $r_A + r_B = 0$ , получаваме

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \vec{v}) = 0,$$

което е *уравнението на непрекъснатостта на разглежданата смес*. Ако плътността на сместа  $\rho$  е постоянна, уравнението на непрекъснатостта се записва така:

$$(4.285) \quad (\nabla \cdot \vec{v}) = 0.$$

Като заместим (4.281) в (4.283), получаваме следното *уравнение на дифузията*:

$$(4.286) \quad -\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_A \vec{v}) = \left( \nabla \cdot \rho D_{AB} \nabla \left( \frac{\rho_A}{\rho} \right) \right) + r_A.$$

Ако  $\rho$  и  $D_{AB}$  са постоянни, (4.286) добива вида

$$(4.287) \quad -\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla \rho_A) = D_{AB} \nabla^2 \rho_A + r_A.$$

Разделяйки всички членове на (4.287) на  $M_A$ , намираме,

$$(4.288) \quad -\frac{\partial C_A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla C_A) = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A.$$

Аналогично уравнение може да запишем и за  $C_B$ . То се използва за намиране дифузията на разреден разтвор на някакво вещество в течност при постоянна температура и постоянно налягане. Когато няма химическа реакция и флуидът е неподвижен, (4.288) добива вида

$$-\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \left( \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right).$$

По-нататък ще предполагаме, че веществото  $A$  е разтворено във флуида  $B$  и ще изпускаме индекса  $A$ . Това уравнение се нарича *втори закон на Фик за дифузията* или *уравнение на молекулната дифузия*. Граничните условия, при които (4.288) се решава в различните случаи, са различни. Ако в сместа има тяло, което не е разтворимо, върху неговата повърхнина трябва да се анулира нормалната към него компонента на дифузионния поток  $\tau = -\rho D \nabla C$ , т. е. върху границата  $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$ .

При дифузия от тяло, което се разтваря в течност, близо до него бързо се установява равновесие. Граничното условие има вида  $C = C_0$ , където  $C_0$  е *молната концентрация на наситения разтвор*. В случая, когато твърдата повърхнина „поглъща“ попадащото върху нея дифундиращо вещество, за гранично условие върху повърхнината на тялото имаме равенството  $C = 0$ , а на безкрайност —  $C = C_\infty$ , където  $C_\infty$  е *молната концентрация на примесите в обтичащия поток*.

В някои случаи скоростите на „поглъщане“ и дифузията на примесите близо до повърхнината на тялото са сравними по големина. Тогава граничното условие върху тялото изразява баланс между скоростта на поглъщане ( $C^n$ , където  $n = 1, 2, \dots$ ) и скоростта на дифузионния поток  $\left( D \frac{\partial C}{\partial n} \right)$ , където  $D$  е коефициентът на дифузия), т. е.

$$C^n = D \frac{\partial C}{\partial n}.$$

Тук  $\alpha$  е постоянен коефициент, който характеризира протичащата реакция.

Тъй като уравненията на молекулната дифузия и на топлопроводността имат подобен вид, известните решения за някои прости топлинни задачи могат да се използват и за намиране на решенията и на дифузионни задачи. На граничното условие при топлинно изолирана повърхнина съответствува условието върху неразтворима твърда граница, а на повърхнина, поддържана при постоянна температура, съответствува дифузия от повърхнината на разтварящо се в течността тяло.

#### 4.9.2. Уравнение на ламинарния дифузионен граничен слой

При известни условия в околността на обтичаното тяло или междуфазова граница се наблюдава локализиране на измененията на полето на концентрацията. Ако *числото на Пекле* ( $Pe = \frac{UL}{D}$ ) е много голямо, надлъжната дифузия е пренебрежимо малка в сравнение с напречната, която е насочена нормално към тялото или междуфазовата граница. Аналогично на динамичния и топлинния граничен слой в този случай казваме, че има *дифузионен граничен слой*.

Уравнението на дифузионния граничен слой в декартови координати  $(x, y)$  има вида:

$$(4.289) \quad u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2},$$

а в сферични  $(r, \theta)$  —

$$(4.290) \quad v_r \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial C}{\partial r} \right).$$

Ако причината за движението на сместа е неравномерността на концентрацията на разтвора в гравитационното поле, която е следствие от измененията на температурата върху някаква граница, има *свободна конвекция*. Тогава дифузионното уравнение и уравненията за движението на сместа са взаимно свързани.

#### 4.9.3. Преобразуване на уравнението на дифузионния граничен слой в уравнение на топлопроводността

През 1927 г. Мизес преобразува уравненията на динамичния граничен слой в уравнение, подобно на уравнението на топлопроводността.

Да разгледаме плосък дифузионен граничен слой с уравнението за концентрацията (4.289). Токовата функция  $\Psi$  е свързана с компонентите на скоростта в декартови координати чрез формулите

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$



За да сведем (4.289) към уравнение, подобно на уравнението на топлопроводността, полагаме

$$\xi = x \text{ и } \eta = \Psi(x, y).$$

Тогава

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_\eta - v \left(\frac{\partial C}{\partial \Psi}\right)_\xi,$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \left(\frac{\partial C}{\partial \Psi}\right)_\xi u$$

и следователно

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( u \frac{\partial C}{\partial \Psi} \right).$$

Като заместим в (4.289), получаваме

$$(4.291) \quad \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( u \frac{\partial C}{\partial \Psi} \right).$$

Понеже токовата функция е определена с точност до константа, може да изберем тази константа така, че върху повърхнината на тялото, т. е. при  $y=0$ , да имаме  $\Psi=0$ . Тогава граничните условия (4.291) може да запишем във вида

$$C = C_0 \text{ при } \Psi \rightarrow \infty \text{ (} y \rightarrow \infty \text{);}$$

$$C = C \text{ при } \Psi = 0 \text{ (} y = 0 \text{)}.$$

Да разгледаме ососиметричен дифузионен граничен слой, за който е в сила уравнението (4.290). Токовата функция е свързана с компонентите на скоростта чрез формулите

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Въвеждаме новите променливи

$$\xi = \theta, \quad \eta = \Psi(r, \theta).$$

Тогава

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \theta}\right)_r = \frac{\partial C}{\partial \theta} + r^2 \sin \theta v_r \frac{\partial C}{\partial \Psi},$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_\theta = -r \sin \theta v_\theta \frac{\partial C}{\partial \Psi}.$$

Следователно

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial C}{\partial r} \right) = (-r \sin \theta \cdot v_\theta) \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[ r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial C}{\partial \Psi} \right].$$

Като заместим в (4.290), получаваме

$$(4.292) \quad \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\sin \theta D \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[ r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial C}{\partial \Psi} \right].$$

#### 4.9.4. Дифузия към твърда сферична частица

Нека твърда сферична частица с радиус  $a$  се движи със скорост  $U$  в разтвор от някакво вещество. Да разгледаме дифузията към частица на разтвореното вещество, имащо концентрация  $C$ . Въвеждаме сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$  с начало, съвпадащо с центъра на сферата, и ъгъл  $\theta$ , който се отчита от посоката на обтичащия поток. Ще предполагаме, че радиусът на частицата и следователно числото на Рейнолдс е също малко. При резки изменения на концентрацията близо до повърхността на частицата ососиметричният граничен слой може с известно приближение да се разглежда като плосък. Това означава, че ще се интересуваме от решението на уравнението на конвективната дифузия за онези стойности на  $r$ , които малко се различават от  $a$ .

При малки числа на Рейнолдс токовата функция се записва така:

$$\Psi = \frac{1}{2} a^2 U \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \right] \sin^2 \theta.$$

С точност до  $(r-a)^2$  тази функция може да се пресбразува по следния начин:

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2} a^2 U \sin^2 \theta \left[ \left( \frac{r-a}{a} + 1 \right)^2 - \frac{3}{2} \left( \frac{r-a}{a} + 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{r-a}{a}} \right] \approx \frac{3}{4} U (r-a)^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Като положим  $r-a=y$ , получаваме

$$\Psi \approx \frac{3}{4} U y^2 \sin^2 \theta.$$

Тъй като

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{3}{2} U y \sin^2 \theta,$$

уравнението (4.292) може да се преобразува така:

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = a^2 D \sin^2 \theta \sqrt{3U} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \sqrt{3U} \cdot \frac{y}{2} \cdot \sin \theta \frac{\partial C}{\partial \Psi} \right),$$

т. е.

$$(4.293) \quad \frac{\partial C}{\partial \theta} = a^2 D \sin^2 \theta \sqrt{3U} \frac{\partial}{\partial \Psi} \sqrt{\Psi} \frac{\partial C}{\partial \Psi}.$$

Уравнението (4.293) ще решаваме при следните гранични условия:

$$(4.294) \quad \begin{aligned} C &= 0 \quad \text{при } \Psi = 0, \\ C &= C_0 \quad \text{при } \Psi \rightarrow \infty, \\ C &= C_0 \quad \text{при } \theta = 0 \text{ и } \Psi = 0. \end{aligned}$$

Въвеждаме променливата

$$\alpha = a^2 D \sqrt{3U} \int \sin^2 \theta d\theta + C_1 = \frac{a^2 D \sqrt{3U}}{2} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + C_1.$$

Тъй като

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} \cdot a^2 D \sqrt{3U} \sin^2 \theta,$$

относно  $\alpha$  (4.293) се записва така:

$$(4.295) \quad \frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \sqrt{\Psi} \frac{\partial C}{\partial \Psi} \right).$$

Уравнението (4.295) е автомоделно. Действително, ако положим

$$\beta = \frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{\alpha}},$$

от (4.295) получаваме

$$(4.296) \quad \frac{d^2 C}{d\beta^2} + \frac{4}{3} \beta^2 \frac{dC}{d\beta} = 0.$$

Когато  $\Psi=0$  и  $\Psi \rightarrow \infty$ , съответно  $\beta=0$  и  $\beta \rightarrow \infty$ . Като интегрираме (4.296), намираме

$$C = A \int_0^\beta e^{-\frac{4}{9} \beta^2} d\beta + B,$$

където  $A$  и  $B$  са константи. От  $C=0$  при  $\beta=0$  следва, че  $B=0$ , а от  $C=C_0$  при  $\beta \rightarrow \infty$  получаваме  $A = \frac{C_0}{1,16}$ , защото

$$\int_0^\infty e^{-\frac{4}{9} \beta^2} d\beta = \left( \frac{9}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \Gamma \left( \frac{1}{3} \right) = 1,16.$$

Следователно

$$C = \frac{C_0}{1,16} \int_0^\beta e^{-\frac{4}{9} \beta^2} d\beta,$$

където

$$\beta = \sqrt{\frac{3U}{4}} \frac{y \sin \theta}{\left[ a^2 D \sqrt{\frac{3U}{4}} \left( \theta - \frac{\sin \alpha \theta}{2} \right) + C_1 \right]^{\frac{1}{3}}}.$$

При  $\theta \ll 1$

$$\beta \approx \sqrt{\frac{3U}{4}} \frac{y \theta}{\left[ C_1 + \frac{2}{3} \theta^3 \cdot \frac{Da^2}{2} \cdot \sqrt{3U} \right]^{\frac{1}{3}}}.$$

Променливата  $z$  ще бъде положителна при малки  $\theta$ , ако  $C_1=0$   
В такъв случай

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{3U}{4a^2D}} \frac{y \sin \theta}{\left(\theta - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

За локалния дифузионен поток върху повърхността на частицата получаваме

$$j = D \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} = D \frac{\partial C}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{DC_0}{1,16} \sqrt[3]{\frac{3U}{4a^2D}} \frac{\sin \theta}{\left(\theta - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right)^{\frac{1}{3}}},$$

а за пълния —

$$\begin{aligned} I &= 2\pi a^2 \int_0^\pi j \sin \theta \, d\theta = \frac{DC_0 a^{\frac{4}{3}}}{1,16} \sqrt[3]{\frac{3U}{4D}} \cdot 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta \, d\theta}{\left(\theta - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= 7,9 C_0 a^{\frac{4}{3}} \cdot U^{\frac{1}{3}} \cdot D^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

## НЕУСТОЙЧИВОСТ И ТУРБУЛЕНТНОСТ

В реални условия ламинарни течения се наблюдават само при не-много големи числа на Рейнолдс. От многобройни експерименти е установено, че с растенето на числото на Рейнолдс ламинарният поток придобива способност да усилва малките смущения, предавайки им енергията си. Предаването на енергията на смущенията се съпровожда със силно изменение на изходния ламинарен поток, т. е. той става *неустойчив*. В резултат на това движението на флуида коренно се променя — течението придобива сложен нестационарен характер, като към основния поток се наслагват различни неподредени вторични течения. Такива течения се наричат *турбулентни*.

Явленията неустойчивост и преход към турбулентност са тясно свързани. Има основания да се счита, че причината за прехода към турбулентност е хидродинамичната неустойчивост на ламинарния поток, макар тази връзка да е много сложна. Като се въздействува на външните смущения, може да се задържа преходът към турбулентност и да се променя характерът на развитието на течението.

Теорията на хидродинамичната устойчивост позволява преди всичко да се оценят критичните стойности на числото на Рейнолдс, при които ламинарният поток става неустойчив по отношение на малките смущения. В редица случаи се оказва възможно да се изследват някои форми на движението на флуида, появяващи се след загубата на устойчивост. Тези движения не са обезателно турбулентни — неустойчивостта може да доведе до по-сложни ламинарни движения.

Теорията за турбулентността се отнася за развити турбулентни течения, при които осреднените по времето параметри не се менят с изменение на времето. Сравнително малко е изследвана обширната междинна област на преход от ламинарен към турбулентен режим на движение на флуида, за която е характерен големият брой разнообразни явления.

### § 5.1. ОСНОВИ НА ТЕОРИЯТА НА ХИДРОДИНАМИЧНАТА УСТОЙЧИВОСТ

Нека функциите  $\vec{V}(x, y, z)$ ,  $P(x, y, z)$  удовлетворяват уравненията на Навие — Стокс и следователно описват динамически въз-

можно стационарно ламинарно течение. Да разгледаме друго решение на уравненията (1.54), което има вида

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{V}(x, y, z) + \vec{v}_1(x, y, z, t), \\ p &= P(x, y, z) + p_1(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Функциите  $\vec{v}$  и  $p_1$  се наричат *смущение на стационарното решение*. От (1.54) за смущенията получаваме следните уравнения:

$$(5.2) \quad \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{V} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}_1, \\ \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0.$$

На проблема неустойчивост на стационарния поток най-добре съответствува по постановка задачата на Коши на развитие с времето на произволно малки начални смущения за скоростта —  $\vec{v}_{10} = \vec{v}_1(x, y, z, 0)$ , и налягането —  $p_{10} = p_1(x, y, z, 0)$ , такива, че  $\vec{V} + \vec{v}_{10}$  и  $P + p_{10}$  да се различават малко от стационарното решение  $\vec{V}, P$ .

Да намерим при  $t > 0$  решението  $\vec{v}_1(x, y, z, t)$ ,  $p_1(x, y, z, t)$  на системата (5.2) със зададени начални условия. Ако при  $t \rightarrow \infty$  величините (5.1) клонят към изходното стационарно решение  $\vec{V}, P$ , движението е устойчиво, в противен случай то е неустойчиво. За смущенията обикновено се поставят хомогенни гранични условия, тъй като се предполага, че на границите отсъствуват външни нестационарни въздействия на потока. Усилването или затихването на смущенията се обяснява с вътрешните свойства на течението.

### 5.1.1. Баланс на енергията на смущенията

За неустойчивостта на теченията в разглежданата област  $G$  може да се съди по характера на изменението с времето на кинетичната енергия на смущенията

$$2E = \int_G |\vec{v}_1|^2 d\tau.$$

Уравнението на баланса на кинетичната енергия се получава лесно от (1.93), като положим  $\vec{V}_1 = \vec{V}$ ,  $\vec{u} = \vec{v}_1$ :

$$(5.3) \quad \frac{dE}{dt} = M - \frac{1}{\text{Re}} N,$$

$$M = - \int_G \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{V} d\tau.$$

$$N = \int_G \left[ \left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

Това равенство показва основните физически причини, които обуславят неустойчивостта. Пълната кинетична енергия на смущенията в обема се изменя вследствие действието на вискозността на флуида и взаимодействието с основния поток. Нарастването на енергията може да бъде породено само от първия член в дясната страна на (5.3), тъй като вискозният член е винаги отрицателен. Пълната енергия на смущенията нараства, ако в основното течение има зони с големи градиенти и числото на Рейнолдс е толкова голямо, че смущенията не могат да бъдат премахнати от вискозната дисипация. Такива условия възникват във вискозните течения при увеличаване числото на Рейнолдс.

Може да опитаме да приложим уравнение (5.3) за оценка на критичното число на Рейнолдс (В. Ор, 1907 г.). Ако при зададено  $\vec{U}$  за произволно  $\vec{v}$ , удовлетворяващо уравнението на непрекъснатостта, е възможно да се получат оценки за участващите в уравнението величини  $M$  и  $N$ , то от това уравнение се намира такова число  $Re_c$ , че при  $Re < Re_c$  дясната страна на (5.3) е отрицателна за всяко  $t$ . Това означава, че при  $Re < Re_c$  енергията на смущенията намалява. Числото  $Re_c$  дава най-голямата стойност на числото на Рейнолдс, при което ще затихват всички възможни смущения, които са допустими от уравнението на непрекъснатостта и граничните условия. Действителните смущения, които удовлетворяват и първото уравнение на (5.2), са частен клас на допустими полета. Те могат да бъдат устойчиви и при  $Re > Re_c$ . Тъй като действителните смущения не са известни, то оценката на критичното число на Рейнолдс по този метод е много занижена и в рамките на този подход не може съществено да се подобри.

Задачата за изследване поведението на решенията на системата (5.2) при произволни начални условия не е решена и обикновено изследването на устойчивостта се извършва за смущения от частен вид. Ако се намери частно решение на системата (5.2), което не затихва с растенето на времето, то съответстващото на (5.2) течение може да се счита за неустойчиво.

Ще отбележим, че е по-трудно да се докаже устойчивостта на течението (5.1), тъй като за това е необходимо да се разгледа поведението на всички възможни решения на системата (5.2). Обикновено методът на частните решения дава завишена оценка за критичното число на Рейнолдс.

### 5.1.2. Метод на малките смущения

Да разгледаме устойчивостта на плоскопаралелен поток относно малки смущения. В този случай има само една различна от нула компонента на скоростта

$$(5.4) \quad U = U(y), \quad V = 0, \quad W = 0.$$

Ако пренебрегнем членовете, които съдържат квадратите на малките смущения, получаваме следните линеаризирани уравнения:

$$(5.5) \quad \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{V} = -\Delta p_1 + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}_1$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0.$$

Решението на линейната система (5.5) е определено с точност до постоянен множител, затова характерната амплитуда на смущенията тук може да се разглежда като произволно малка величина.

**Уравнение на Ор — Зомерфелд.** Тъй като коефициентите на уравнението (5.5) зависят само от променливата  $y$ , ще търсим частно решение от вида

$$(5.6) \quad \vec{v}_1 = \vec{v}(y) \exp(i \xi),$$

$$p_1 = p(y) \exp(i \xi),$$

$$\xi = \alpha x - \omega t,$$

в което  $\alpha$  и  $\omega$  са постоянни величини и  $v(y)$ ,  $p(y)$  — амплитудни функции. От (5.5) получаваме следните уравнения:

$$(5.7) \quad i\alpha(U-c)u + U'v = -i\alpha p + \frac{1}{\text{Re}}(u'' - \alpha^2 u),$$

$$i\alpha(U-c)v = -p' + \frac{1}{\text{Re}}(v'' - \alpha^2 v),$$

$$i\alpha u + v' = 0.$$

Тук по предположение смущенията (5.6) са двумерни, така че  $w=0$ . Освен това вместо  $\omega$  е въведена величината  $c = \omega \alpha^{-1}$ .

Като диференцираме първото уравнение (5.7) и след това с помощта на второто уравнение изключим  $p'$ , а  $u$  — с помощта на уравнението на непрекъснатостта, получаваме следното уравнение (В. Ор, 1906 г.; А. Зомерфелд, 1908 г.):

$$(5.8) \quad v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha \text{Re}[(U-c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v].$$

За уравнението от четвърти ред (5.8) е необходимо да се зададат четири гранични условия, зависещи от конкретното течение. Тези условия трябва да бъдат хомогенни, тъй като на границата течението не е смутено. Например в случая на поток в праволинеен канал, ограничен от твърди стени,  $y = \pm 1$ ; съгласно условието за полепване имаме

$$(5.9) \quad v=0, \quad v'=0, \quad y = \pm 1.$$

Обикновено  $\text{Re}$  и  $\alpha > 0$  се считат за дадени реални величини.

Нетривиалните решения на хомогенната задача (5.8), (5.9), които в случая представляват интерес и могат да съществуват само при някои специални стойности на  $c$ , се наричат *собствени функции*. В общия случай собствените функции и собствените числа са комплексни и само реалната част на решението (5.6) има физически смисъл:

$$(5.10) \quad \vec{v}_{1r} = (\vec{v}_r \cos \xi_r - \vec{v}_i \sin \xi_r) \exp \alpha c_i t,$$

$$\xi_r = \alpha(x - c_r t).$$



Решението (5.10) представлява плоска вълна, която се движи в направление  $x$  с фазова скорост  $c_r$ . Амплитудата на вълната расте експоненциално при  $\alpha c_i > 0$  и затихва експоненциално при  $\alpha c_i < 0$ ; стойностите, при които  $c_i = 0$ , разделят устойчивите от неустойчивите смущения. Величината  $\alpha c_i$  се нарича *коефициент на усилване*.

Граничната задача (5.8), (5.9) съдържа параметрите  $Re$  и  $\alpha$ , затова при плоските вълни  $c = c(Re, \alpha)$ . Като даваме различни стойности на  $Re$ , може да извършим изследвания за всички възможни течения с профил  $U(y)$ , а като даваме различни стойности на  $\alpha$  — изследваме устойчивостта на теченията относно смущения с различни дължини на вълните. Множеството от точки в равнината  $(Re, \alpha)$ , в които  $c_i = 0$ , образуват така наречената *крива на неутралната устойчивост*. Най-малката стойност  $Re = Re_c$  от кривата на неутралната устойчивост се нарича *критична стойност на числото на Рейнолдс*. При  $Re > Re_c$  съществуват такива стойности на  $\alpha$ , при които  $c_i > 0$ , и затова частните решения (5.10) ще растат експоненциално; при  $Re < Re_c$  всички частни решения (5.10) затихват експоненциално, защото  $c_i < 0$ .

Постановката на задача (5.8), (5.9) допуска обобщения в няколко отношения.

Първо, може да се въведе периодичност по пространствената координата  $z$ , като положим в (5.6)

$$(5.11) \quad \xi = \alpha x + \beta z - \omega t.$$

Тогава получаваме *уравнението на Ор — Зомерфелд за пространствени вълни*

$$(5.12) \quad v^{IV} - 2\gamma^2 v'' + \gamma_4 v = i\alpha Re [(U - c)(v'' - \gamma^2 v) - U'' v],$$

в което  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Но е трудно да се покаже, че уравнението (5.12) се свежда към уравнението на плоската задача (5.8) с помощта на смяната

$$\gamma Re_1 = \alpha Re.$$

Ако при това граничните условия не се изменят, то задачата за устойчивостта на теченията към тримерни вълни с параметри  $Re$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  е еквивалентна на задачата с плоски вълни с параметри  $Re_1$  и  $\gamma$ . Тъй като  $\gamma > \alpha$ , то  $Re_c > Re_{1c}$  и може да се ограничим с разглеждането само на плоски вълни (Г. Скуайр, 1933 г.).

Второ, възможно е да се сменят ролите на  $\omega$  и  $\alpha$ , а именно да се задават реални стойности на  $\omega$  и да се търси комплексно число  $\alpha$  като собствено число на хомогенната гранична задача за уравнението (5.8). Тогава вместо (5.10) ще имаме

$$(5.13) \quad \vec{v}_{1r} = (\vec{v}_r \cos \xi_r - \vec{v}_i \sin \xi_i) \exp(-\alpha_i x),$$

$$\xi_r = \alpha_r x - \omega t.$$

С тези формули се задава плоска вълна, която се премества в направление  $x$  с фазова скорост  $\omega \alpha_r^{-1}$ . Амплитудата на вълната

расте при  $\alpha_i < 0$  и намалява при  $\alpha_i > 0$  в направление на потока, като не зависи от времето. Ако амплитудата се увеличава в направление на потока, течението може също да се нарече неустойчиво, тъй като усилва малките смущения, които се възбуждат в някакво начално сечение  $x$ . Такъв модел на началния етап на развитие на малките смущения е по-точен, отколкото (5.10) и съответствува по-добре на експерименталната картина на неустойчивостта в граничен слой, в струя, в следа зад тялото и в слой на смесване. Смущенията (5.10) и (5.13) се наричат съответно растящи по времето и по пространството. При малки коефициенти на усилване (близо до неутралната крива) тези два вида смущения са еквивалентни (М. Гастер, 1963 г.). С отдалечаване от неутралната крива различията между тях се увеличават.

Трето, и това е най-същественото обобщение, постановката на задача (5.8), (5.9) може да се приложи и за други течения. Предположението (5.4) силно ограничава класа на допустимите решения на стационарните уравнения на Навие — Стокс, които според извода на (5.8) трябва да удовлетворяват основното течение. Строго казано, това предположение се удовлетворява само от течение между две твърди равнинни стени

$$(5.14) \quad U = a(1 - y^2) + b(y + 1).$$

При  $a = 1$ ,  $b = 0$  се получава течението на Поазъой, а при  $a = 0$ ,  $b = \frac{1}{2}$  — течението на Кует. В същото време има много важни случаи, в които течението удовлетворява условията (5.4) само приближено. В граничния слой  $U = U(y, x)$ , но зависимостта от  $x$  е слаба; същата ситуация има и при струи, следи и слоеве на смесване. Ако дължината на вълната на смущенията (5.6) е от порядъка на дебелината на флуидния слой, то зависимостта от  $x$  може да се пренебрегне. Тогава за функция  $U(y)$  в уравнението (5.8) може да се разглежда всяка локална функция  $U(y, x_0)$ , където  $x_0$  е параметър.

**Уравнение на Релей.** При големи стойности на  $\alpha Re$  може да пренебрегнем в (5.8) членовете от ред  $(\alpha Re)^{-1}$ . Такаполучаваме уравнението (Релей, 1880 г.)

$$(5.15) \quad (U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v = 0,$$

което може да бъде получено също и от уравненията на Ойлер за идеални флуиди. Уравнението (5.15) е от втори ред, затова неговите решения не могат да удовлетворят всички гранични условия на уравнението на Ор — Зомерфелд. Това уравнение обаче достатъчно добре описва неустойчивостта далече от твърдите граници при открити течения. Естествените гранични условия в този случай изразяват факта, че решението трябва да затихва на безкрайност:

$$(5.16) \quad v \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm \infty.$$

Формулировката на граничните задачи (5.15), (5.16) не се изменя, ако се премине към комплексно спрегнати величини. Следователно, ако  $v(y)$  и  $c$  са собствената функция и собственото число, то  $v^*(y)$  и  $c^*$  също са собствена функция и собствено число. По такъв начин, ако е получено решение на (5.15), (5.16), което е затихващо ( $c_i < 0$ ), то съществува и растящо с времето решение ( $c_i > 0$ ). При невискозни флуиди вълновите смущения (5.6) се делят на усиляващи се ( $c_i \neq 0$ ) и неутрални ( $c_i = 0$ ).

Анализът на уравнението (5.15) е по-прост, отколкото анализът на уравнението (5.8). Релей е доказал две общи твърдения за свойствата на решенията (5.15), (5.16). Ако тази гранична задача има комплексно собствено число ( $c_i \neq 0$ ), то съществува точка  $y_n$ , за която  $U''(y_n) = 0$ . По такъв начин при идеалните флуиди наличието на инфлексна точка е необходимо условие за неустойчивостта на течението. Плоскопаралелното течение в тази постановка е устойчиво, ако профилът на скоростта няма инфлексна точка. Когато втората производна не мени знака си, вълновите смущения са неутрални и съществува точка  $y_k$ , за която  $c = U(y_k)$ . Това твърдение дава оценка за собственото число.

Оказва се възможно да се даде по-точна оценка за собствените числа (Хауърд, 1961 г.). Нека  $U_1$  и  $U_2$  са най-голямата и най-малката стойност на скоростта и собствените числа на граничната задача (5.15), (5.16) в комплексната равнина ( $c$ ) лежат в кръга с център в точката  $c_r = -\frac{1}{2}(U_1 + U_2)$ ,  $c_i = 0$  и радиус  $\frac{1}{2}(U_1 - U_2)$ . Оттук следва, че  $U_2 \leq c_r \leq U_1$ .

Ако профилът на скоростта  $U(y)$  е симетричен относно  $y=0$ , то решението на задача (5.15), (5.16) се разлага на симетрична и антисиметрична мода с гранични условия съответно:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} v' &= 0, \quad y=0; \quad v \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \\ v &= 0, \quad y=0; \quad v \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Асимптотичното условие на безкрайност е удобно да се замени с крайно съотношение. Да предположим, че  $U \rightarrow \text{const}$  при  $y \rightarrow \infty$ ; тогава от уравнението (5.15) следва

$$(5.18) \quad v = A \exp(-\alpha y).$$

В това решение  $A = \text{const}$ ,  $\alpha_r > 0$ . Като изключим  $A$ , получаваме условието

$$(5.19) \quad v' + \alpha v = 0,$$

което се удовлетворява при достатъчно големи стойности на  $y$ .

### 5.1.3. Устойчивост на течения близо до твърди повърхности

За всеки конкретен профил на скоростта  $U(y)$ , който ще е тъждествено равен на константа, не може да бъде получено реше-

ние на уравнението на Ор—Зомерфелд в аналитичен вид. Първите изследвания на тези решения са извършвани посредством асимптотични разлагания при  $(\alpha \text{Re})^{-1} \rightarrow 0$ . Сега граничните задачи за намиране на собствени функции се решават числено на ЕИМ.

В глава VI се обсъждат методите за числено решаване.

**Течение на Поазьой.** Изследването на неустойчивостта на плоското течение на Поазьой чрез метода на малките смущения се свежда към граничната задача (5.8), (5.9), в която

$$(5.20) \quad U = 1 - y^2, \quad \text{Re} = \frac{U_m h}{\nu}.$$

Тук  $U_m$  е скоростта върху оста, а  $h$  е половината от широчината на канала. Поради симетрията на коефициентите на уравнение (5.8) решението може да се разложи на симетрична и антисиметрична част (моди). Граничните задачи за тях, формулирани върху интервала  $[0; 1]$ , имат вида:

а) симетрична мода

$$(5.21) \quad v' = 0, \quad v''' = 0, \quad y = 0;$$

б) антисиметрична мода

$$(5.22) \quad v = 0, \quad v'' = 0, \quad y = 0.$$

Върху твърдата повърхност  $y = 1$  и в двата случая е в сила условието за полепване (5.9).

Граничната задача (5.8), (5.9), (5.20) е била стимул за развитието на теорията на хидродинамичната устойчивост. Първият извод за неустойчивостта на течението на Поазьой е бил получен по метода на асимптотичните разложения при малки стойности на параметъра  $(\alpha \text{Re})^{-1}$  (В. Хайзенберг, 1924 г.) По-късно този метод е бил обоснован, като е изчислена и съответната критична стойност на числото на Рейнолдс (Ц. Лин, 1945 г.). Численото решаване на задача (5.8), (5.9), (5.20) по метода на крайните разлики се оказва възможно едва след появата на мощни ЕИМ (Л. Томас, 1954 г.) Напълно тази задача е решена по метода на Галъоркин. През 1940 г. Г. И. Петров разработва използването на този метод за изследване на хидродинамичната устойчивост на плоскопаралелни течения. Това позволява за всяка двойка стойности на  $\text{Re}$ ,  $\alpha$  да се получи съответна редица от собствени числа и собствени функции (спектр). Подробни изчисления (С. Орзаг, 1971 г.) показват, че неустойчива мода, ако такава съществува при дадените  $\text{Re}$  и  $\alpha$ , е само първата симетрична мода. Всички останали собствени числа от спектъра имат отрицателни имагинерни части. С подходящ подбор се намира онази точка  $\text{Re}_c, \alpha_k$ , за която  $c_i = 0$  при най-малка стойност на  $\text{Re}$ . Тези критични стойности на параметрите са следните:

$$Re_c = 5772,22; \alpha_k = 1,02056; c_r = 0,264002.$$

По такъв начин по метода на малките смущения се получава, че течението на Поазьой в плосък канал е неустойчиво при  $Re > 5772,22$ . В експериментите при  $Re > 1000$  се наблюдава неустойчивост и развитието ѝ се задържа, ако се намаляват амплитудните смущения на входа на канала.

**Граничен слой.** Да се ограничим с разглеждането на граничен слой върху пластина. Да приемем за характерни величини дължината  $\delta_1 = 1,72 \times (\nu x / U_\infty)^{1/2}$  и скоростта  $U_\infty$ ; тогава в (5.8)

$$(5.23) \quad U = f'(y), \quad Re = \frac{U_\infty \delta_1}{\nu}.$$

Функцията  $f(y)$  се определя от решението на задачата на Блазиус (4.29). При такъв избор на характерните величини профилът на скоростта не се изменя при преместването в направление на пластината; преместването в направление на потока увеличава само числото на Рейнолдс  $Re$ .

Изследването на устойчивостта на граничния слой по метода на малките смущения при предположение, че потокът е локално плоскопаралелен, се свежда до решаване на уравнението (5.8) с профил на скоростта (5.23) и гранични условия

$$(5.24) \quad v = 0, \quad v' = 0, \quad y = 0, \\ v \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

Вместо асимптотичното условие (5.24) удобно е да се въведе приближено записване на условието за крайно разстояние от стената. Тъй като при граничен слой  $U \rightarrow U_\infty$  при  $y \rightarrow \infty$ , далече от пластината уравнението (5.8) преминава в уравнение с постоянни коефициенти и се решава лесно:

$$(5.25) \quad v = A_1 e^{-\alpha y} + A_2 e^{\alpha y} \\ \sigma = -[\alpha^2 - i\alpha Re (U_\infty - c)]^{\frac{1}{2}}.$$

Тук  $\sigma_r < 0$ ,  $A_1, A_2$  са произволни константи. Като диференцираме (5.25) и изключим  $A_1, A_2$ , извеждаме съотношенията

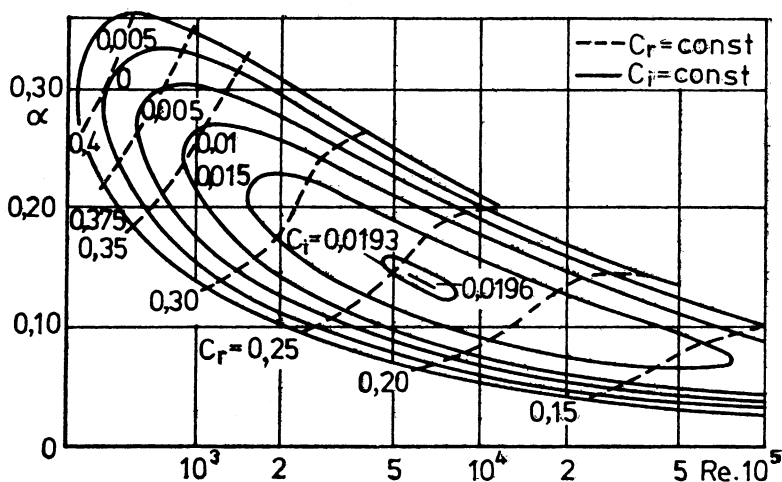
$$(5.26) \quad v'' + (\alpha - \sigma) v' - \alpha \sigma v = 0, \\ v''' + (\alpha - \sigma) v'' - \alpha \sigma v' = 0.$$

Условията (5.26) се задават на такова крайно разстояние  $y = y_*$ , че да е изпълнено неравенството  $|U(y_*) - U_\infty| < \epsilon$ .

Решението на граничната задача (5.8), (5.23), (5.24), от която следва неустойчивостта на граничния слой, най-напред е получено чрез асимптотичен метод (В. Толмин, 1929 г. Г. Шлихтинг, 1933 г.). След това са извършени систематични изчисления с по-

точни числени методи. На фиг. 37 е показана неутралната крива, а също и линията на равните стойности на коефициента на усилване  $c_i$ .

При зададено  $\alpha$  съществува интервал за числото на Рейнолдс  $Re_1 \leq Re \leq Re_2$ , в който смущенията се усилват. Стойностите  $Re_1$  и  $Re_2$  се определят от пресечната линия  $\alpha = \text{const}$  на долната и



Фиг. 37

горната неутрална крива. Тук стойностите на координатите  $x_1, x_2$  съответствуват на числата на Рейнолдс  $Re_1, Re_2$ . Може да се каже, че смущенията се разпространяват във вид на вълна (5.10) по продължение на пластината, затихват в участъка  $0 \leq x \leq x_1$ , увеличават се в участъка  $x_1 \leq x \leq x_2$  и отново затихват при  $x > x_2$ . Най-малката стойност  $x_m$ , при която започва усилването на смущенията, се определя от критичната стойност на числото на Рейнолдс  $Re_c \approx 420$ . Съответните критични стойности на другите параметри са равни на  $\alpha_k \approx 0,36$ ;  $c_k \approx 0,42$ .

Този извод на линейната теория на хидродинамичната устойчивост получи и експериментално потвърждение (Г. Шубауер, Г. Скремстед, 1947 г.). В граничния слой наистина се наблюдават вълни на Толмин—Шлихтинг, които се усилват след сечението,  $x_m$ . Зоната на усилване на смущенията завършва в сечението след което потокът преминава в турбулентен режим (точка на прехода). Поведението на смущенията в зоната на прехода се предсказва достатъчно точно от линейната теория. Дължината на зоната на прехода може да се оцени чрез пресмятане коефициентите на усилване. Съответствието на изчислителните и експерименталните данни се подобрява, ако се разглеждат пространствени усилващи се вълни.

### 5.1.4. Устойчивост на открити течения

В открити течения вискозността се отразява съществено при формиране полето на скоростта. Устойчивостта на тези течения може с добро приближение да се изследва въз основа на уравнение (5.15), несъдържащо вискозни членове. Първият метод за решаване на задачата за собствени стойности на уравнението (5.15), чрез която се изследва устойчивостта на струи, е бил предложен от Релей. Методът се основава на замяната на профила  $U(y)$  с линейни функции в известен брой подинтервали, което позволява да се получи аналитично решение. След това с този метод успешно е изследвана устойчивостта на граничен слой (Л. Прантъл, 1921 г.) и на следа зад тяло, което се обтича (Т. И. Петров, 1938 г.). След появата на ЕИМ започна прилагането на числени методи за решаване на граничната задача (5.15), (5.16).

**Течение в плоска струя.** Профилът на скоростта в струята се дава с формулата (4.55)

$$U = \frac{1}{\text{ch}^2 y}.$$

Решението на уравнението на Ор — Зомерфелд по метода на разлагането в ред (Т. Тацуми, Т. Какутани, 1958 г.) показва, че вискозността забележимо влияе на устойчивостта на това течение само при малки стойности на числото на Рейнолдс и следователно е допустимо използването на уравнението на Релей.

Да запишем вместо уравнението (5.15) системата

$$(5.27) \quad \begin{aligned} v' &= w, \\ w' &= \left( \alpha^2 + \frac{U''}{U - c} \right) v. \end{aligned}$$

Избираме  $y_*$  така, че  $U(y_*) \leq 1$ . Тогава въз основа на (5.18) може да приемем следните гранични условия:

$$(5.28) \quad \begin{aligned} w &= 0 \quad (v = 0), \quad y = 0, \\ w &= -\alpha v, \quad v = A \exp(-\alpha y_*), \quad y = y_*. \end{aligned}$$

Граничната задача (5.27), (5.28) се решава числено. При зададени  $\alpha$  и  $A$  се подбира такова  $c$ , при което да се удовлетворява условието на оста. На фиг. 38 е показана зависимостта на  $c_i$  (непрекъснатите линии и  $c_r$  (пунктирните линии) от вълновото число  $\alpha$  (Х. Сато, К. Курики, 1961 г.). Вижда се, че течението в струя е неустойчиво относно симетрични смущения при  $0 \leq \alpha \leq 2$  и относно антисиметрични смущения при  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Най-големият коефициент на усилване на симетричната мода превишава с повече от два пъти съответния коефициент на усилване на антисиметричната мода. Граничната задача има две точни решения, които съответствуват на нелинейни колебания в граничните точки на интервалите на неустойчивост:

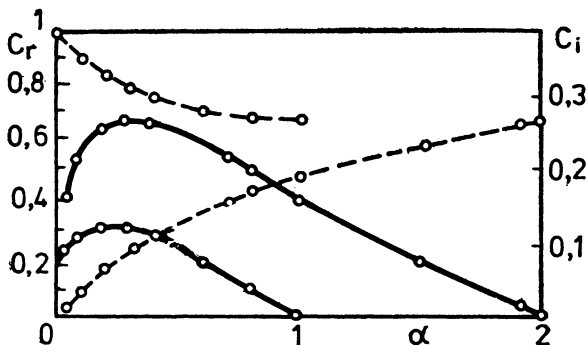
$$(5.29) \quad v = \frac{1}{\text{ch}^2 y}, \quad c = \frac{2}{3}, \quad \alpha = 2,$$

$$v = -\frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch}^2 y}, \quad c = \frac{2}{3}, \quad \alpha = 1.$$

**Течение в слой на смесване.** Профилът на скоростта в слоя на смесване задаваме с формулата

$$U = \operatorname{th} y.$$

Тъй като профилът  $U(y)$  не притежава свойството на симетрия, граничната задача трябва да се решава в интервала  $-y_* \leq y \leq y_*$ . При  $y = \pm y_*$  се поставят приближени гранични условия (5.18).



Фиг. 38

Числените решения (Т. Тацуми, Г. Гото, 1960 г.) показват, че течението в слоя на смесване е неустойчиво относно вълнови смущения с вълнови числа  $\alpha$ , за които  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Фазовата скорост на всички смущения е еднаква и равна на нула. Максималният коефициент на усилване  $\alpha c_i$  се достига при  $\alpha \approx 0,45$ .

**Образуване на вълни върху свободна повърхност.** Да разгледаме устойчивостта на тежка течност в граничен слой близо до свободна повърхност. Полето на скоростта в това течение се определя от граничната задача (4.63). Постановката на задачата за устойчивостта се усложнява от това, че граничната повърхност извършва движения. Нека  $y = h_1(x, t)$  е уравнението на смутената повърхност. В постановката на невискозна течност върху тази повърхност са удовлетворени граничните условия (1.87), (1.89). За смутеното движение тези условия трябва да се линеаризират относно основното поле на скоростта и налягането

$$U = U_\infty f'(y), \quad p = p_a - fgy.$$

С точност до малки величини от по-висок ред линеаризираните условия могат да се пренесат върху несмутената повърхност  $y=0$ :



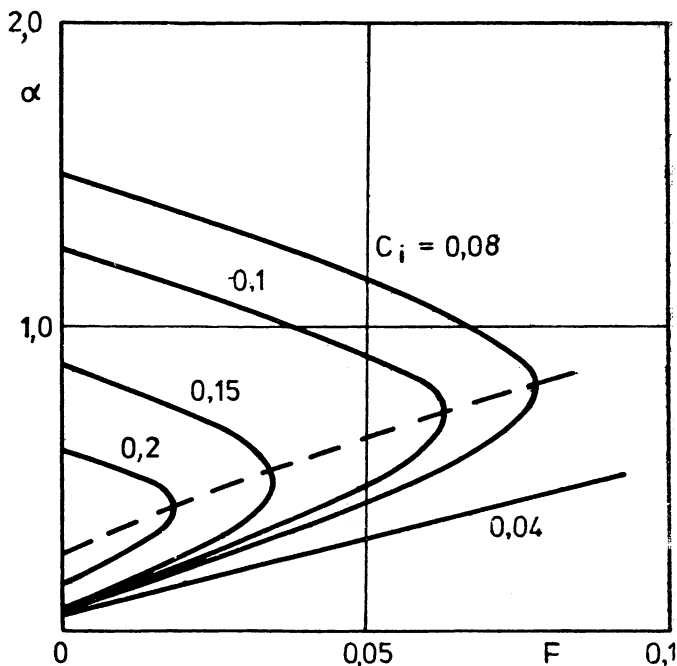
$$(5.30) \quad \frac{\partial h_*}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial h}{\partial x} = v,$$

$$p_* = \rho g h - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Следвайки метода на малките смущения, полагаме

$$h = h_0 \exp i\alpha (x - ct),$$

където  $h_0$  е амплитудата на смущението на повърхността. Като изключим с помощта на уравненията на движението (5.7) наля-



Фиг. 39

гането в граничното условие (5.30) и  $h_0$  — с помощта на първото уравнение на (5.30), получаваме следната задача за собствени стойности на амплитудната функция (В. Я. Шкадов, 1970 г.):

$$(5.31) \quad \begin{aligned} (U-c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v &= 0, \\ (U-c)^2 v' - [(U-c)U' + F]v &= 0, \quad y=0, \\ v &\rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Тук са въведени означенията

$$F = g\delta U_\infty^{-2} + \sigma\alpha^3 (\rho U_\infty^2 \delta)^{-1}, \quad U = f'(y).$$

Функцията  $f(y)$  е решение на граничната задача (4.63). За привеждане на (5.31) към безразмерен вид са използвани като ма-

щабни величини локалната скорост на основното течение на повърхността  $U_\infty$  и локалната дебелина на несмутения граничен слой  $\delta$ .

Численото решение на задача (5.31) показва, че разглежданото течение е неустойчиво. Фиг. 39 показва линиите на постоянни стойности на  $c_f$  в равнината  $(\alpha, F)$ .

## § 5.2. ТУРБУЛЕНТНИ ТЕЧЕНИЯ

Теорията на турбулентните течения на съвременния етап от развитието на науката се разработва в тясна връзка с експерименталните измервания, които се използват за теоретичното моделиране. Този полуимперичен характер на теоретичните разработки ограничава тяхната приложимост само за тесен клас течения.

Прецизни измервания показват, че при турбулентен режим скоростта и налягането изпитват нерегулярни и различни по големина изменения (*пулсации*) във фиксирана точка от пространството.

Пулсациите са следствие от хаотичното движение на флуидните частици, което се извършва на фона на основния осреднен поток. В турбулентното движение се въвлича определена маса от флуида във вид на образувания с различни мащаби, обикновено наричани турбулентни вихри, които възникват и изчезват с течение на времето. Пулсациите на скоростта не са големи (в турбулентен поток в тръба те са няколко процента от средната скорост), но независимо от това те изменят коренно картината на течението.

### 5.2.1. Уравнения на Рейнолдс

Да представим полето на скоростта и налягането във вид на сума от осреднени и пулсационни величини:

$$(5.32) \quad u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = \bar{p} + p'.$$

Понятието *осредняване* се нуждае от разяснение. Тук под осреднена величина се разбира средната по времето стойност във фиксирана точка от пространството

$$(5.33) \quad \bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u dt.$$

Интервалът  $T$  трябва да бъде достатъчно голям, за да не зависи осреднената величина от изменението на  $T$ .

Да запишем уравненията на Навие — Стокс в дивергентен вид:

$$(5.34) \quad \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v,$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (uw)}{\partial x} + \frac{\partial (vw)}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Заместваме в тези уравнения изразите (5.32) и извършваме осредняване на всяко уравнение по правилото (5.33). Всеки квадратичен член дава при осредняването два члена, например:

$$\overline{uv} = \overline{\bar{u} \bar{v}} + \overline{\bar{u} v'} + \overline{\bar{v} u'} + \overline{u' v'} = \overline{\bar{u} \bar{v}} + \overline{u' v'}.$$

Така получаваме *уравненията за осредненото турбулентно движение* (О. Рейнолдс, 1895 г.):

$$(5.35) \quad \begin{aligned} \rho \frac{d\bar{u}}{dt} &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} &= \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{d\bar{w}}{dt} &= \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

в които са използвани означенията

$$(5.36) \quad \begin{aligned} p_{xx} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2}, \\ p_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u' v'}, \\ p_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u' w'}, \end{aligned}$$

и т. н.

Системата (5.35) съвпада със системата уравнения за движението на произволна непрекъсната среда (1.18), като влиянието на пулсационните движения се проявява ефективно чрез тензора на допълнителните напрежения с компоненти  $\tau_{ik} = -\rho \overline{u'_i u'_k}$ . Тези напрежения, наричани *напрежения на привидното турбулентно триене*, превишават многократно напреженията в ламинарен поток. Те се изразяват посредством членове, съдържащи коефициента на молекулната вискозност  $\mu$  в равенствата (5.36). Само в непосредствена близост до твърди повърхности, където поради условието за полепване пулсациите затихват, допълнителните напрежения на турбулентното триене са малки.

Уравненията (5.35) се прилагат за пресмятане на осреднените полета в турбулентен поток, но за тази цел трябва да бъде намерена връзката на допълнителните напрежения с полето на осред-

нените скорости. За течения близо до твърда повърхност системата (5.35) се опростява.

Да предположим, че оценките за порядъка на хидродинамичните величини при ламинарния граничен слой са в сила и при турбулентните течения. Тогава получаваме следните уравнения на турбулентния граничен слой:

$$(5.37) \quad \rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0.$$

Тук напрежението на Рейнолдс  $\tau = -\rho \overline{u'v'}$  характеризира турбулентното триене и осредненото течение се предполага стационарно.

Най-простият модел за турбулентно триене е предложен по аналогия на нютония закон за ламинарен поток (Ж. Бусинеск, 1877 г.):

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'} = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Величината  $\varepsilon$  се нарича *кинематичен коефициент на турбулентната вискозност*. По такъв начин получаваме израз за тангенциалните напрежения, включващи ламинарното триене и турбулентното триене:

$$P_{xy} = \rho (\nu + \varepsilon) \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Като вземем предвид тази формула, уравненията на турбулентния граничен слой (5.37) добиват следния вид:

$$(5.38) \quad \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \varepsilon) \frac{d\bar{u}}{dy} \right],$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0.$$

Ако въз основа на експериментални данни се определи  $\varepsilon$ , то системата (5.38) ще бъде годна за извършване на разчет на течения в турбулентен граничен слой. Такова съчетаване на емпиричните закони на турбулентното триене с диференциалните уравнения на движението е особено ефективно за описание на свободните гранични слоеве. В други случаи се налага да се разглеждат усложнени модели, които свързват  $\varepsilon$  с осредненото поле на скоростите, или да се прилагат приближени подходи въз основа на интегралните закони за запазване.

## 5.2.2. Турбулентни течения в тръби

В основата на теоретичните модели за разчети на течения близо до гладки твърди повърхнини се използват установените експериментални факти, отнасящи се за съпротивлението и разпреде-

лението на скоростта. С помощта на теоремата за запазване количеството на движението се установява връзка между характеристиките на потока.

Да разгледаме турбулентно течение в кръгла тръба с гладки стени. В експериментите е най-лесно да се измерва обемният дебит на течността  $Q$ . Средната скорост  $\bar{u}_{\text{ср}}$  се намира чрез известния дебит  $Q$  от формулата

$$\pi a^2 \bar{u}_{\text{ср}} = Q,$$

и след това се изчислява числото на Рейнолдс

$$\text{Re} = \frac{\bar{u}_{\text{ср}} 2a}{\nu}.$$

Числото на Рейнолдс е основният безразмерен критерий, който определя характера на течението в тръба.

Да разгледаме един участък от тръбата с дължина  $L$  и нека  $p_1$  и  $p_2$  са средните налягания в крайните сечения. Съгласно теоремата за запазване количеството на движението сумата от силите, действащи на отделния обем при стационарно движение, трябва да бъде равна на нула:

$$(5.39) \quad 2\pi a L \tau_w = \pi a^2 (p_1 - p_2).$$

Ако се въведе коефициент на съпротивлението  $\lambda$  посредством равенството

$$(5.40) \quad \frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\lambda}{2a} \frac{1}{2} \rho \bar{u}_{\text{ср}}^2,$$

сравнявайки (5.39) с (5.40), намираме

$$(5.41) \quad \tau_w = \frac{1}{8} \lambda \rho \bar{u}_{\text{ср}}^2.$$

За практически цели е важно да се знае зависимостта на коефициента на съпротивление  $\lambda$  от числото на Рейнолдс. Ако тази зависимост, наричана закон за съпротивлението, е известна, то от (5.40) може да се изчисли разликата между наляганията, които трябва да се поддържат, за да се осигури преминаването на зададения дебит и по (5.41) да се изчисли силата на триенето по стената на тръбата.

Експериментално изучаване на турбулентните течения в тръби са извършвали много изследователи. Най-задълбочените и обширни експерименти за измерване на съпротивлението и разпределението на скоростта (И. Никурадзе, 1932 г.) се отнасят за числата на Рейнолдс в интервала  $4 \cdot 10^3 \leq \text{Re} \leq 3 \cdot 10^6$ . Въз основа на измервания е установено, че профилът на скоростта се описва добре посредством степенния закон

$$(5.42) \quad \frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = \left( \frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Максималната стойност на скоростта  $\bar{u}_m$  се получава в центъра на тръбата при  $y=a$ . Чрез подходящ подбор на  $n$  се постига много добро съвпадение с опита. С увеличаване на  $Re$  профилът на скоростта се запълва, но показателят на степента се изменя слабо:  $n=6$  при  $Re=4.10^3$ ;  $n=7$  при  $Re=110.10^3$ ;  $n=10$  при  $Re=3240.10^3$ .

Първият закон за съпротивлението в тръби е бил получен въз основа на обработка на по-ранни експериментални данни (Г. Блазиус, 1913 г.):

$$(5.43) \quad \lambda = 0,3164 Re^{-\frac{1}{4}}.$$

Този закон за съпротивлението е приложим до  $Re \approx 10^5$ .

Да приемем за съпротивлението закона на Блазиус (5.43), а за разпределението на скоростта — степенен закон. Да приложим торемата за запазване количеството на движението, за да оценим степенния показател  $n$  (Л. Прантъл, 1931 г.).

Като заместим  $\lambda$  от (5.43) в (5.41), получаваме

$$(5.44) \quad \tau_w = A \rho \bar{u}_{cp}^{\frac{7}{4}} \nu^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}, \quad A = 0,03325.$$

Да въведем динамичната скорост  $v_*$  от съотношението

$$v_* = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

и да изчислим максималната скорост  $\bar{u}_m$ :

$$\frac{\bar{u}_{cp}}{\bar{u}_m} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} = q(n).$$

С помоща на тези величини преобразуваме съотношението (5.44) по следния начин:

$$\frac{\bar{u}_m}{v_*} = q^{-1} A^{-\frac{4}{7}} \left( \frac{v_* a}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}}.$$

От това равенство и от (5.42) получаваме

$$(5.45) \quad \frac{\bar{u}}{v_*} = q^{-1} A^{-\frac{4}{7}} \left( \frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{v_* a}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}}.$$

В дясната страна на (5.45) трябва да участва величината  $y$  с размерност на дължина, откъдето следва, че  $n=7$ . При  $n=7$  от (5.45) получаваме следния закон за разпределение на скоростта:

$$(5.46) \quad \varphi = 8,74 \eta^{\frac{1}{7}},$$

$$\varphi = \frac{\bar{u}}{v_*}, \quad \eta = \frac{y v_*}{\nu},$$

По такъв начин от закона на Блазиус се получава показател  $n=7$  в степенния закон за разпределение на скоростта. Съвпадението с опита е осигурено до  $Re \approx 10^5$ .

Да разгледаме сега големи стойности на числото на Рейнолдс. Ако профилът на скоростта се представи чрез степенен закон, както показват измерванията на Никурадзе, с увеличаване на числото на Рейнолдс степенният показател в разпределението на скоростта намалява. Това подсказва, че при  $Re \rightarrow \infty$  трябва да съществува профил на скоростта, съдържащ логаритъм като граница на намаляващите степени. И така вместо (5.46) да запишем

$$(5.47) \quad \varphi = D \ln \eta + B.$$

Като сравним този закон с измененията на скоростта, определяме константите

$$D = 2,5; B = 5,5.$$

Експерименталните точки лягат добре върху тази крива, изменяйки  $y$  от стойности, съответстващи на  $\eta = 70$ , до средата на тръбата, където  $y = a$  (при  $\eta \geq 70$ ). С приближаването към стената турбулентните пулсации намаляват, затова разпределението на скоростта трябва да бъде близко до линеен закон

$$\varphi = \eta,$$

който е в сила при ламинарно течение.

Въз основа на сравняване на тези закони с експериментите може да се твърди, че течението в гладка кръгла тръба има ламинарен характер при  $0 \leq \eta \leq 5$ , ламинарно-турбулентен при  $5 < \eta \leq 70$  и чисто турбулентен при  $\eta > 70$ . Формулата (5.47) се нарича *универсален закон за разпределение на скоростите*.

Да приложим универсалния закон за разпределение на скоростите (5.48) към извода на коефициента на съпротивлението от теоремата за запазване количеството на движението. Преди всичко за средната по сечението скорост намираме

$$(5.48) \quad \bar{u}_{cp} = v_* \left[ D \ln \frac{av_*}{v} + B - \frac{3}{2} D \right].$$

Съгласно определението за динамична скорост  $\tau_w = \rho v_*^2$  и въз основа на (5.41) получаваме

$$(5.49) \quad v_* = \frac{1}{\sqrt{8}} \bar{u}_{cp} \sqrt{\lambda}.$$

Величината  $\frac{av_*}{v}$  представяме в следния вид:

$$(5.50) \quad \frac{av_*}{v} = \frac{1}{2} \frac{\bar{u}_{cp}}{v} \frac{d}{\bar{u}_{cp}} \frac{v_*}{\bar{u}_{cp}} = \frac{\bar{u}_{cp}}{v} \frac{d}{4\sqrt{2}}.$$

Замествайки  $\bar{u}_{cp}$ ,  $v_*$  и  $\frac{av_*}{v}$  в (5.48) с намерените за тях изрази (5.49) и (5.50), получаваме съотношението

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = D \ln \left( \frac{\bar{u}_{cp} d}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - D \ln 4\sqrt{2} + B - \frac{3}{2} D.$$

Като извършим необходимите пресмятания, получаваме универсалния закон на съпротивлението за гладки тръби (Л. Прантъл, 1933 г.):

$$(5.51) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = l \lg (\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) - b.$$

Този закон с коефициенти  $l=2$ ,  $b=0,8$  (те се различават малко от разчетните стойности  $l=2,035$ ;  $b=0,91$ ) дава съвпадение с резултатите на Никурадзе до  $\operatorname{Re}=3,2 \cdot 10^6$ .

### 5.2.3. Турбулентен граничен слой върху гладка повърхност

Уравнението за запазване количеството на движението (4.80) е валидно в случая на турбулентни течения. За пластина това уравнение има следния по-прост вид:

$$(5.52) \quad \tau_w = \rho U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx}.$$

Оттук намираме силата на съпротивлението, действащо върху част от пластината  $0 \leq x < L$  с ширина  $b$

$$(5.53) \quad W = b \rho U_\infty^2 \delta_2(x).$$

Измерванията при числа  $\operatorname{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu} < 10^6$  показват, че разпределението на скоростта в турбулентен граничен слой върху пластина малко се отклонява от степенния закон. Да приемем основаващото се на експериментални данни предположение, че профилите на скоростта са подобни и следват закона

$$(5.54) \quad \frac{\bar{u}}{U_\infty} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}.$$

За локалното съпротивление на стената да приемем формулата на Блазиус (5.42); изведена от експерименталните резултати в тръби. Като изразим  $\nu_*$  от (5.46) и заместим във формулата  $\tau_w = \rho \nu_*^2$ , за силата на триене върху стената на тръбата получаваме

$$\tau_w = 0,0225 \rho \bar{u}^{\frac{7}{4}} \left( \frac{\nu}{y} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Да допуснем, че тази формула за силата на триене са запазва и в случая на гладка пластина. Замествайки  $\pi$  с  $U_\infty$  и  $y$  с  $\delta$ , след прости преобразувания получаваме

$$(5.55) \quad \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = 0,0225 \left( \frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$



За профила на скоростта (5.54) намираме дебелината на изместване  $\delta_1$  и дебелината на загуба на импулса  $\delta_2$  по формулите, дадени в 4.3.2:

$$\delta_1 = \frac{1}{8} \delta, \quad \delta_2 = \frac{7}{72} \delta.$$

Като заместим  $\delta_2$  и  $\tau_w$  в (5.52), получаваме *уравнението за дебелината на слоя*

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left( \frac{v}{U_\infty \delta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

което се интегрира лесно при начално условие  $\delta(0) = 0$

$$(5.56) \quad \delta(x) = 0,37 x \left( \frac{U_\infty x}{v} \right)^{-\frac{1}{5}}.$$

По такъв начин дебелината на турбулентния граничен слой расте пропорционално на  $x^{\frac{4}{5}}$ .

Като заместим  $\delta_2$  в (5.53), намираме пълното съпротивление на пластината, намокрена от едната страна:

$$(5.57) \quad W = 0,036 \rho U_\infty^2 b L \left( \frac{U_\infty L}{v} \right)^{-\frac{1}{5}}.$$

Ако въведем коефициент на пълното съпротивление  $c_f$  посредством равенството

$$\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b L c_f = W,$$

то от (5.57) получаваме формулата

$$(5.58) \quad c_f = 0,072 \left( \frac{U_\infty L}{v} \right)^{-\frac{1}{5}}.$$

След замяна на коефициента 0,072 с 0,074 тази формула дава резултати, които се съгласуват много добре с експерименталните данни за съпротивлението върху пластината, турбулентният граничен слой на която започва от предния и край.

В съответствие с резултатите от § 5.1 трябва да имаме предвид, че граничният слой става турбулентен на определено разстояние от предния край  $x_n$ , което се определя от критичното число на Рейнолдс  $Re_n$ . Наличието на ламинарен участък намалява съпротивлението на пластината, затова от пълното съпротивление  $W$  трябва да се извади величината

$$\Delta W = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b x_n (c_{f_l} - c_{f_t}),$$

където  $c_{ft}$  и  $c_{fl}$  са пълните коефициенти на съпротивлението за турбулентно и ламинарно течение при  $Re = Re_n$ . Коефициентът  $c_{ft}$  се определя от формулата (5.58), а за  $c_{fl}$  в § 4.2 е получена формулата

$$(5.59) \quad c_{fl} = 1,328 (Re_n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Като извадим  $\Delta W$  от (5.57), получаваме израз за коефициента на съпротивление, в който е взет предвид ламинарният участък върху пластината:

$$(5.60) \quad c_f = \frac{0,074}{5 \sqrt{Re_L}} - \frac{c_1}{Re_L}, \quad c_1 = Re_n (c_{ft} - c_{fl})$$

Стойността  $c_1$  се определя за дадено  $Re_n$ , като се използват формулите (5.58) и (5.59). Числото на Рейнолдс, характеризиращо прехода  $Re_n$ , се изменя в зависимост от степента на турбулентност на обтичащия поток в широки граници

$$3 \cdot 10^5 \leq \frac{U_\infty x_n}{\nu} \leq 3 \cdot 10^6.$$

При  $Re_n = 3 \cdot 10^5$  получаваме  $c_1 = 1050$ , а при  $Re_n = 3 \cdot 10^6$  —  $c_1 = 8700$ . Приложимостта на формула (5.60) е ограничена отгоре с числото  $Re \approx 10^7$ , когато все още е в сила законът на Блазиус.

## 5.2.4. Свободна турбулентност

Пресмятанията за турбулентни течения далече от твърди граници могат да се извършат, като се използват диференциалните уравнения за граничен слой (5.38). Това се обяснява с обстоятелството, че в такива течения турбулентното триене е много пъти по-голямо от ламинарното триене и величината  $\nu$  в сравнение с  $\epsilon$  може да се пренебрегне в целия поток. В основата на теоретичните модели за свободни турбулентни потоци е заложен следният експериментален факт. Както показват измерванията, профилите на скоростта в течения и следи зад тела притежават свойството *автомоделност*. Посредством подходящ избор на мащаба на скоростта и ширината  $b(x)$  на турбулентната зона на смесване профилите на скоростта се привеждат в една форма. Автомоделността на (5.38) ще бъде осигурена, ако  $\epsilon$  зависи само от  $x$ . Подробният анализ на експерименталните данни показва, че коефициентът на турбулентното триене  $\epsilon$  действително може да се счита за постоянен по цялата ширина на зоната на смесване и зависи само от надлъжната координата  $x$ . За  $\epsilon(x)$  се приема полумпиричната зависимост (Л. Грантъл, 1942 г.)

$$(5.61) \quad \epsilon(x) = kb(x)(\bar{u}_m - u_i).$$

Тук  $k$  е константа, която се определя от сравнението с експеримента,  $\bar{u}_m$  и  $\bar{u}_i$  са максималната и минималната стойност на скоростта в сечението  $x$ .

Формулата (5.61) дава възможност да се построи автомоделно решение на (5.38) при  $v=0$ , аналогично на това, което беше направено в § 4.2 за ламинарни течения. Да приемем за ширината на турбулентната зона степенната зависимост

$$(5.62) \quad b(x) = Cx^\alpha.$$

Да въведем токовата функция на тока  $\psi(x, y)$  и да търсим автомоделно решение от вида

$$(5.63) \quad \psi = Bx^\beta f(\eta), \quad y = \eta b(x).$$

Тогава за проекциите на скоростта намираме

$$(5.64) \quad \bar{u} = \frac{B}{C} x^{\beta-\alpha} f'(\eta), \quad \bar{v} = -Bx^{\beta-1} (\beta f - \alpha \eta f').$$

В съответствие с (5.61), (5.62), (5.63) коефициентът на турбулентното триене се представя със следния израз:

$$(5.65) \quad \varepsilon(x) = k B m x^\beta,$$

в който  $m$  е разликата на най-голямата и най-малката стойност на  $f'(\eta)$ .

Като заместим в първото уравнение на (5.38) намерените изрази (5.64), (5.65) за  $u$ ,  $v$ ,  $\varepsilon$  (при  $v=0$ ), получаваме

$$\frac{k}{C} m x^{1-\alpha} f''' = (\beta - \alpha) f'^2 - \beta f f''.$$

Оттук намираме уравнението за автомоделната функция  $f(\eta)$  и две съотношения за определяне на константите, участващи в равненията (5.62) — (5.65):

$$y(5.66) \quad f''' + \beta f f'' + (1 - \beta) f'^2 = 0,$$

$$(5.67) \quad \alpha = 1, \quad C = k m.$$

Да приложим (5.66) към изучаване на течение в слой на смесване, струи и следи. Ще отбележим, че първите изследвания на тези течения са били направени въз основа на други модели за турбулентната вискозност (В. Толмин, 1926).

**Слой на смесване.** Да предположим, че в сечението  $x=0$  започват да си взаимодействуват два успоредни потока, имащи съответно скорости  $U_1$  и  $U_2$ . Тогава в направление на сечението се образува зона на смесване с ширина  $b(x)$ . От (5.64) следва, че за да се стреми скоростта  $U$  при  $\eta \rightarrow \pm \infty$  към  $U_1$  и  $U_2$ , трябва да положим  $\beta = \alpha = 1$ . Като вземем  $B = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) C$ , получаваме следната гранична задача:

$$(5.68) \quad f''' + f f'' = 0,$$

$$f' \rightarrow 1 \pm \lambda, \eta \rightarrow \pm \infty, \\ \lambda = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}.$$

Ще намерим решението на (5.68) при предположение, че  $\lambda \ll 1$  по метода на разлагане в ред по степените на  $\lambda$  (Г. Гьортлер, 1942 г.):

$$f = \eta + \lambda f_1(\eta) + \dots$$

Тогава за  $f_1(\eta)$  се получава граничната задача

$$f_1''' + \eta f_1' = 0,$$

$$f_1' \rightarrow \pm 1, \eta \rightarrow \pm \infty$$

с решение

$$f_1'(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \eta} e^{-z^2} dz.$$

С точност до членовете от ред  $\lambda^2$  разпределението на скоростта в слоя на смесване има вида:

$$\bar{u} = \frac{U_1 + U_2}{2} \left( 1 + \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \eta} e^{-z^2} dz \right).$$

Тъй като за полученото решение  $f'(\eta) = 1 + \lambda f_1'(\eta) + \dots$ , то  $m = 1 + \lambda - (1 - \lambda) = 2\lambda$ . Тогава от (5.63) и (5.67) получаваме следния израз за  $y$ :

$$y = 2k \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} x \eta.$$

Константата  $k$  се намира от експеримента така, че да имаме добро съответствие между теорията и експеримента. Ширината на зоната на смесване расте линейно с разстоянието.

**Потопена струя.** В симетрична потопена струя максималната стойност на скоростта се достига върху оста, а минималната стойност на скоростта е равна на нула, затова  $m = f'(0)$ . За определяне на показателя  $\beta$  използваме интегрален закон за запазване количеството на движението

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = J = \text{const.}$$

Оттук намираме  $\beta = \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2}$  и получаваме *условието за нормировката*

$$(5.69) \quad B^2 \int_{-\infty}^{\infty} f'^2 d\eta = JC.$$

Така за автомоделната функция  $f(\eta)$  получаваме граничната задача

$$(5.70) \quad \begin{aligned} f''' + \frac{1}{2} f f'' + \frac{1}{2} f'^2 &= 0, \\ f &= 0, \quad f' = m, \quad \eta = 0, \\ f' &\rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

След двукратно интегриране и вземане предвид на граничните условия получаваме уравнението

$$f' + \frac{1}{4} f^2 = m.$$

Като използваме произволността на  $m$ , полагаме  $m = 4$  и получаваме

$$f = 4 \operatorname{th} \eta.$$

От (5.67) следва  $C = 4k$ , поради което разпределението на скоростта в плоска турбулентна струя се описва от формулата

$$\bar{u} = \frac{B}{k} \frac{1}{\sqrt{x}} (1 - \operatorname{th}^2 \eta), \quad y = 4k\eta x$$

Константата  $B$  се определя от условието за нормировка

$$(5.69) \quad B = \sqrt{\frac{3}{16} kJ}.$$

Остава константата  $k$  да се подбере така в решението, че да се осигури най-добро съгласуване с експеримента. Скоростта върху оста на плоска турбулентна струя намалява пропорционално на  $x^{-\frac{1}{2}}$ , докато ширината на струята расте линейно.

Първият разчет на плоска турбулентна струя е извършен от В. Толмин през 1926 г. Даденото по-горе решение е получено от Г. Райхард (1942 г.) и Г. Гьортлер (1942 г.).

**Течение в следа.** Плоско течение в следа зад обтичано тяло притежава свойството автомоделност на големи разстояния от тялото, когато може да се счита, че величината  $u_1 = U_\infty - \bar{u}$  е малка в сравнение с  $\bar{u}$ . Автомоделното решение на линеаризираното уравнение

$$(5.71) \quad U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$$

търсим по аналогия с (5.64) във вида

$$(5.72) \quad u_1 = Bx^\beta f(\eta), \quad y = Cx^\alpha \eta.$$

Максималната стойност  $u_1$  се достига при  $\eta=0$ . Без ограничение на общността може да се приеме, че  $f(0)=1$ , затова за коефициента на турбулентната вискозност от (5.61), (5.72) получаваме формулата

$$(5.73) \quad \varepsilon(x) = kBCx^{\beta+\alpha}.$$

След заместване на (5.61), (5.72) в уравнението (5.71) получаваме следното обикновено диференциално уравнение:

$$(5.74) \quad \sigma f''' - \beta f + \alpha \eta f' = 0, \quad \sigma = \frac{kA}{U_\infty C}$$

при условие, че

$$(5.75) \quad \beta - \alpha + 1 = 0.$$

Използваме теоремата за запазване количеството на движението (4.41), а именно:

$$\rho U_\infty \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dy = W = \text{const},$$

където  $W$  е силата на съпротивление за единица ширина и след заместване в (5.72) намираме

$$(5.76) \quad \alpha + \beta = 0,$$

$$(5.77) \quad \rho BCU_\infty \int_{-\infty}^{\infty} f d\eta = W.$$

Като решим съвместно (5.75) и (5.76), намираме  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = -\frac{1}{2}$ . Тогава лесно се получава и решението на (5.74):

$$f = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma} \eta^2\right).$$

Сега определяме  $B$  от условието (5.77):

$$2\sqrt{\pi\sigma} \rho U_\infty BC = W.$$

И така разпределението на скоростта далече от тялото в турбулентно течение в следа се дава от формулата

$$(5.78) \quad \frac{\bar{u}}{U_\infty} = 1 - \frac{W}{2\sqrt{\pi\sigma} C \rho U_\infty^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4\sigma} \eta^2\right).$$

Решението съдържа константата  $c\sqrt{\sigma} = \sqrt{kCBU_\infty^{-1}}$ , която се определя от сравняването на изчислените и експерименталните резултати. Поради (5.76) коефициентът на турбулентната вискозност в следата  $\varepsilon = kCB = \varepsilon_0$  запазва постоянна стойност при всички  $x$ . Ширината на турбулентната следа зад плоско тяло расте

пропорционално на  $x^{\frac{1}{2}}$ , а отклонението на скоростта от равномерната скорост намалява, както  $x^{-\frac{1}{2}}$ .

### 5.2.5. Течение на струя върху твърда повърхност

Течението на радиална струя, разпространяваща се върху твърда повърхност, се описва от системата уравнения на граничния слой (4.17). Да запишем тази система така, че да се включат и турбулентните течения:

$$(5.79) \quad \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial (x^j \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (x^j \bar{v})}{\partial y} = 0, \quad j=0, 1.$$

Граничните условия на течението, предизвикано от радиална струя и разпространяващо се върху дадена равнина, имат вида

$$(5.80) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= 0, \quad \bar{v} = 0 && \text{при } y=0; \\ \bar{u} &\rightarrow 0 && \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Системата (5.79) с гранични условия (5.80) притежава следната инвариантна величина:

$$(5.81) \quad \int_0^\infty x^j \bar{u} \left( \int_y^\infty x^j \bar{u}^2 dy \right) dy = F = \text{const.}$$

Това съотношение се получава от (5.79) след двукратно умножаване на първото уравнение с  $x^j$  и интегриране по  $y$  на получения резултат.

Да предположим, че в зоната на пристенното течение са удовлетворени съотношенията за турбулентен граничен слой, установени в § 5.2.3. Нека за коефициента на турбулентната вискозност  $\varepsilon$  имаме

$$(5.82) \quad \varepsilon = c x^\gamma \bar{u}^\delta.$$

Да изберем числата  $c$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  така, че да имаме съгласуване на решението за турбулентно течение върху стената с формулите (5.54), (5.55). При  $\delta=0$  от (5.82) получаваме разгледаната по-горе формула, която съответствува на хипотезата на Прантъл за турбулентна вискозност в свободна струя, а при  $\gamma=0$ ,  $\delta=0$ ,  $c=\nu$  получаваме ламинарно течение в струя.

Нека разгледаме автомоделно решение на задачата (5.79), (5.80) аналогично на решенията от § 4.2, където е построен един клас от автомоделни решения на уравненията за плоски и ососиметрични течения (4.19). Да положим

$$(5.83) \quad \begin{aligned} \psi &= Bx^\beta f(\eta), \quad \eta = Ax^\alpha y, \\ \bar{u} &= \frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = ABx^{\beta+\alpha-j} f'(\eta), \\ \bar{v} &= -\frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -Bx^{\beta-j-1} (\alpha \eta f' + \beta f). \end{aligned}$$

Изразът (5.81) е инвариантен относно  $x$  за решението (5.83), когато е удовлетворено съотношението

$$(5.84) \quad 3\beta + \alpha - j = 0.$$

От (5.81) за константите  $A, B, C$  получаваме съотношението

$$(5.85) \quad AB^3 \int_0^\infty f' \left( \int_\eta^\infty f'^2 d\eta \right) d\eta = F.$$

Като заместим (5.83), (5.82) в първото уравнение на системата (5.79), намираме уравнението

$$(5.86) \quad (f' f'')' + f f'' - \frac{\alpha + \beta - j}{\beta} f'^2 = 0$$

и следното съотношение, което осигурява независимост на (5.86) от  $x$ :

$$(5.87) \quad \alpha(1+\delta) - \beta(1-\delta) + \gamma + (1-\delta)j + 1 = 0.$$

При извеждането на (5.86) е прието нормиращо съотношение свързващо константите  $A, B, C$ :

$$(5.88) \quad \beta B^{1-\delta} = A^{1+\delta} C.$$

От (5.84) за коефициента на (5.86) получаваме

$$\frac{\alpha + \beta - j}{\beta} = 2.$$

Да разгледаме най-напред ламинарно течение в пристенна струя. В този случай  $\delta = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $c = v$ . Решаваме съвместно (5.84), (5.87) и намираме

$$\alpha = -\frac{2j+3}{4}, \quad \beta = \frac{2j+1}{4}.$$

При  $\delta = 0$  получаваме граничната задача

$$(5.89) \quad \begin{aligned} f''' + f f'' + 2f'^2 &= 0, \\ f(0) &= 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 0, \end{aligned}$$

която може точно да се интегрира. Като умножим уравнението (5.89) с  $f$  и интегрираме, получаваме,

$$f f'' - \frac{1}{2} f'^2 + f^2 f' = 0.$$

След умножаване на това уравнение с  $f^{-\frac{3}{2}}$  и интегриране намираме



$$(5.90) \quad f^{-\frac{1}{2}} f' + \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Константата от интегрирането е избрана така, че  $f(\infty) = 1$ . Полагаме

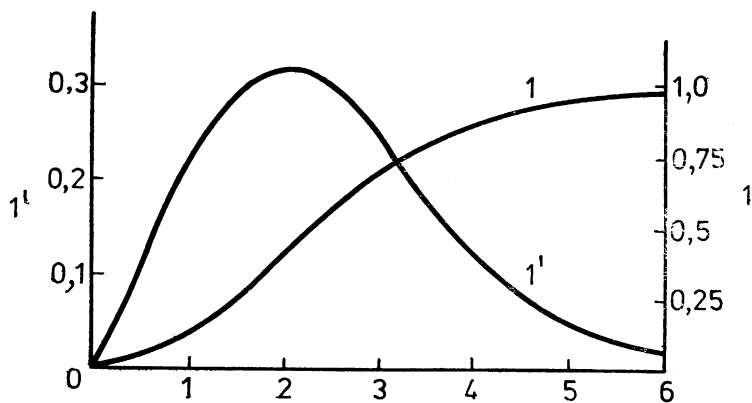
$$(5.91) \quad f = g^2, \quad (f' = 2gg'),$$

Тогава (5.90) приема вида

$$g' = \frac{1}{g} (1 - g^3).$$

След интегриране намираме

$$(5.92) \quad \eta = \log \frac{\sqrt{1+g+g^2}}{1-g} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}g}{2+g}.$$



Фиг. 40

На фиг. 40 е показано разпределението на безразмерната скорост  $f'(\eta)$ , построено съгласно формулите (5.91), (5.92). Максималната стойност  $f' = 2^{-\frac{5}{3}} = 0,315$  се получава в точката, в която  $f = 2^{-\frac{4}{3}} = 0,397$ . Триенето върху стената се определя от  $f''(0) = \frac{2}{9}$ .

Като използваме полученото решение и формулите (5.83), за характеристиките на полето на течението намираме

$$(5.93) \quad \psi = Bx^{\frac{2j+1}{4}} f(\eta),$$

$$u = ABx^{-\frac{1}{2}-j} f'(\eta),$$

$$\eta = Ax^{-\frac{2j+3}{4}} y,$$

$$\tau_0 = \nu = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = A^2 B x^{-\frac{6j+5}{4}} f''(0).$$

В тези съотношения константите се определят от формулите

$$AB^3q = F, \quad \beta B = Av, \quad q = \frac{1}{10},$$

които следват от (5.85), (5.88).

От полученото за ососиметричния случай решение се вижда, че с отдалечаване от точката  $x=0$  скоростта в равнината намалява във всички направления така, както намалява  $x^{-\frac{3}{2}}$  с растението на  $x$ , а дебелината на течението расте, както  $x^{\frac{5}{4}}$ . За плоска струя тези оценки са съответно  $x^{-\frac{1}{2}}$  и  $x^{\frac{3}{4}}$ . Профилите на скоростта в ососиметрична и плоска струя са еднакви във всяко сечение  $x = \text{const}$ , тъй като се описват от едно и също уравнение -- (5.89).

Да разгледаме сега случая на турбулентна струя. Профилът на скоростта и триенето близо до стената по предположение трябва да се съгласуват с формулите за турбулентно течение върху твърда стена (5.54) и (5.55). Тъй като

$$\tau = \epsilon \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u \sim y^{\frac{1}{7}}, \quad \tau \sim \epsilon y^{-\frac{6}{7}},$$

то

$$\epsilon \sim \tau u^6.$$

От (5.55) получаваме

$$\tau \sim u^{\frac{7}{4}} b^{-\frac{1}{4}}, \quad \sim \epsilon \frac{u}{b}.$$

Тогава съгласно (5.83)

$$\epsilon \sim u^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}} \sim x^{\frac{3}{4}(\beta-j)}.$$

Двете оценки за  $\epsilon$  се съгласуват с формулата (5.82), ако приемем

$$(5.94) \quad \delta = 6, \quad \gamma = \frac{3}{4}(\beta - j).$$

Като решим съвместно (5.84), (5.87), (5.94), намираме

$$\alpha = \frac{\beta}{4} - \frac{j}{4} - 1, \quad \beta = \frac{5}{13}j + \frac{4}{13}.$$

Изследването се свежда към граничната задача

$$(5.95) \quad (f^6 f'')' + f f'' + 2 f'^2 = 0,$$

$$f \sim \eta^{\frac{1}{7}}, \quad \eta \rightarrow 0, \quad f' \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty,$$

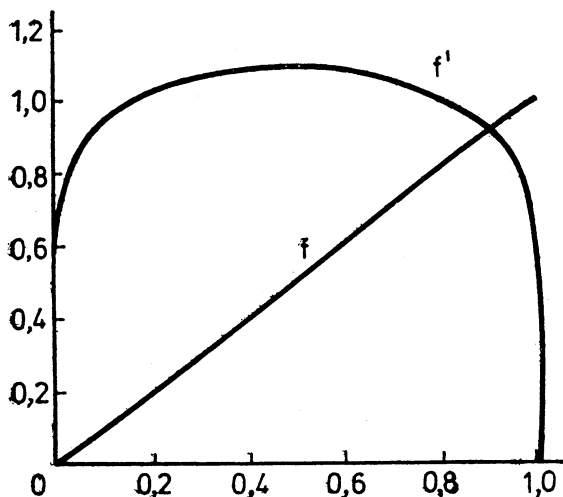
която се решава в квадратури. Като умножим уравнението (5.95) с  $f$  и интегрираме, получаваме

$$f f' f'' - \frac{1}{8} f'^8 + f^2 f' = 0.$$

След умножаване със  $7f^{\frac{15}{8}}$  и интегриране намираме

$$(5.96) \quad f^{-\frac{7}{8}} f'' + \frac{56}{9} f^{\frac{9}{8}} = \frac{56}{9}.$$

Тук константата от интегрирането е избрана така, че  $f=1$  и  $f'=0$ .



Фиг. 41

Като положим

$$g(\xi) = f^{\frac{7}{8}}, \quad \xi = \frac{7}{8} \left( \frac{56}{9} \right)^{\frac{1}{7}} \eta,$$

уравнението (5.96) добива вида

$$g'' = 1 - g^{\frac{9}{7}}.$$

Интегрираме и получаваме

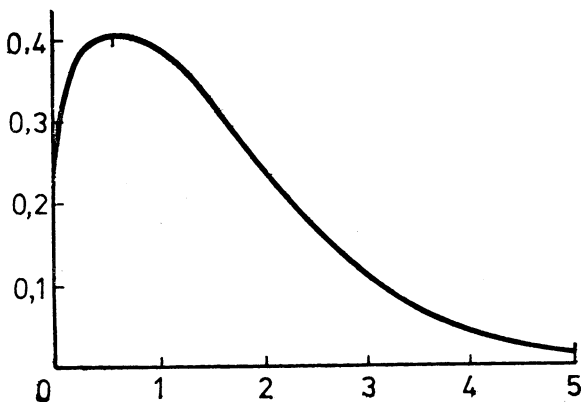
$$(5.97) \quad \xi = \int_0^g \frac{dg}{\left( 1 - g^{\frac{9}{7}} \right)^{\frac{1}{7}}}.$$

Този интеграл се пресмята числено. На фиг. 41 са показани зависимостите на  $f(\eta)$  и  $f'(\eta)$  от разстоянието до стената ( $\eta$ ). В ососиметричния случай с отдалечаването от точката  $x=0$  скоростта намалява така, както намалява  $x^{-1,38}$  с растенето на  $x$ , а ширината на струята расте така, както расте  $x^{1,08}$ . Полученото решение е удовлетворително до точката, в която  $f'(\eta)$  достига максимума, и не е удовлетворително във външната част на струята, която е отдалечена от стената. Причината за това е, че приетият

модел за турбулентността не се съгласува с течението, което е далече от стената. По-подходящ за тази част от струята е моделът на Прантъл (5.61), в който коефициентът на турбулентната вискозност не зависи от напречната координата

$$\epsilon = c\chi^2, \delta = 0.$$

Налага се да се използва комбиниран модел за турбулентността, чийто недостатък е това, че не се получава пълна автомоделност и е възможен само приближен анализ на течението.



Фиг. 42

Да разделим течението на вътрешна и външна област, чийто коефициенти на турбулентна вискозност се изразяват с формулата (5.82) при  $\delta=6$  и  $\delta=0$ . Тъй като решението не е напълно автомоделно, съотношението (5.84) няма да е удовлетворено. Поради това величината  $a = \beta^{-1}(\beta + \alpha - j)$  в уравнението (5.86) може да се разглежда като произволен параметър. По такъв начин от (5.86) за вътрешната и външната област получаваме уравненията

$$(f'^6 f'')' + f f'' + a f'^2 = 0,$$

$$f'' + f f'' + a f'^2 = 0.$$

Пълната процедура за решаването на задачата изисква срестване на вътрешното и външното решение. На фиг. 42 е показано разпределението на скоростта, пресметнато по изложения по-горе метод при  $\alpha = 1.4$ . Получаваме решение, което се съгласува добре с експерименталните данни.

В реални технически устройства и в естествени природни условия флуидните течения имат предимно турбулентен характер. С това се обяснява огромният и постоянен интерес към изучаването на турбулентността.

Съществуват голям брой монографии и статии, посветени на проблемите на турбулентните течения. Съществен принос в развитието на най-важните направления в науката за турбулентността и в решението на конкретни задачи внасят съветските учени.

## ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ

Числените методи за решаване уравненията на Навие — Стокс се използват все по-често, тъй като възможностите за аналитичното им решаване са ограничени. Дори когато задачата може да се опрости и сведе към обикновени диференциални уравнения, за да се получат конкретни данни за течението, в повечето случаи се налага тя да се решава числено. В предишните глави много пъти изследването завършваше с уговорката, че по-нататък задачата може да се реши числено и съответните числени резултати се дават готови. Сега да разгледаме конкретни изчислителни схеми, които позволяват уравненията да се решават числено.

### § 6.1. НАЧАЛНИ И ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Обикновените диференциални уравнения се получават като междинен резултат при решаването на уравненията на Навие — Стокс. Търсейки автомобилни решения на уравненията на Навие — Стокс, получаваме нелинейни обикновени диференциални уравнения (например (2.86), (2.93), (2.105)), за които се задават допълнителни условия в две гранични точки (или в една точка и на безкрайност). Като търсим решението на уравненията на граничния слой във вид на ред, получаваме рекурентни системи обикновени диференциални уравнения от вида (4.70), първото уравнение от които е нелинейно, а следващите — линейни.

Методът на малките квадрати (когато той е приложим) за изследване на устойчивостта води до гранични задачи от друг вид. При тези задачи уравненията и граничните условия са хомогенни и трябва да се намерят такива стойности на параметъра, при които съществува ненулево решение, с други думи, трябва да се реши задача за собствени стойности и собствени функции. Така задачата за изследване устойчивостта на плоскопаралелното течение се свежда до задачата за собствени стойности и собствени функции (5.8), (5.9).

Във всички тези случаи получаваме задачи с дадени гранични условия в две точки. Методът на интегралните съотношения води към по-проста задача: за дебелината на граничния слой се получава обикновено диференциално уравнение от първи ред (4.83) с начални условия в точката  $x=0$ .

### 6.1.1. Основни понятия при метода на крайните разлики

Да разгледаме задачата с начални данни (задача на Коши) за обикновено диференциално уравнение: да се реши уравнението

$$(6.1) \quad \frac{du}{dt} = F(u, t)$$

в интервала  $[0, L]$  при дадено начално условие  $u(0) = u_0$ .

Нека въведем редицата от равноотдалечени точки  $t_k = k\Delta t$  ( $k=0, 1, 2, \dots, J$ ) със стъпка  $\Delta t$ . Да означим приблизителните стойности на  $u(t)$  в точките  $t_k$  с  $u_k$ .

Най-простият начин за апроксимиране на диференциалното уравнение (6.1) в тези точки е замяната на производната с отношение на крайните разлики. Тази замяна може да се извърши по много начини. Например, като използваме стойностите  $u_k$  в две съседни точки, можем да запишем

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \left(\frac{du}{dt}\right)_k &\approx \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t}, \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_k &\approx \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta t}, \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{k+\frac{1}{2}} &\approx \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t}. \end{aligned}$$

В първия израз се използва едностранна разлика напред, във втория — едностранна разлика назад, в третия израз стойността на производната е пресметната в средата на интервала  $[t_k, t_{k+1}]$ ; затова се казва, че тук е използвана централна разлика.

Да запишем (6.1) в някоя точка  $t_k$ . Като заменим производната с една от апроксимациите (6.2), получаваме алгебрично уравнение, което представлява апроксимация с крайни разлики на диференциалното уравнение.

Другият начин за апроксимация се основава на предварително преобразуване на диференциалното уравнение до интегрално със следващо апроксимиране на интеграла:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t, u) dt, \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t, u) dt &= (\alpha F_k + \beta F_{k+1}) \Delta t, \alpha + \beta = 1, \\ u_{k+1} &= u_k + \Delta t (\alpha F_k + \beta F_{k+1}). \end{aligned}$$

В (6.3) са записани два начина за апроксимиране на интеграла: посредством формулата на правоъгълника ( $\alpha=1, \beta=0$  или  $\alpha=0, \beta=1$ ) и по формулата на трапеците ( $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{2}$ ).

За оценка на апроксимацията на диференциалното уравнение се прилага следният начин: заместваме точното решение в апроксимиращата схема и разлагаме полученния израз в ред на Тейлър относно избраната точка  $t_k$ . При това се предполага, че точното решение съществува и притежава необходимите свойства за диференцируемост.

Изразът  $\varepsilon(t_k)$ , който се получава след заместване на точното решение в диференчната схема, се нарича грешка на апроксимацията. Първият член в разложението на грешката на апроксимацията по степените на  $\Delta t$  определя реда на апроксимацията: ако  $\varepsilon = O(\Delta t^n)$ , казваме, че схемата е от  $n$ -и ред. За схемата (6.3) получаваме

$$\frac{du}{dt} - F = \left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \beta \frac{dF}{dt} \right] \Delta t + \left[ -\frac{1}{6} \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{1}{2} \beta \frac{d^2 F}{dt^2} \right] \Delta t^2 + \dots$$

Тъй като  $u$  удовлетворява уравнението (6.1), то

$$\varepsilon(t_k) = -\frac{1}{2} (1 - 2\beta) \left( \frac{d^2 u}{dt^2} \right)_k \Delta t - \frac{1}{6} (1 - 3\beta) \left( \frac{d^3 u}{dt^3} \right)_k \Delta t^2 + \dots$$

Ако  $\beta = 0$  или  $\beta = 1$ , то  $\varepsilon = O(\Delta t)$ ; ако  $\beta = \frac{1}{2}$ , то  $\varepsilon = O(\Delta t^2)$ . По такъв начин в първите два случая схемата е от първи ред на точност, а в последния — от втори ред на точност. Диференчната схема (6.3) при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  се нарича *схема на Ойлер*. Тази схема е явна, тъй като търсената величина  $u_{k+1}$  се изразява в явен вид. Диференчната схема (6.3) при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  се нарича *неявна*, тъй като  $u_{k+1}$  участва в дясната страна като аргумент на  $F_{k+1}$ . Ако  $F(u, t)$  е нелинейна функция, необходими са специални методи за решаване на нелинейните уравнения, например методът на Нютон.

Да построим приближено решение на задача (6.1) с начални условия, като се движим последователно от точка в точка, изчислявайки на всяка стъпка  $u_{k+1}$  по формулата на схемата (6.3).

Да наречем разликата между приближеното и точното решение във възлите на мрежата *грешка* на численото решение

$$\delta(t_k) = u_k - u(t_k).$$

Много е важно да се знае поведението на грешката в решението с увеличаване на крачката по  $t$  при фиксирано  $\Delta t$ . Да допуснем, че точното решение остава ограничено, когато  $t$  расте. Ако грешката  $\delta$  е ограничена, когато  $k$  расте при фиксирано  $\Delta t$ , решението  $u_k$  се нарича *устойчиво*. Диференчната схема се нарича *устойчива*, ако при произволни начални условия се получава *устойчиво* решение.

Тъй като приближеното решение не е известно в началото, неизвестно е и поведението на грешката. То може да се оцени, като се разгледат частни решения.

Да разгледаме като пример случая  $F(u, t) = i\omega u$ . Точното решение на уравнението (6.1) в този случай се описва от колебания с честота  $\omega$ :

$$(6.4) \quad u = u_0 e^{i\omega t}.$$

Диференчната схема (6.3) също се решава лесно

$$(6.5) \quad \begin{aligned} u_{k+1} &= g u_k, \\ g &= \frac{1+i\alpha p}{1-i\alpha p}, \quad p = \omega \Delta t. \end{aligned}$$

Изразът  $g$  се нарича *множител на прехода*. Ако  $|g| > 1$ , то грешката, допусната при някаква стъпка, ще расте неограничено при многократно прилагане на (6.5). Естествено е диференчната схема да се нарича *неустойчива при*  $|g| > 1$ , *устойчива при*  $|g| < 1$  и *неутрална при*  $|g| = 1$ . От формулата (6.5) следва, че за схемата на Ойлер получаваме

$$|g| = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} > 1,$$

а за неявната схема

$$|g| = (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}} < 1.$$

С растенето на честотата  $\omega$  величината  $|g|$  расте за схемата на Ойлер и намалява за неявната схема.

По такъв начин колебанията с малка амплитуда, пресмятани по схемата на Ойлер, могат да станат произволно големи. Особено бързо растат високочестотните колебания. Този чисто изчислителен ефект на неустойчивостта не е свързан с механичните свойства на задачата. Като намаляваме стъпката  $\Delta t$ , може да се намалява неустойчивостта, но да се отстрани напълно, не може. При използване на неявна схема малките колебания затихват — особено бързо това става при високочестотните колебания. Схемата е устойчива и дисипативна независимо от големината на стъпката  $\Delta t$ .

За да се реши за уравнението (6.1) задача с начално условие (задача на Коши), трябва да се използва *устойчива диференчна схема*. Ако се използва неустойчива схема, трябва да се вземе предвид възможността за недопустимо нарастване на грешката при интегриране чрез много стъпки по  $t$ .

Създадени са много схеми с необходимите свойства за добра апроксимация и устойчивост. Най-често се използва *схемата на Рунге—Кута* от 2-ри и 4-и ред на точност. Формулите за пресмятане по схемата на Рунге—Кута от 2-ри ред имат вида

$$(6.6) \quad \begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \Delta t F \left( u_k + \frac{1}{2} \Delta u_k, \quad t + \frac{1}{2} \Delta t \right), \\ \Delta u_k &= \Delta t F(u_k, t_k). \end{aligned}$$

### 6.1.2. Методи за решаване на гранични задачи

Да разгледаме обикновеното диференциално уравнение от ред  $n > 1$ :

$$(6.7) \quad y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \dots, y', y, t).$$



Ако допълнителните  $n$  условия, които определят конкретното решение на това уравнение, са дадени в една точка, става дума за *задача с начални условия (задача на Коши)*. Нейното решение може да се получи, като пресмятанията се извършат стъпка по стъпка по времето  $t$ . Удобно е уравнението (6.7) да сведем към система уравнения от първи ред, за която са приложими всички съображения за диференчните схеми, тяхната точност и устойчивост.

Ако  $m$  от допълнителните условия са дадени в една точка, а  $n-m$  условия — в друга, говорим за *гранична задача*. Решението на една гранична задача може да се извърши по два начина — като се сведе към задача на Коши или чрез директно решаване на уравненията на диференчната схема.

По първия начин се дават пробни стойности за недостигащите  $n-m$  условия в една точка и уравнението се интегрира стъпка по стъпка в посока към другата гранична точка. Като дойдем до тази точка, проверяваме дали полученото решение удовлетворява дадените  $n-m$  условия. Ако те не са изпълнени, пробните стойности се коригират и системата се интегрира отново. При този начин на решаване разчетните формули трябва да се допълнят с правила за коригиране на пробните гранични условия.

Вторият начин изисква уравненията на диференчната схема да се записват във всяка от вътрешните  $J-n+1$  точки; чрез крайни разлики се записват и  $n$ -те гранични условия. По такъв начин се получава система от  $J+1$  алгебрични уравнения за определянето на неизвестните  $u_k$ , където  $k=1, 2, \dots, J$ . В този случай главният въпрос е свързан с *методите за решаване на тази система*.

**Метод на прогонката.** Ако изходното диференциално уравнение е линейно, апроксимацията чрез крайни разлики води до система линейни алгебрични уравнения, решението на която може да се получи по всеки стандартен метод.

*Методът на прогонката* е един от най-ефективните и ще го приложим при решаването на гранична задача за диференциално уравнение от втори ред:

$$(6.8) \quad u'' + a(t)u' + b(t)u = d(t),$$

$$(6.9) \quad u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L.$$

Апроксимираме производните в (6.8) чрез централни разлики на мрежата  $t_k = k\Delta t$  ( $k=0, 1, 2, \dots, J$ ),

$$u_k'' = \frac{1}{\Delta t^2} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}), \quad u_k' = \frac{1}{2\Delta t} (u_{k+1} - u_{k-1}).$$

Тогава получаваме следните уравнения:

$$(6.10) \quad A_k u_{k+1} + B_k u_k + C_k u_{k-1} = F_k \quad (k=1, 2, \dots, J-1),$$

$$A_k = 1 - \frac{1}{2} \Delta t a_k, \quad B_k = -2\Delta t^2 b_k,$$

$$C_k = 1 + \frac{1}{2} \Delta t a_k, \quad F_k = \Delta t^2 d_k.$$

Към тези  $(J-2)$  уравнения добавяме двете гранични условия (6.9) и получаваме затворена система от  $J$  уравнения с  $J$  неизвестни.

Да допуснем, че за произволно  $k=1, 2, \dots, J-1$  може да запишем

$$(6.11) \quad u_{k-1} = E_{k-1}u_k + D_{k-1}.$$

Като заместим в (6.10), за  $u_k$  намираме

$$u_k = -\frac{C_k}{B_k + A_k E_{k-1}} u_{k+1} + \frac{F_k - A_k D_{k-1}}{B_k + A_k E_{k-1}}.$$

Сравнявайки тази формула с (6.11), получаваме следните формули за  $E_k$  и  $D_k$ :

$$(6.12) \quad E_k = -\frac{C_k}{B_k + A_k E_{k-1}}, \quad D_k = \frac{F_k - A_k D_{k-1}}{B_k + A_k E_{k-1}}.$$

Тогава от (6.11) и граничното условие в точката  $t=0$  имаме

$$(6.13) \quad E_0 = 0, \quad D_0 = u_0.$$

Формулите (6.12), (6.13) дават рекурентни изрази за коефициентите  $E_k, D_k$ , които могат да бъдат изчислени последователно при  $k=1, 2, \dots, J-1$  (права прогонка). Като изчислим  $E_{J-1}, D_{J-1}$ ,  $u_{J-1}$  определяме по (6.11) съгласно граничното условие  $u_J = u_L$ .

След това по (6.11) се извършва обратна прогонка, посредством която се пресмятат всички стойности  $u_k$  ( $k=J-1, J-2, \dots, 1$ ). Методът на прогонката е ефективен — изисква сравнително малко време и е устойчив по отношение на малки грешки.

**Метод на Нютон—Рафсън.** Когато изходното диференциално уравнение е нелинейно, задачата за решаване на системата уравнения в крайни разлики е по-трудна. Често се използват итерационни методи и по-специално методът на Нютон—Рафсън. Нека е дадено нелинейното алгебрично уравнение

$$f(u) = 0$$

и  $u_m$  е някаква пробна приближена стойност на корена му, която ще се опитаме да подобрим. Разлагаме  $f(u)$  в ред на Тейлър в околността на  $u_m$ . Като се ограничим само с линейния член, получаваме

$$f(u) = f(u_m) + f'(u_m)(u - u_m) = 0.$$

Оттук намираме

$$(6.14) \quad u_{m+1} = u_m - \frac{f(u_m)}{f'(u_m)}.$$

Формулата (6.14) се използва за итерационни изчисления, които се извършват дотогава, докато се удовлетвори неравенството  $|u_{m+1} - u_m| < \epsilon$ . Този метод дава една редица от стойности  $u_0, u_1, \dots, u_{m+1}$ , която клони към точното решение  $u_T$ , ако  $u_0$  е достатъчно близко до  $U_T$ .

Нека е дадена система от две нелинейни алгебрични уравнения

$$f(u, v) = 0, \quad \varphi(u, v) = 0.$$

Методът на Нютон—Рафсън, приложен за тези уравнения, се свежда към итерационните формули

$$(6.15) \quad u_{m+1} = u_m - \frac{f(u_m, v_m)}{\frac{\partial f}{\partial u}(u_m, v_m)}, \quad v_{m+1} = v_m - \frac{\varphi(u_{m+1}, v_m)}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_{m+1}, v_m)}.$$

Итерациите се извършват, докато се получи

$$|u_{m+1} - u_m| < \varepsilon, \quad |v_{m+1} - v_m| < \varepsilon.$$

Методът се обобщава и в случая на системи от по-висок ред. Вместо частни производни в общия случай се използват съответни детерминанти.

### 6.1.3. Решаване на автомоделни задачи

Да разгледаме един метод за числено решаване на нелинейната задача (4.34), към която се свежда изследването на граничен слой при степенен закон на разпределение на външната скорост

$$f''' + \frac{1}{2}(1+m)ff'' + m(1-f^2) = 0,$$

$$f = 0, \quad f' = 0, \quad \eta = 0,$$

$$f' \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Тази гранична задача е типична в теорията на граничния слой; към задачи от подобен вид се свежда и намирането на автомоделни решения на уравненията на Навие—Стокс.

Да въведем еквивалентна система уравнения от първи ред.

$$(6.16) \quad \begin{aligned} f' &= p, \\ p' &= q, \\ q' &= -m - \frac{1}{2}(1+m)fq + mp^2, \end{aligned}$$

$$f(0) = 0, \quad p(0) = 0 \quad p \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty.$$

Ще решим задача (6.16), като я сведем към задача с начални условия. Задаваме в точката  $\eta = 0$  пробна стойност  $q = q_0$  и получаваме за уравненията (6.16) задача на Коши с условия

$$f(0) = 0, \quad p(0) = 0, \quad q(0) = q_0.$$

Стойността  $q_0$  трябва да се подбере така, че да се удовлетвори граничното условие при  $\eta \rightarrow \infty$ . Това условие се пренася на някакво достатъчно голямо, но крайно разстояние  $\eta_*$ :

$$(6.17) \quad F = p(\eta_*) - 1 = 0.$$

Ясно е, че при произволно  $q_0$  условието (6.17) не е удовлетворено и че  $F$  е функция на  $q_0$ . Има няколко алгоритъма за подходящ подбор на  $q_0$ .

Чрез метода на Нютон—Рафсън  $q_0$  се пресмята по итерационната формула

$$(6.18) \quad q_{0,k+1} = q_{0,k} - \frac{F(q_{0,k})}{F'(q_{0,k})}.$$

Производната на (6.18) се пресмята числено:

$$F'(q_{0,k}) = \frac{F(q_{0,k} + \delta) - F(q_{0,k})}{\delta}.$$

Величините  $F'(q_{0,k})$  определяме чрез интегриране на системата (6.16) с начални условия  $(0, 0, q_{0,k})$  и  $(0, 0, q_{0,k} + \delta)$  ( $\delta$  е дадена малка величина). Итерациите започват с избора на пробната стойност  $q_{0,1}$  и завършват, когато се удовлетвори условието  $|F| < \epsilon$ . По метода на разполовяването на интервалите системата (6.16) се интегрира многократно при начални условия  $q_{0,1}$ ,  $q_{0,2} = q_{0,1} + \Delta_1$ ,  $q_{0,3} = q_{0,2} + \Delta_2, \dots$ . При всеки разчет  $p_{\max}$  се пресмята в интервала  $0 \leq \eta \leq \eta_*$  и нарастването  $\Delta_k$  се променя или остава същото в зависимост от величината  $p_{\max}$ . Ако стойността  $p_{\max}$  преминава през единицата, полагаме  $\Delta_{k+1} = \frac{1}{2} \Delta_k$  — в противен случай  $\Delta_{k+1} = \Delta_k$ . Интегрирането продължава дотогава, докато се удовлетвори неравенството  $|p_{\max} - 1| < \epsilon$ .

За да се опрости схемата на пресмятане при  $m=0$ , могат да се използват свойствата на изходното диференциално уравнение (4.34). Полагаме

$$(6.19) \quad f(\zeta) = \alpha^{\frac{1}{3}} f_0(\zeta), \quad \zeta = \alpha^{\frac{1}{3}} \eta$$

и разглеждаме задачата на Коши

$$(6.20) \quad f_0''' + \frac{1}{2} f_0 f_0'' = 0,$$

$$f_0 = 0, \quad f_0' = 0, \quad f_0'' = 1, \quad \zeta = 0.$$

Интегрираме (6.20) един път, след което намираме  $\alpha$  от условието на безкрайност:

$$f_0' = 1 = \alpha^{\frac{2}{3}} f_0'(\infty), \quad \alpha = [f_0'(\infty)]^{-\frac{3}{2}}.$$

Функцията  $f(\eta)$  се определя от (6.19).

Подобен метод се прилага и за числено решаване на граничната задача (2.93), (2.94), съдържаща два параметъра —  $\beta$  и  $\text{Re}$ . Въвеждаме смяната

$$(6.21) \quad f(\eta) = \text{Re} \nu^{-1} \Phi(\zeta), \quad \zeta = \text{Re} \nu \eta, \quad \beta_* = \beta \text{Re}^{1-4\nu}.$$

Тогава (2.93), (2.94) се свеждат към граничната задача

$$\Phi''' - \beta_* = \Phi'^2 - \Phi\Phi'', \\ \Phi(0) = \Phi''(0) = 0, \quad \Phi(\text{Re}^\gamma) = 0, \quad \Phi'(\text{Re}^\gamma) = \text{Re}^{1-2\gamma},$$

съдържаща параметъра  $\beta_*$ . Производната  $\Phi'(0)$  приема една от трите стойности  $+1, 0, -1$  вследствие избора на  $\gamma$ . При дадени  $\Phi'(0)$  и  $\beta_*$  задачата на Коши след точката  $\zeta=0$  се решава числено и интегрирането се води, докато се достигне точката  $\zeta_0$ , за която  $\Phi(\zeta_0)=0$ . В тази точка наклонът  $\Phi'$  определя  $\text{Re}$ . От условието  $\zeta_0=\text{Re}^\gamma$  се намира  $\gamma$ , а след това се определят  $\beta$  и функцията  $f(\eta)$ .

#### 6.1.4. Линејни гранични задачи

Изчисляването на коефициентите на разлагане (4.69) се свежда до решаване на граничните задачи (4.70), (4.71), които за краткост записваме във вида

$$(6.22) \quad f''' + Af'' + Bf' + Cf = F, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \\ f'(\infty) = 0.$$

Коефициентите  $A, B, C, F$  се изразяват чрез началната функция на разлагането  $f_0(\eta)$ :

$$A = f_0, \quad B = -kf_0', \quad C = (k-1)f_0''.$$

Функцията  $f_0(\eta)$  удовлетворява нелинейно уравнение и се намира по един от изложените в § 6.1.3 начини. За пресмятане на функцията  $f(\eta)$  е удобно да се приложи методът на прогонката.

Да разделим интервала  $(0, \eta_*)$  на  $n$  равни части от точките  $0, 1, \dots, n$ . Като заменим производните по формулите за централни разлики, преминаваме с грешка на апроксимацията  $O(\Delta\eta^2)$  към системата

$$(6.23) \quad a_{0,k}f_k = a_{1,k}f_{k+2} + a_{2,k}f_{k+1} + a_{3,k}f_{k-1} + a_{4,k}f_{k-2} + a_{5,k}.$$

Уравнението (6.23) се записва в точките  $k=2, 3, \dots, n-1$ . При  $k=n-1$  апроксимацията на уравненията (6.22) не трябва да се извършва с помощта на централни разлики.

Съгласно граничните условия

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{1}{4}f_2, \quad f_{n-2} = 3f_n + 4f_{n-1}.$$

Коефициентите  $a_{ik}$  се изразяват със стойностите на  $A, B, C$  и  $F$  във възлите на мрежата.

В съответствие с метода на прогонката за всички вътрешни точки, започвайки от втората, намираме

$$(6.24) \quad f_k = a_k^1 f_{k+2} + a_k^2 f_{k+1} + a_k^3.$$

Като заместим изразите (6.24) за  $f_{k-1}, f_{k-2}$  в (6.23), получаваме

рекурентни формули, свързващи коефициентите  $a_k^j$  с коефициентите  $a_{ki}$ . Тези формули са подобни на (6.12), но са по-сложни. В първите две точки съгласно граничните условия

$$a_0^1 = a_0^2 = a_0^3 = 0,$$

$$a_1^1 = 0, \quad a_1^2 = \frac{1}{4}, \quad a_1^3 = 0.$$

В точките  $k=2, 3, \dots, n-1$  коефициентите  $a_k^j$  се пресмятат по рекурентните формули (*права прогонка*). Като използваме двете уравнения (6.24) в точките  $n-2, n-1$  и граничните условия в точката  $n$ , определяме  $f_{n-2}, f_{n-1}, f_n$ . По формулите (6.24) пресмятаме стойностите на функцията  $f_k$  във всички вътрешни точки (*обратна прогонка*).

## § 6.2. РАЗВИТИЕ НА ВИСКОЗНИ ТЕЧЕНИЯ

Понятието *развитие на вискозни течения* се употребява в два смисъла. Преди всичко това понятие се отнася за нестационарни течения, които, започвайки от някакво зададено начално състояние при  $t=0$ , се изменят с времето. За уравненията на Навие—Стокс тази постановка е най-обща. Стационарните течения могат да се получат при достатъчно дълъг период от време (*метод на установяването*). Понятието развитие на течението се използва и при граничен слой. Тук теченията се формират в направление на дадена повърхност, започвайки от някакво изходно състояние в сечението  $x=0$ . Методите за числено решаване на съответните частни диференциални уравнения в тези случаи са много близки

### 6.2.1. Свойства на апроксимиращите уравнения

Въз основа на един прост модел ще разясним основните идеи, свързани с *апроксимиращата схема за вискозни течения*. Да разгледаме уравнението

$$(6.25) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

в което коефициентите  $c$  и  $\nu$  са постоянни величини. При  $\nu=0$  получаваме *уравнението на преноса*, а при  $c=0$  — *уравнението на дифузията*.

Да въведем мрежа с възли в точките  $ih, n\tau$  ( $n, i=1, 2, \dots$ ). Нека стъпката по  $x$  е равна на  $h$ , а по  $t$  — на  $\tau$ . Да означим приближената стойност на функцията  $u(x, t)$  в точката  $(ih, n\tau)$  с  $u_i^n$ . Тогава за уравнението (6.25) могат да се построят много различни апроксимиращи схеми. Коя от тях трябва да се предпочете при численото интегриране на това уравнение по времето? Преди всичко трябва да се осигури по възможност най-добра апроксимация на диференциалното уравнение с крайни разлики. Желателно е

телно е апроксимиращата схема да се решава с най-малка загуба на време и да бъде устойчива. В противен случай решението може да се деформира от малки изчислителни грешки. Тези изисквания, които се оказват често противоречиви, са основните критерии за избора на апроксимиращата схема.

Да разгледаме явна схема с разлики напред по времето и централни разлики по пространствената координата:

$$(6.26) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + v \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

Точността на апроксимацията на тази схема е  $O(\tau, h^2)$  и решението се получава в явен вид:

$$(6.27) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} q (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + d (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

$$q = \frac{c\tau}{h}, \quad d = \frac{v\tau}{h^2}.$$

За изследване устойчивостта на тази схема ще приложим *спектралния метод*. Той се състои в това, че се изследва поведението на частни решения на (6.27), всяко от които представлява проста хармоника по пространствената променлива (Фурие-компонента)

$$(6.28) \quad u_i^n = v^n \exp [ik_x (ih)].$$

Тук  $v^n$  е амплитудата на хармониката с вълново число  $k_x$  и с дължина на вълната  $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$  върху временния слой  $n$ , а  $l$  е имажинерната единица. За простота се предполага, че областта по  $x$  е безкрайна, затова  $k_x = 1, 2, \dots$ . Влиянието на границите върху устойчивостта на решенията изискват особено разглеждане. Да въведем фазов ъгъл  $\theta = k_x h$ ; тогава частните решения (6.28) в три съседни възела  $i, i \pm 1$  могат да се запишат така:

$$(6.29) \quad u_i^n = v^n e^{li\theta}, \quad u_{i \pm 1}^n = v^n e^{l(i \pm 1)\theta}.$$

Като заместим (6.29) в (6.27), намираме

$$(6.30) \quad v^{n+1} = G v^n,$$

където

$$G = 1 - \frac{1}{2} q (e^{l\theta} - e^{-l\theta}) + d (e^{l\theta} + e^{-l\theta} - 2).$$

Множителят на прехода  $G$  е функция на  $\theta$  и поради това зависи от Фурие-компонентата. От (6.30) следва, че устойчивостта на схемата е осигурена за всички  $k_x$  при  $|G| \leq 1$ .

В дадения случай множителят на прехода е комплексен:

$$(6.31) \quad G = 1 - 2d(1 - \cos \theta) - lq \sin \theta,$$

$$|G|^2 = [1 + 2d(\cos \theta - 1)]^2 + q^2(1 - \cos^2 \theta).$$

Простият анализ показва, че необходимото и достатъчно условие за устойчивостта на схемата (7.27) се дава с двойното неравенство

$$(6.32) \quad q^2 \leq 2d \leq 1.$$

Наистина при  $q^2 \leq 2d$  в интервала  $-1 < \cos \theta < 1$  не съществува максимум на  $|G|$ . Той се достига в граничната точка  $\cos \theta = -1$  и дава условието  $d \leq \frac{1}{2}$ . При  $q^2 > 2d$  максимумът на  $|G_1|$  се достига вътре в посочения интервал, и при това  $|G|_{\max} > 1$ .

От (6.32) извеждаме две достатъчни условия за устойчивост на уравнението (6.27) в безкрайна област:

$$(6.33) \quad \frac{\nu \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{c^2 \tau}{\nu} \leq 2.$$

С намаляване на  $\nu$  трудностите при изчисленията нарастват, тъй като е необходимо стъпката по  $\tau$  да се намалява много. При  $\nu = 0$  схемата (6.26) е винаги неустойчива.

Да анализираме подробно грешката на апроксимацията. За целта правим обратен преход от апроксимиращата схема към диференциалното уравнение. Нека функцията  $u(x, t)$  е диференцируема достатъчен брой пъти. Замествайки  $u(x, t)$  в схемата (6.26) и разлагайки всички членове в ред на Тейлър относно точката  $i, n$ , получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \nu - \frac{c^2 \tau}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \nu \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\nu^2 \tau}{h} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\tau^2, h^2).$$

Грешката на апроксимацията включва три члена от порядъка на  $\tau$ . Ако допуснем, че членовете с производни от по-висок от втори ред могат да се пренебрегнат, получаваме ново уравнение, различаващо се от (6.25):

$$(6.34) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \nu - \frac{c^2 \tau}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тук влиянието на апроксимиращата схема се е отразило в появата на отрицателна схемна вискозност  $-\frac{c^2 \tau}{2}$ , която може да деформира физическата вискозност. За да се избегне това, необходимо е да бъде удовлетворено неравенството

$$\nu \gg \frac{c^2 \tau}{2}.$$

По такъв начин второто неравенство (6.33) се усилва. Това обстоятелство съществено ограничава приложимостта на диференциалната схема (6.26) при малки  $\nu$ .

Един от начините за подобряване устойчивостта на явните схеми е преминаването към едностранни разлики при апроксимиране на конвективния член, който влияе силно и неблагоприятно в схема (6.26). Едностранните разлики се вземат противоположно на посоката на потока, т. е. при апроксимирането на производната по  $x$  втората точка се избира да бъде против потока. И така в зависимост от знака на  $c$  в (6.26) полагаме



$$(6.35) \quad c \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n = \begin{cases} \frac{c}{h} (u_i^n - u_{i-1}^n), & c > 0; \\ \frac{c}{h} (u_{i+1}^n - u_i^n), & c < 0. \end{cases}$$

Получената по този начин система има грешка на апроксимацията  $O(\tau, h)$ . Условието за устойчивост на схемата има вида

$$\tau \leq \left[ \frac{2\nu}{h^2} + \frac{|c|}{h} \right]^{-1}.$$

Като заместим диференциалната функция  $u(x, t)$  в диференчната схема, по аналогия на това, което направихме по-горе, извеждаме диференциалното уравнение

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \left[ \nu + \frac{1}{2} ch(1-q) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Влиянието на диференчната схема се проявява при  $q < 1$  чрез допълнителната схемна вискозност. За да се избегне деформация на физическата вискозност, трябва да е изпълнено условието

$$(1-q) \frac{|c|h}{2} \ll \nu.$$

Влиянието на схемната вискозност формално може да се изключи, като се положи  $q=1$ . В реални течения това не може да се получи, тъй като скоростта  $u$  е променлива в полето на течението. Изчисленията по тази схема могат да се извършат и при  $\nu=0$ , което води до лоша апроксимация.

Има възможност да се построи устойчива явна схема. За разлика от разглежданите две схеми тя е трислойна. Да използваме симетрични разлики при апроксимиране на производната относно времето и да заместим величината  $u_i^n$  в израза за втората производна със средната стойност от двата временни слоя  $n+1$ ,  $n-1$ . В резултат получаваме схемата на Дюфорт—Франкел

$$(6.36) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \nu \frac{u_{i+1}^n - u_i^{n+1} - u_i^{n-1} + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

Формално схемата е устойчива при единственото ограничение  $\frac{c\tau}{h} < 1$ . Обаче порядъкът на апроксимацията на изходното уравнение е  $O\left[\tau^2, h^2, \nu\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right]$  и за да се осигури точност, трябва да се намалява стъпката по времето. Например, ако за мрежата е изпълнено условието  $O\left[\nu\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right] = O(\tau)$ , то  $\frac{\nu\tau}{h^2} = O(1)$ . По такъв начин при удовлетворяване на критериите (6.33) устойчивата схема (6.36) осигурява първи порядък на точност по  $t$ . С прехода към неявни схеми за решаване на уравнението (6.25) се увеличава

броят на изчисленията на всеки временен слой. Изискванията за стъпката  $\tau$  обаче стават по-слабо ограничителни. За уравнението на дифузията ( $c=0$ ) най-известна е схемата на Кранк — Никълсън, която има грешка на апроксимация  $O(\tau^2, h^2)$ . Схемата се основава на усредняването на дифузионния член върху двата временни слоя

$$(6.37) \quad u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2} \tau \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{n+1} \right].$$

Тук  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  означава апроксимацията на производната  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  с централни разлики. Анализът на устойчивостта посредством спектралния метод дава следния израз за множителя на прехода в схемата (6.37):

$$G = \frac{1 - d(1 - \cos \theta)}{1 + d(1 - \cos \theta)}.$$

Тъй като  $|G| < 1$ , схемата (6.37) е абсолютно устойчива. Формално ограничения за стъпката отсъствуват, но при големи  $\Delta t$  могат да възникнат осцилации на някои от спектралните компоненти. Идеята за усредняване на пространствената производна може да се приложи и за цялото уравнение (6.25), което води до абсолютно устойчива схема с точност на апроксимацията  $O(\tau^2, h^2)$ . Недостатъкът на неявните схеми се изразява в това, че решението на апроксимиращите уравнения може да представлява сложна задача, особено за нелинейните уравнения. Изследването на устойчивостта на апроксимиращите схеми (6.26), (6.36), (6.37) извършваме при предположение, че влиянието на границите не се отразява. В действителност това влияние може да бъде съществено. Възможно е да се появи неустойчивост, която да е свързана с неуспешна апроксимация на граничните условия.

### 6.2.2. Числено решаване на уравненията на граничния слой

Уравненията на граничния слой са от параболически вид и допускат интегрирането да се извършва по  $k$  от слой към слой, започвайки от сечението  $x_0$  и завършвайки до точката на откъсване. Разработените досега голям брой методики за числено решаване на тези уравнения и използването на бързодействащи ЕИМ позволяват практически да се получи решение за всяка задача с дадена точност. Да разгледаме една от тези методики (И. Флюге — Лоц и др., 1957 г.).

В безразмерен вид уравненията (4.14), (4.17) на плоския ( $j=0$ ) и ососиметричен ( $j=1$ ) граничен слой се записват така:

$$(6.38) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial(r^j u)}{\partial x} + \frac{\partial(r^j v)}{\partial y} = 0,$$

$$u=0, \quad v=0, \quad y=0,$$

$$u \rightarrow U, \quad y \rightarrow \infty.$$

Въвеждаме мрежа с възли  $x_n = n\Delta x$  и  $y_m = m\Delta y$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ,  $m=1, 2, \dots, M$ ). Нека  $u_m^n, v_m^n$  са приближените стойности на скоростта в точката  $(n, m)$ . Да запишем първото уравнение на (6.38) в точката  $(n+1, m)$ , апроксимирайки производните по  $x$  с едностранни крайни разлики

$$(6.39) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^{n+1} = (3u_m^n - 4u_m^{n+1} + u_m^{n+1}) \frac{1}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

а производните по  $y$  да представим чрез централни разлики

$$(6.40) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_m^{n+1} = (u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) \frac{1}{2\Delta y} + O(\Delta y^2),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_m^{n+1} = (u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) \frac{1}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2).$$

Апроксимиращото уравнение ще бъде линейно, ако за величините  $u_m^{n+1}, v_m^{n+1}$ , участващи в конвективните членове, използваме линейна екстраполация

$$(6.41) \quad u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n-1} + O(\Delta x^2).$$

Като заместим изразите (6.39), (6.40), (6.41) в уравнението (6.38), получаваме с точност до членове от порядъка на  $O(\Delta x^2)$  уравнението

$$(6.42) \quad A_m u_{m-1}^{n+1} + B_m u_m^{n+1} + C_m u_{m+1}^{n+1} = F_m,$$

където:

$$A_m = -t \left( v_m^n - \frac{1}{2} v_m^{n-1} \right) - s,$$

$$B_m = 3t \left( u_m^n - \frac{1}{2} u_m^{n-1} \right) + 2s,$$

$$C_m = t \left( v_m^n - \frac{1}{2} v_m^{n-1} \right) - s,$$

$$F_m = \left( u_m^n - \frac{1}{2} u_m^{n-1} \right) \left( 4u_m^n - u_m^{n-1} \right) - \Delta x \left( \frac{dp}{dx} \right)^{n+1},$$

$$t = \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad s = \frac{\Delta x}{\Delta y^2}.$$

Това уравнение може да се запише за всяка вътрешна точка на  $m+1$ -вия слой, следователно получаваме  $M-2$  уравнения. Към тях да добавим граничните условия

$$(6.43) \quad u_1^{n+1} = 0, \quad u_M^{n+1} = U^{n+1}.$$

Така за  $u_m^{n+1}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) получаваме затворена система от линейни алгебрични уравнения с тридиагонална матрица. Решаването и е удобно да се извърши с метода на прогонката по формули

от вида (6.11), (6.12). Изчисляваме  $u_m^{n+1}$  и намираме  $v_m^{n+1}$ . От уравнението на непрекъснатостта

$$v = -\frac{1}{r^j} \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} (r^j u) dy, \quad j=0,1,$$

използвайки формулата на трапеците за апроксимиране на интеграла, получаваме

$$(6.44) \quad v_m^{n+1} = v_{m-1}^{n+1} - \frac{\Delta y}{2r^j} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (r^j u)_m^{n+1} + \frac{\partial}{\partial x} (r^j u)_{m-1}^{n+1} \right].$$

Производната по  $x$  апроксимираме съгласно формулата (6.39).

Процедурата за пресмятане се повтаря за всяко  $x$ . Външната граница на слоя се намира от условието надлъжната скорост  $u$  да се различава малко от  $U$  в няколко възела, близки до възела  $M$ . Дебелината на граничния слой расте с растенето на  $x$ , поради което трябва да се увеличава и броят на разчетните точки при преминаване към следващия слой. Тъй като схемата е трислойна, предполагаме, че стойностите на търсените функции са известни върху първите два слоя. Ако пресмятането започва от критична точка или от остър край, началните стойности могат да се получат от съответното автомоделно решение.

Съществуват и *двуслойни неявни схеми*, в които се използват стойностите на функциите върху два съседни слоя  $x$  и  $x + \Delta x$ . Линеаризацията на уравненията на диференчната схема често се извършва с помощта на итерации. Стойностите на коефициентите върху  $n+1$ -вия слой на първата итерация се вземат от  $n$ -ия слой.

Някои от тези схеми са дадени в книгата на В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов (1984 г.).

### 6.2.3. Диференчни схеми за уравненията на Навие — Стокс

При решаването на уравненията на Навие — Стокс с числени методи досега главно внимание е отделяно на двумерните течения. Техническите възможности на съвременните ЕИМ не позволяват да се реши в пълна постановка задачата за тримерни течения на вискозни флуиди. В голямата си част ефектите на тримерността в изчислителните схеми се разглеждат като някакви смущения на двумерните течения.

Да запишем уравненията на плоските течения на вискозни несвиваеми флуиди (1.81), (1.82) чрез променливите  $\psi$  и  $\omega$  в безразмерен вид:

$$(6.45) \quad \omega_t + u\omega_x - v\omega_y = \frac{1}{\text{Re}} (\omega_{yy} + \omega_{xx}),$$

$$\psi_{yy} + \psi_{xx} = -\omega, \quad u = \psi_y, \quad v = \psi_x.$$

Числото на Рейнолдс тук се определя чрез характерната скорост  $U$ , характерната дължина  $L$  и вискозитета на флуида  $\nu$ .

За решаването на (6.45) се използват няколко диференчни схеми, които се различават не само по начините на апроксимиране на уравненията, но и по начините за отчитане на граничните условия.

Една диференчна схема обикновено е толкова по-добра в сравнение с другите, колкото по-разумно са отчетени характерните свойства на изследваното течение. Всяка диференчна схема е определен компромис между противоречиви изисквания, свързани с апроксимацията, ограничения обем на паметта на ЕИМ, осигуряването на устойчивост на пресмятанията и ограничените ресурси от машинно време.

При всеки разчет трябва да се съобразяваме с това, че формирането на тънки гранични слоеве близо до твърди стени изисква съответно намаляване размерите на мрежата. Образуването на откъсване в потока води до необходимостта от пресмятане на слабоинтензивни движения в просторни циркуляционни зони.

**Явни схеми.** Алгоритмично най-проста е явната двуслойна схема с централни разлики по пространствените променливи (Дж. Фром, 1964 г.):

$$(6.46) \quad \omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n - \frac{\tau}{2h} [(u\omega)_{i+1,j}^n - (u\omega)_{i-1,j}^n + (v\omega)_{i,j+1}^n - (v\omega)_{i,j-1}^n] + \frac{\nu\tau}{h^2} [\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n],$$

$$(6.47) \quad \psi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} [\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} - h^2 \omega_{i,j}^n],$$

$$\nu = \text{Re}^{-1}.$$

Решението е построено при равномерна мрежа  $(i, j)$  с възли  $x_i = ih$ ,  $y_j = jh$ . За пресмятане на скоростта се използва изместване на  $\frac{1}{2}h$  на мрежата, а стойностите на  $u$ ,  $v$  се получават във възлите  $(i, j)$  с линейна интерполация.

$$(6.48) \quad u_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}), \quad u_{i,j} = \frac{1}{2} \left( u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}} \right),$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{h} (\psi_{i,j} - \psi_{i+1,j}), \quad v_{i,j} = \frac{1}{2} \left( v_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{1}{2},j} \right).$$

Уравнението за  $\psi$  трябва да се удовлетворява на всеки временен слой, затова горният индекс е изпуснат. Точността на апроксимацията за тази схема е  $O(\tau, h^2)$ . Нейната устойчивост се изследва със спектралния метод въз основа на линеаризирани уравнения с постоянни (замразени) коефициенти. Изискванията за устойчивостта на пресмятанията води до неравенствата

$$(6.49) \quad \tau < \frac{1}{4} \frac{h^2}{\nu}, \quad h|\vec{v}|_{\max} < 2\nu.$$

Да допуснем, че в началния момент са дадени величините  $\omega$  и  $\psi$ . Изчисленията по схемата (6.46), (6.47) се извършват в следния ред: 1) от уравнението (6.47) изчисляваме  $\psi$ ; 2) от формулите (6.48) пресмятаме  $u$  и  $v$ ; 3) от формулата (6.46) пресмятаме  $\omega$ ; 4) извършваме проверка на точността и прекратяваме пресмятанията или ги повтаряме отново, започвайки от 1). При пресмятане за много стъпки по формулите (6.46)–(6.48) устойчивостта на решението се осигурява само от намаляването на стъпката  $\tau$ . Ограниченията за стъпката могат да се окажат много големи.

Друг начин за повишаване устойчивостта на схемата е преминаването към едностранни разлики при апроксимиране на конвективните членове по аналогия с (6.35). Да разгледаме схема с едностранни разлики против потока

$$(6.50) \quad \omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n - \frac{\tau}{h} \left[ (\omega u)_{i+\frac{1}{2},j}^n - (\omega u)_{i-\frac{1}{2},j}^n + (v\omega)_{i,j+\frac{1}{2}}^n - (v\omega)_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right] + \frac{\nu\tau}{h^2} [\omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n + \omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n - 4\omega_{i,j}^n].$$

Уравнението (6.47) за  $\psi$  се запазва без изменения. В конвективните членове при изчисляване на крайните разлики се взема предвид направлението на компонентите на скоростта  $u$  и  $v$ ; стойността на  $\omega$  в полуцелите точки се пренася във възлите на мрежата срещу посоката на скоростта, например

$$\omega_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \omega_{i,j}, & v > 0; \\ \omega_{i,j+1}, & v < 0 \end{cases} \quad \omega_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \omega_{i,j}, & u < 0; \\ \omega_{i-1,j}, & u > 0. \end{cases}$$

Точността на апроксимацията по този метод е  $O(\tau, h)$ . В разгледания пример на моделно уравнение устойчивостта на решението при използване на несиметрични разлики фактически се осигурява от допълнителна изчислителна вискозност. Това намалява точността на пресмятанията при големи числа на Рейнолдс. Алгоритъмът на пресмятанията също се усложнява в сравнение със схема (6.46), тъй като е необходимо да се проверява посоката на скоростта във всяка точка.

Да разгледаме по аналогия с (6.36) явната устойчива схема за уравненията на Навие — Стокс. За целта трябва да се премине към централни разлики по времето и да се усредни  $\omega_{i,j}^n$  във вискозните членове по стойностите  $\omega_{ij}$  на слоевете  $n+1$ ,  $n-1$ . Така получаваме схемата на Дюфорт — Франкел:

$$(6.51) \quad \left(1 + \frac{4\nu\tau}{h^2}\right) \omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^{n-1} - \frac{2\tau}{h} \left[ (\omega u)_{i+\frac{1}{2},j}^n - (\omega u)_{i-\frac{1}{2},j}^n + (v\omega)_{i,j+\frac{1}{2}}^n - (v\omega)_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right] + \frac{2\nu\tau}{h^2} [\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n].$$

За повишаване точността на пресмятанията численото диференциране в конвективните членове се извършва на полустъпка, а не на цяла стъпка, както е в схема (6.46). В междинните полуцели точки стойностите на  $\omega$  се намират чрез линейна интерполация, например

$$\omega_{i-\frac{1}{2}, j} = \frac{1}{2}(\omega_{i-1, j} + \omega_{i, j}).$$

Точността на апроксимацията в (6.51) при условие, че величината  $\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\tau}{h} \right)^2$  е малка, е  $O(\tau^2, h^2)$ . Тази схема е устойчива относно малки смущения, но опитът показва, че условията от вида (6.49) трябва да се запазват. Тъй като схема (6.51) е трислойна, увеличават се изискванията за паметта на използваната ЕИМ.

Нелинейните конвективни членове в (6.45) могат да се запишат в една от следните форми:

$$(\psi_x \omega)_y - (\psi_y \omega)_x = (\psi \omega_y)_x - (\psi \omega_x)_y = \psi_x \omega_y - \psi_y \omega_x.$$

Така получаваме различни мрежови представяния. Начинът на апроксимиране на тези членове е важен в още едно отношение. Уравненията (6.45) са изведени от законите за запазване, следователно тяхното точно решение в разглежданата област удовлетворява определени интегрални съотношения — законите за запазване. Ако диференчната схема запазва интегралните инварианти, тя се нарича *консервативна*. Това свойство се осигурява, ако нелинейните членове са записани в дивергентен вид. То може да се използва и за проверка на правилността на изчисленията. Диференчните схеми (6.46), (6.50), (6.51) позволяват да се осигури запазването на количеството на движението. Построени са схеми, които запазват както кинетичната енергия и пълната квадратична завихреност, така и кинетичната енергия при отсъствие на вискозност (Аракава, 1966 г.). За такива схеми се повишава устойчивостта на пресмятанията, по-специално премахва се така наречената нелинейна неустойчивост, която не се проявява в линейни модели, приети при извеждане на критериите (6.49). При използване на числени методи за решаване уравнението на Поасон (6.47) явните схеми притежават вътрешни резерви за намаляване времето за пресмятане. Обикновено се прилагат итерационни процедури — методът на Либман и методът на горната релаксация. При тези методи основното време за пресмятане се изразходва за многократно решаване на уравнението на Поасон. То може да се намали, ако се приложи някакъв метод за точно решаване на диференчното уравнение (6.47).

На фиг. 43 са показани резултатите от численото решаване на задачата за обтичане на кръгов цилиндър. Използувани са диференчни схеми от вида (6.46), като уравнението на Поасон е решено по метода на динамичното програмиране (В. П. Шкадова, 1982 г.). Изчисленията са извършени в цилиндрични координати

$r, \varphi$  върху мрежа  $37 \times 45$ . Фактическите изчисления са извършени върху мрежа  $37 \times 22$ , като това е постигнато благодарение на разделянето на търсените функции  $\psi$  и  $\omega$  на симетрични и несиметрични области по ъгъла  $\varphi$ . При  $Re = \frac{U_\infty d}{\nu} = 80$  потокът става



Фиг. 43

нестационарен — в теченията се появяват автоколебания. На фиг. 43 са показани токовите линии в моменти от времето, кратни на  $\frac{1}{8}$  от периода на колебанието. В експериментите при  $Re = 80$  в потока се развиват колебания, които се оформят в периодична вихрова улица. Разчетното число на Струхал  $St = \frac{nd}{U_\infty} = 0,16$  се съгласува с експерименталната стойност. Решението на задачата за обтичане на кръгов цилиндър при  $Re \leq 40$  е стационарно и автоколебателно, при  $Re > 40$  — в съгласие с експеримента.



**Неявни схеми.** Неявните схеми осигуряват устойчивост на пресмятанятия, но водят до сложни алгоритми. Напълно неявна схема може да се получи, ако производните по пространствените променливи в (6.46) се пренесат на временния  $n+1$ -ви слой:

$$(6.52) \quad \omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n - \frac{\tau}{2h} \left[ u_{i,j}^n (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i-1,j}^{n+1}) + v_{i,j}^n (\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}) \right] + \\ + \frac{\nu\tau}{h^2} (\omega_{i+1,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1} + \omega_{i,j+1}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1} - 4\omega_{i,j}^{n+1});$$

$$(6.53) \quad \psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1} + \psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1} - 4\psi_{i,j}^{n+1} = -h^2 \omega_{i,j}^{n+1}.$$

Скоростите  $u$  и  $v$ , изнесени зад знака на производните, са взети от  $n$ -ия временен слой, което осигурява линейност на схемата. Точността на апроксимацията е  $O(\tau, h^2)$ . Ако пространствените производни се усреднят от слоевете  $n$  и  $n+1$ , точността на апроксимацията се подобрява  $O(\tau^2, h^2)$ . Недостатъкът на схемата (6.52), (6.53) е в това, че много често получената система от алгебрични уравнения се решава трудно. Тази система има висок ред, което води до повишени изисквания към алгоритъма за решаване. Схемата (6.52), (6.53) може да бъде реализирана на изчислителни машини с голяма памет и бързо действие.

Широко разпространение получиха полунеявните схеми, които запазват основните достоинства на неявните схеми (устойчивост на изчислителните алгоритми), но в същото време водят до по-прости алгебрични системи. Методът на променливите направлени разделя алгоритъма на две полустъпки по времето:

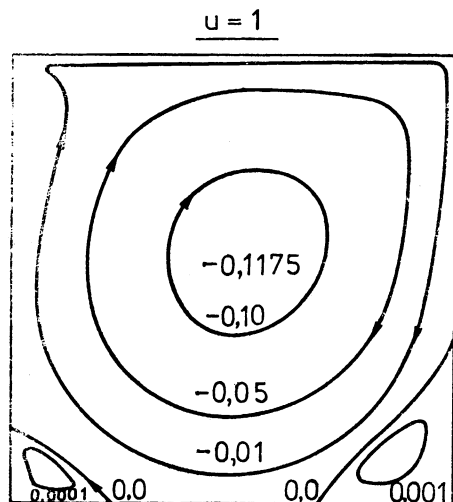
$$(6.54) \quad \frac{\omega^{n+\frac{1}{2}} - \omega^n}{\frac{1}{2}\tau} = -u \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} - v \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^n + v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^n,$$

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\tau} = -u \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} - v \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^{n+1} + v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^{n+1}.$$

Тук е въведена дробна полустъпка  $n + \frac{1}{2}$ . След апроксимиране на производните с централните разлики получаваме система от уравнения с тридиагонална матрица. Всяка полустъпка по времето се реализира ефективно с помощта на две едномерни прогонки — първата по  $x$  и втората по  $y$ .

При този метод важен е изборът на апроксимацията на скоростите. Най-простият начин е да се вземат стойностите  $u^n$  и  $v^n$  от предишния слой. При използване на централни разлики по пространствените променливи точността на апроксимацията има порядък  $O(\tau, h^2)$ . Ако  $u^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $v^{n+\frac{1}{2}}$  се вземат в двете полустъпки (тези величини се определят с линейна екстраполация от

$n-1$ -вия и  $n$ -ия слой), точността на апроксимацията е  $O(\tau^2, h^2)$ . Недостатък на този начин е, че трябва да се пази информацията от  $n-1$ -вия слой. Възможни са и итерационни процедури за определяне на  $u$  и  $v$ . Тъй като скоростното поле се намира от решението на уравнението на Поасон за  $\psi$ , това изисква допълнително време за пресмятане.



Фиг. 44

На фиг. 44 са показани токовите линии, по които се проследява сложният характер на течението, притежаващо зони на циркулация в ъглите.

Различните схеми на метода на променливите направления са прилагани към конвективни течения в затворени области, предизвикани от развитието на неустойчиво равновесие на тежък флуид в температурно нехомогенно поле. При пресмятанията се оказва възможно дори да се модулират някои свойства на теченията, характерни за турбулентния режим на движение на флуидите (В. И. Полежаев, В. А. Грязнов, (1977 г.).

Каквато и диференчна схема да се прилага за решаване на системата (6.45), ще се срещат затруднения, свързани с граничните условия, тъй като те са от нестандартен вид — на твърдата стена на токовата функция  $\psi$  са дадени две условия  $\psi=0$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial n}=0$  а за функцията  $\omega$  не е дадено нито едно условие. Предложени са много апроксимации на граничните условия. Известно е, че удачният избор на апроксимацията осигурява успех на изчислителната схема. Неудачният избор може да предизвика неустойчивост в изчислителния процес дори при устойчива схема за уравненията (6.45).

За вихря върху стената с точност от първи ред сравни-

Схемата (6.54) е удобна за пресмятане на течения в правоъгълни области. На фиг. 44 са дадени резултатите от численото изследване с един от вариантите на метода на променливите направления в каверна с подвижна горна граница (А. Бенджамин, В. Дени, 1979 г.). Тази задача е типична за вътрешни течения и е разглеждана от много автори. Резултати са получени при  $Re=10^3$  при мрежа  $101 \times 101$ . За повишаване на точността областта е разтегната близо до стените чрез преобразуване на координатите.

телно лесно се получава прост израз. Нека дадена твърда граница се описва с уравнението  $y=0$  и диференчната мрежа  $(x_i, y_i)$  е избрана така, че точките  $(i, 1)$  лежат върху нея. Да разложим  $\psi(x_i, y_i)$  в околността на граничните точки

$$\begin{aligned}\psi_{i,2} = \psi_{i,1} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,1} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,1} (\Delta y)^2 + \\ + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)_{i,1} (\Delta y)^3 + O(\Delta y^4).\end{aligned}$$

Вземайки предвид условията за полевпване, получаваме

$$\psi_{i,1} = 0, \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,1} = 0, \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1} = \omega_{i,1}.$$

Като заместим в разложението на  $\psi_{i,2}$  изразите за производните и решим полученото уравнение относно  $\omega_{i,1}$ , намираме

$$\omega_{i,1} = \frac{2\psi_{i,2}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y).$$

Тази формула е изведена от А. Том (1928 г.), която той използва при численото решаване на задачата за стационарно обтичане на кръгов цилиндър през 1933 г. Тя се прилага и днес, въпреки че има изведени други по-точни формули за  $\omega_{i,1}$ .

При численото решаване на задачата за обтичане на тела от безкраен поток възниква също и проблемът за задаването на величините върху условно въведената граница  $S_B$ , отсичаща крайна разчетна област. В този случай невинаги може правомерно да се поставят върху  $S_B$  граничните условия на безкрайност. При стационарното обтичане на кръгов цилиндър е показано, че полетона скоростта се изменя забележимо при изменение на условието върху  $S_B$  (Б. Форнберг, 1980 г.). Повишаването на точността изисква разширяване на разчетната област и съгласуване с асимптотичните решения (К. И. Бабенко, Н. Д. Введенская, 1975 г.).

### § 6.3. ЗА ПРАВИТЕ МЕТОДИ

*Правите методи* се основават на разлагането на търсените функции по системата от базисни функции. Те се наричат още *методи на апроксимиращите функции или на спектралните разложения*. Най-общ от тях е методът на Гальоркин.

Нека функцията  $u(y)$  удовлетворява уравнението

$$(6.55) \quad L(u) - f = 0.$$

Приближеното решение  $u_N(y)$  се търси в следния вид:

$$(6.56) \quad u_N(y) = \sum_{k=1}^N a_k \Phi_k(y).$$

Тук функциите  $\Phi_k(y)$ ,  $k=1, 2, \dots$ , образуват система от базисни функции, които са ортонормирани. Това означава, че за всяка функция  $u(y)$ , която притежава съответни свойства за непрекъснатост и диференцируемост, коефициентите  $a_k$  и числото  $N$  в (6.56) могат така да се подберат, че  $u_N$  да се различава от  $u(y)$  с произволно малка величина.

Като заместим (6.56) в уравнението (6.55), получаваме величината

$$(6.57) \quad \varepsilon = L(u_N) - f.$$

Ще изискваме тя да бъде ортогонална на първите  $N$  функции от системата  $\Phi_k$ , т. е. скалярните произведения да са равни на нула

$$(6.58) \quad (\varepsilon, \Phi_k) = 0, \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Под скалярно произведение обикновено се разбира интеграл от произведението  $\varepsilon \Phi_k$  по областта, върху която се търси решението (възможно е да се използва и теглова функция). Системата от  $N$  уравнения (6.58) е *системата на Галъоркин* за определяне на коефициентите  $a_k$ .

Като приравним скалярните произведения на нула, (6.58) съответствува на такъв избор на  $a_k$ , при който  $\varepsilon(y)$  се отклонява най-малко от нулата. Ако някоя функция е ортогонална на всички  $\Phi_k$ , то тя е тъждествено равна на нула. По такъв начин при  $N \rightarrow \infty$  получаваме изходното уравнение (6.55). Ако то е линейно, системата (6.58) също е линейна. Коефициентите на разлагане изчисляваме по който и да е от методите за решаване на линейни системи. Точността на полученото решение може да се оцени, като сравняваме последователните приближения. Правите методи са много гъвкави и откриват възможност за творческо търсене. Удачният избор на базисните функции може да осигури добра точност още при малки  $N$ . В сравнение с методите на крайните разлики при един и същ брой на степените на свобода (възлите на мрежата и коефициентите на разлагането) спектралното представяне осигурява по-висока степен на точност на апроксимация. Недостатък на метода е, че изчислителният алгоритъм е по-сложен в сравнение с метода на крайните разлики, особено при нелинейните задачи. Съществуват и псевдоспектрални процедури, в които едновременно се използва спектрално представяне и крайни разлики. Това позволява съществено да се ускорят изчисленията. В механиката на флуидите спектралните методи намират все по-широко приложение.

### 6.3.1. Устойчивост на течението на Поазьой

Да решим с прав метод задачата за собствени стойности (5.8), (5.9), към която се свежда изследването на устойчивостта на течението на Поазьой (Г. И. Петров, 1940 г.):

$$(6.59) \quad \frac{1}{\alpha \operatorname{Re}} (v^{\text{IV}} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v) = i[(U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U'' v],$$

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad y = \pm 1,$$

$$U = 1 - y^2.$$

За базисни функции е удобно да изберем полиномите на Чебишов, които се определят по формулата

$$T_n(y) = \cos(n \arccos y),$$

където  $n$  е цяло неотрицателно число. Тези полиноми образуват пълна система от функции в интервала  $[-1, 1]$  и удовлетворяват условието за ортогоналност

$$\int_{-1}^1 \Phi_n(y) \Phi_m(y) (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dy = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{1}{2} \pi, & m = n \neq 0; \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

За симетричната мода на решението (6.59) се вземат четни функции на Чебишов

$$(6.60) \quad v_N(y) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(y).$$

Условията за ортогоналност дават  $N-1$  уравнения (С. Орзаг, 1971 г.):

$$(6.61) \quad \sum_{k=0}^N (A_{km} + c B_{km}) \alpha_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-2.$$

Тук са приети означенията

$$A_{km} = \int_{-1}^1 L(T_k) \gamma_m dy, \quad B_{km} = \int_{-1}^1 M(T_k) \gamma_m dy,$$

$$\gamma_m = (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} T_m,$$

$$L(v) = (i\alpha \operatorname{Re})^{-1} (v^{\text{IV}} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v) - U(v'' - \alpha^2 v) - U'' v,$$

$$M(v) = v'' - \alpha^2 v.$$

В тази задача интегралите  $A_{km}$ ,  $B_{km}$  се пресмятат в краен вид. В общия случай те се намират с числено интегриране.

Като прибавим към (6.61) две уравнения, следващи от граничните условия на стената, получаваме линейна хомогенна система от  $N+1$  уравнения с матрица  $A_{km} + c B_{km}$ . За да съществува ненулево решение на тази система, дивергентата на матрицата

трябва да бъде равна на нула:

$$|A_{km} + cB_{km}| = 0.$$

Това уравнение е от  $N+1$ -ва степен относно  $c$ , от което се определят  $N+1$  собствени стойности  $c_j$ . За всяко  $c_j$  може да се реши (6.61) и да се намерят коефициентите с точност до произволен множител. След това от формулата (6.60) определяме и собствените функции. По такъв начин се изчислява спектърът. Някои резултати са дадени в § 5.1.3.

Правият метод е подходящ инструмент за изследване на нелинейните смущения в потока. Съкратените системи уравнения за коефициентите на разлагане  $a_k$  (крайномерни модели) са съдържателни и в редица случаи позволяват да се моделират важни свойства на реалните флуиди. Чрез използване на правия метод са пресметнати например средният профил на скоростта и коефициентът на триене при турбулентното течение в плосък канал (Б. П. Рождественски, И. Н. Симакин, 1982 г.).

### 6.3.2. Обтичане на сфера

Ще приложим метода на Гальборкин за решаване на пълните уравнения на Навие — Стокс, разглеждайки задачата за обтичане на сфера при умерени числа на Рейнолдс. След полагане на  $\cos \theta = \beta$  и преработване на уравнението (3.6), получаваме

$$(6.62) \quad \frac{1}{\text{Re}} D^4 \psi + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{2\beta}{1-\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) D^2 \psi = 0,$$

където

$$D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\beta^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

Граничните условия върху сферата (3.9) и на безкрайност (3.10) и условието за симетрия относно оста  $\beta=1$  се записват така:

$$(6.63) \quad \begin{aligned} \psi(1, \beta) &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r}(1, \beta) &= 0, \quad \psi(r, 1) = 0, \\ \psi(r, \beta) &\rightarrow \frac{1}{2} r^2 (1-\beta^2), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

За намиране профила на скоростта при обтичане на тела в трета глава бяха въведени полиномите на Лъожандър  $P_i(\beta)$ . Като ги използваме отново при решаване на граничната задача (6.62), (6.63), ще построим система от базисни функции. Функцията на тока  $\psi$ , дефинирана чрез (3.7), търсим във вида

$$\psi(r, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(r, \beta),$$

където

$$\Phi_i(r, \beta) = f_i(r) [P_{i-1}(\beta) - P_{i+1}(\beta)], \quad i = 1, 2, \dots$$

За първите четири полинома на Лъожандър имаме:

$$\begin{aligned} P_0(\beta) &= 1, & P_0 - P_2 &= \frac{3}{2}(1 - \beta^2), \\ P_1(\beta) &= \beta, & P_1 - P_3 &= \frac{5}{2}\beta(1 - \beta^2), \\ P_2(\beta) &= \frac{1}{2}(3\beta^2 - 1), \\ P_3(\beta) &= \frac{1}{2}\beta(5\beta^2 - 3), \end{aligned}$$

Системата функции  $\Phi_i(r, \beta)$  образува пълна система от независими функции в смисъл, че интегралът

$$(6.64) \quad \int_{-1}^1 \Phi_i(r, \beta) \Phi_j(r, \beta) d\beta$$

е равен на нула при  $i \neq j$ . Това свойство на  $\Phi_i(r, \beta)$  следва от ортонормираността на полиномите на Лъожандър и е в сила за произволни функции  $f_i(r)$ .

Да вземем  $n=2$  и да положим (Кавагуши, 1955 г.)

$$(6.65) \quad \begin{aligned} \psi = & \left( \frac{1}{2}r^2 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \frac{A_4}{r^4} \right) (1 - \beta^2) + \\ & + \left( \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_3}{r^3} + \frac{B_4}{r^4} \right) \beta(1 - \beta^2). \end{aligned}$$

Тогавя граничното условие на безкрайност (6.63) е удовлетворено. Коефициентите  $A_k, B_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) определяме така, че да са удовлетворени и граничните условия (6.63) върху сферата. Приравняваме на нула коефициентите пред изразите  $1 - \beta^2$  и  $\beta(1 - \beta^2)$  и получаваме следните четири уравнения:

$$(6.66) \quad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = -\frac{1}{2},$$

$$A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 = 1,$$

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 0,$$

$$B_1 + 2B_2 + 3B_3 + 4B_4 = 0.$$

Като заместим (6.65) в лявата страна на уравнението (6.62), вместо нула, както в дясната страна, получаваме израза

$$\begin{aligned} Q = & g_1(r)(1 - \beta^2) + g_2(r)\beta(1 - \beta^2) + g_3(r)\beta^2(1 - \beta^2) + \\ & + g_4(r)(1 - \beta^2)(1 - 3\beta^2) + g_5(r)\beta(1 - \beta^2)(1 - 3\beta^2) + g_6(r)\beta^3(1 - \beta^2), \end{aligned}$$

където  $g_k(r)$  са известни функции, съдържащи коефициентите  $A_k$  и  $B_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ). Тук  $Q$  дава грешката, с която се удовлетворява (6.62) от функцията (6.65). Ако на грешката наложим

условието  $Q(r, \beta) = 0$  върху повърхността на сферата, получаваме две нови уравнения:

$$(6.67) \quad 9A_2 + 35A_3 + 90A_4 = 0, \\ B_1 - 6B_3 - 21B_4 = 0.$$

Уравненията (6.67) осигуряват анулиране на грешката  $Q$  върху сферата, но не и във флуидното поле при  $r > 1$ . Другите две уравнения, необходими за определяне на константите  $A_k$  и  $B_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), получаваме, като наложим на  $Q(r, \beta)$  условия за ортогоналност

$$(6.68) \quad \int_1^\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{r} Q(r, \beta) [P_0(\beta) - P_2(\beta)] d\beta dr = 0, \\ \int_1^\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} Q(r, \beta) [P_1(\beta) - P_3(\beta)] d\beta dr = 0,$$

чрез които грешката  $Q$  се разпределя по цялото флуидно поле. Уравненията (6.66) — (6.68) образуват система от 8 алгебрични уравнения с 8 неизвестни. След пресмятане от (6.66) и (6.67) намираме

$$A_2 = -\frac{15}{29} (8 + 5A_1), \quad B_2 = -\frac{23}{9} B_1, \\ A_3 = \frac{9}{29} (17 + 7A_1), \quad B_3 = \frac{19}{9} B_1, \\ A_4 = -\frac{1}{58} (95 + 34A_1), \quad B_4 = -\frac{5}{9} B_1.$$

Като заместим  $A_i, B_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) в (6.68), получаваме следната система уравнения за определяне на  $A_1$  и  $B_1$ :

$$(6.69) \quad \frac{993,1035}{2\text{Re}} A_1 + 1,1713 B_1 - 0,2546 A_1 B_1 + \frac{4468,9656}{2\text{Re}} = 0, \\ 5,0148 A_1 + \frac{220,1058}{\text{Re}} B_1 + 0,2421 A_1^2 - 0,0376 B_1^2 + 37,9018 = 0.$$

С това приближеното решаване на задачите за обтичане на сфера от стационарен поток при умерени числа на Рейнолдс се свежда към решаване на нелинейната алгебрична система (6.69) относно  $A_1$  и  $B_1$ . За тази цел може да се използва методът на Нютон — Рафсън.

Като знаем токовата функция (6.65), може да намерим скоростното поле и коефициента на съпротивлението. За съпротивлението получаваме

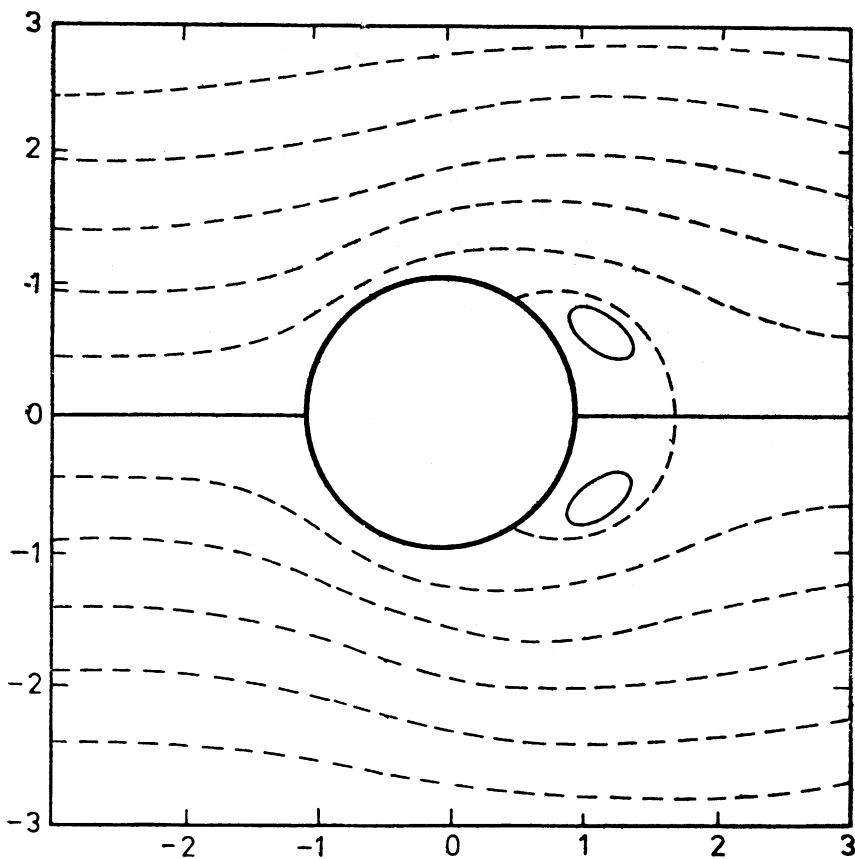
$$W = W_p + W_s,$$

където  $W_p$  се определя от нормалните напрежения върху тялото



{съпротивление на формата), а  $W_s$  — от тангенциалните напрежения

$$W_p = \int_0^\pi (p_{rr})_{r=a} \cos \theta \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta,$$



Фиг. 45

$$W_s = - \int_0^\pi (p_{r\theta})_{r=a} \sin \theta \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta,$$

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$p_{r\theta} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right].$$

Коефициентите на съпротивление  $c_{fp}$ ,  $c_{fs}$ ,  $c_f$  получаваме, като разделим  $W_p$  и  $W_s$  на  $\frac{1}{2}\rho U^2 \cdot \pi a^2$ , където  $U$  е скоростта на безкрайност:

$$(6.70) \quad c_{fp} = \frac{16}{3Re}(8A_2 + 25A_3 + 54A_4),$$

$$c_{fs} = \frac{32}{3Re}(2A_2 + 5A_3 + 9A_4),$$

$$c_f = c_{fp} + c_{fs}.$$

На фиг. 45 е показана картина на токовите линии при  $Re = 50$ . Зад сферата се формира зона на откъсване, която расте с растенето на числото на Рейнолдс  $Re$ . Съпротивлението на сферата се определя главно от силите на триене при малки  $Re$ . Силата на съпротивлението, свързана с формирането на зоната на откъсване, влияе съществено върху големината на общото съпротивление  $W$  при  $Re > 45$ . Решението (6.65) се съгласува достатъчно добре с експеримента при  $5 < Re < 40$ . За малки стойности на  $Re$  вместо (6.65) по-добре е да се използва друга апроксимация, която се съгласува с решението на Стокс (3.11). Това се постига посредством други функции  $f_i(r)$ .

# УРАВНЕНИЯ НА НАВИЕ—СТОКС В ОРТОГОНАЛНИ КРИВОЛИНЕЙНИ КООРДИНАТИ

## 1. ЦИЛИНДРИЧНИ КООРДИНАТИ

В цилиндрична координатна система  $(r, \varphi, z)$  системата уравнения за вискозен несвиваем флуид се записва в следния вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \vec{v} \nabla v_r - \frac{v_r^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \vec{v} \nabla v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta v_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \nabla v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Тук

$$\begin{aligned} \nabla f &= \vec{i}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{i}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Компонентите на тензора на напреженията имат вида:

$$\begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ p_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \quad p_{\varphi z} = \mu \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ p_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

## 2. СФЕРИЧНИ КООРДИНАТИ

Уравненията за движението на вискозни несвиваеми флуиди в сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$  имат вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \vec{v} \nabla v_r - \frac{1}{r} (v_\theta^2 + v_\varphi^2) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \nu \left[ \Delta v_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \vec{v} \nabla \cdot \vec{v}_\theta + \frac{1}{r} (v_r v_\theta - v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta) = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left[ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right],$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \vec{v} \nabla v_\varphi + \frac{1}{r} (v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg} \theta) = - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left[ \Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right],$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Тук

$$\nabla f = \vec{i}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{i}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Компонентите на тензора на напреженията имат вида:

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right),$$

$$p_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right),$$

$$p_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \quad p_{r\varphi} = \mu \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right),$$

$$p_{\varphi\theta} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right).$$

### 3. КООРДИНАТИ, СВЪРЗАНИ С ПОВЪРХНОСТТА НА ТЯЛОТО

В координатната система  $x, y$  координатните линии  $x = \text{const}$  са нормални към повърхността на тялото, а  $k = k(x)$  е кривината на повърхността на тялото. Уравненията на Навие — Стокс за двумерни течения в тези координати имат вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1+\kappa y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{1+\kappa y} uv = \\ & = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{1+\kappa y} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left[ \frac{1}{(1+\kappa y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{y}{(1+\kappa y)^3} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{k}{1+\kappa y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k^2}{(1+\kappa y)^2} u + \frac{1}{(1+\kappa y)^3} \frac{\partial k}{\partial x} v + \frac{2k}{(1+\kappa y)^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{1+\kappa y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{k}{1+\kappa y} u^2 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left[ \frac{1}{(1+\kappa y)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{y}{(1+ky)^3} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k}{1+ky} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{k^2}{(1+ky)^3} v - \frac{1}{(1+ky)^3} \frac{\partial k}{\partial x} u - \\
& \quad - \frac{2k}{(1+ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big], \\
& \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(1+ky)v] = 0.
\end{aligned}$$

#### 4. БИСФЕРИЧНИ КООРДИНАТИ

В произволна криволинейна ортогонална координатна система  $(q_1, q_2, q_3)$ , където  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  и  $h_1, h_2, h_3$  са коефициентите на Ламе за несвиваем флуид, уравненията на Навие — Стокс и уравнението на непрекъснатостта имат вида:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} + \frac{v_1}{h_1} \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{v_1}{h_1} \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \\
& \quad - \frac{v_2^2}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{v_3^2}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} - \\
& \quad - \nu \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial \left[ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right) \right]}{\partial q_2} - \frac{\partial \left[ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left( \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right) \right]}{\partial q_3} \right\}, \\
& \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + \frac{v_2}{h_2} \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \frac{v_2}{h_2} \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \\
& \quad - \frac{v_3^2}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} - \nu \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial \left[ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right) \right]}{\partial q_3} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \left[ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2} \right) \right]}{\partial q_1} \right\}, \\
& \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_3}{h_3} \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \frac{v_3}{h_3} \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} - \\
& \quad - \frac{v_1^2}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \frac{v_2^2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial q_3} - \nu \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial \left[ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left( \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1} \right) \right]}{\partial q_1} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \left[ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3} \right) \right]}{\partial q_2} \right\}, \\
& \frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0.
\end{aligned}$$

В случая на бисферични координати  $q_1 = \xi$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = \eta$  коефициентите на Ламе са

$$h_1 = h_3 = \frac{c}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad h_2 = \frac{c \sin \eta}{c \operatorname{ch} \xi - \cos \eta}.$$

## УЧЕБНИЦИ И МОНОГРАФИИ

- Биркгоф, Г. Гидродинамика. М., ИЛ, 1953.
- Бэтчелор, Дж. Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973.
- Валландер, С. В. Лекции по гидромеханике. Л., Изд. Ленингр. ун-та, 1978.
- Гольдштейн, С. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Т. I, II. М., ИЛ, 1948.
- Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. I, II. М., Физматгиз, 1963.
- Ламб, Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
- Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИИТЛ, 1954.
- Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 2. М., Наука, 1957.
- Милн—Томсон, Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., Мир, 1964.
- Монин, А. С., Яглом, А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. I. М., Наука, 1965.
- Прандтль, Л. Механика вязких жидкостей. В кн. Аэродинамика. Т. III. Ред. В. Ф. Дюрэнд. М. Оборонгиз, 1933, 46—237.
- Прандтль, Л. Гидроаэромеханика. М., ИЛ, 1919.
- Седов, Л. И. Механика сплошной среды. Т. I, II. М., Наука, 1976.
- Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
- Тарг, С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1951.
- Хейз, У. Д., Пробстин, Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., ИЛ, 1962.
- Черный Г. Г. Течения с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
- Шкадов, В. Я., Запryanов, З. Д. Течения вязкой жидкости. М., Изд. Моск. ун-та, 1984.
- Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.
- Lanchmann, G. L. (ed.). Boundary layer and flow control. V. I, II. London, 1961.
- Rosenhead, L. (ed.). Laminar boundary layers. Oxford, Clarendon Press, 1963.

## ГЛАВА I

- Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Изд. 2. М., Наука, 1970.
- Серрин, Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
- Navier, M. Mém. de l' Acad. Sci, 1827, 6, 389—416.
- Orr, W. Proc. Roy. Irish Acad., V. A2, 7, 69, 1907.
- Poisson, S. D. J. de l' Ecole polytechn., 1831, 13, 139—189.
- Reynolds, O. Phil. Trans. Roy. Soc., 1895, 186A, 123—164.
- Stokes, G. G. Trans. Cambr. Phil. Soc. 1845, 8, 287—305.
- de St. Venant, B. Comptes Rendues, 1843, 17, 1240—1244.

## ГЛАВА II

- Громека, И. С. В кн. Собр. соч. Изд-во АН СССР, 1952, 149—171.  
 Капица, П. Л. 1948, 18, № 1, 3—28.  
 Ландау, Л. Д. ДАН СССР, 1944, 44, 311—314.  
 Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.  
 Петров, Н. П. Инженерный журнал, № 14, 1883.  
 Пухначев, В. В. Ж. Прикл. мех. и техн. физ., 1960, № 1, 83—90.  
 Слезкин, Н. А. Уч. зап. МГУ. 1934, 11, 89—90.  
 Acrivos, A., Brady, J. F. J. Fluid Mech., 1981, 112, 127—150.  
 Becker, R. Z. Physik. Vol. 8, 321—362, 1922.  
 Berman, A. J. Appl. Phys., 1953, 24, 1232.  
 Cochran, W. G. Proc. Camb. Phys. Soc., 1934, 30, 365—375.  
 Dijkstra, D., Zandenbergen P. I. J. Engng. Math., 1977, 11, 167.  
 Jeffery, G. B. Phil. Mag. (6), 1915, 29, 455.  
 Ekman, V. W. Ark. Math. Astr. Fys., 2, N 11, 1905.  
 Evans, D. J. Quart. J. Math. Appl. Math., 1969, 22, 467.  
 Hamel, G. Jahr. — Ber. Dtsch. Math. Ver., 1917, 25, 34—60.  
 Hiemenz, K. Dingl. Polytechn. J., 1911, 326, 321.  
 Homann, F. ZAMM, 1936, 16, 153—164.  
 Horwarth, L. ARC RM 1632, 1935.  
 Kármán, Th. ZAMM, 1921, 1, 233—252.  
 Meredith, F. W., Griffith, A. A. In: Modern Developments in Fluid Dynamics. V. 2, 1938, p. 534.  
 Millsaps, K., Pohlhausen, K. JAS. 1953, 20, 187—196.  
 Nusselt, W. Zeitschrift VDI, 1916, 60, 27, 514—546.  
 Oseen, C. W. Ark. Math. Astron. och Fys., 1911, 7, N 21.  
 Poiseuille, J. Comptes Rendues, 1840, 11, 961—967, 1041—1048.  
 Richardson, E. G., Tyler, E. Proc. Phys. Soc. Lond., 1929, 42, 1—15.  
 Sexl, Th. Z. Phys. 1930, 61, 349.  
 Stokes, G. G. Trans. Cambr. Phil. Soc., 1851, IX, 8.  
 Szymansky, F. Adhandl. d. III. Intern. Mech. Kongr. Stockholm, 1930, 1, 240.  
 Taylor, G. Proc. Roy. Soc. (A), 1923, 223, 289—343.

## ГЛАВА III

- Биркхов, Г. Гидродинамика, пер. с опол. М., ИЛ, 1963.  
 Ван-Дайк, М. Методы возмущений в механике жидкостей. М., Мир, 1967.  
 Жуковский, Н. Е., Чаплыгин, С. А. В кн. Собр. соч. Н. Е. Жуковского Т. 1, 1948, 70—80.  
 Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972.  
 Кочин, Н. Е. Сбор. соч. Т. II. М., Л., Изд. АН СССР, 1949.  
 Лейбензон, Л. С. (ред.). Гидродинамическая теория смазки. М., Л., изд. АН СССР, 1934.  
 Петров, Н. П. Инженерный журнал, 1883, № 1—4.  
 Хаппель, Дж., Бреннер, Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир, 1976.  
 Brøner, H. Chem. Eng. Sci. 16, 242, 1961.  
 Chervenivanova, E., Zapyranov, Z. Int. J. Multiphase Flow, vol. 11, № 5, 1985.  
 Haberman, W. L., Morton, R. K. Taylor Model Basin, Washington, Rep. 802, 1953.  
 Hadamard, J. Comptes Rendus, 152, 1911.  
 Kaplan, S., Lagenstrom, P. A. J. Math. Mech., 1957, 6, 585—593.  
 Lamb, H. Phil. Mag., 1911, 21, 120.  
 Lorentz, H. A. Abhandl. Theor. Phys. Leipzig, 1, 1907.  
 Murray, J. D. J. Fluid Mech., 1965, 21, 337—344.  
 Oseen, G. W. Ark. Math. Astron. och Fys., 1910, 6, N 29.

Proudman, I., Pearson, J. R. J. *Fluid Mech.*, 1957, **2**, 237—262.  
 Reynolds, O. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 177, **2**, 228, 1886.  
 Rybaczynski, W. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie, Ser. A*, **40**, 1911.  
 Saito, S. *Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. Sendai, Japan*, **2**, 1913.  
 Sommerfeld, A. *Z. Math. Phys.*, 1904, **50**, 97.  
 Stimson, M., Jeffery, G. B. *Proc. Roy. Soc., A*, **111**, 1926.  
 Stokes, G. G. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 1851, **9**, pt. II, 8.  
 Taylor, T., Acrivos, A. J. *Fluid Mech.*, **11**, 309—316, 1964.  
 Whitehead, A. N. *Quart. J. Math.*, 1889, **23**, 143—152.  
 Zapryanov, Z. D., Stoyanova, S. S. *Int. J. Multiphase Flow*, **4**, 1978.

#### ГЛАВА IV

Голубеев, В. В. В кн.: Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. II. М., Физматгиз, 1963, 565—566.  
 Дородницын, А. А. *Прикл. мех. мат.*, 1942, **6**, 449—486.  
 Капица, П. Л. *ЖЭТФ*, **18**, № 1, 3—28, 1948.  
 Кочин, Н. Е., Лойцянский, Л. Г. *ДАН СССР*, 1942, **36**, № 9, 278—284.  
 Калицова-Куртева, П. Г., Запryanov, З. Д., ТПМ, 1986.  
 Лейбензон, Л. С. *Труды ЦАГИ*, 1935, **240**.  
 Нейланд, В. Я. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1964, №4 **53**—57.  
 Олейник, О. А. *ЖВМ и МФ*, 1963, **3**, № 3, 489—507.  
 Славчев, С. *ТПМ, БАН*, год. 6, кн. 4, 49—55.  
 Степанов, Е. И. *Прикл. мат. и мех.*, 1947, **11**, №1, 203—204.  
 Хуснутдинова, Н. В. В кн. *Динамика сплошной среды*, Новосибирск, 1978, **37**, 44—148.  
 Шкадов, В. Я. *Изв. АН СССР, ОТН, механ. матем.*, 1962, № 3, 173—175.  
 Шкадов, В. Я. *Изв. АН СССР, ОТН, МЖГ*, 1967, № 1, 43—51.  
 Шкадов, В. Я. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 3, 133—137.  
 Bickley, W. *Phil. Mag., Ser. 7*, 1939, **23**, 727—731.  
 Blasius, H. *Zeitschr. Math. Phys.*, 1908, **56**, 1—37.  
 Boltze, F. *Göttingen dissertation*, 1908.  
 Boussinesq, J. *Théorie analytique de la chaleur*, Gauthier — Villars. Paris, vol. 2, 1903.  
 Boussinesq, J. C. R. Acad. Sci. Paris. **113**, 1891.  
 Crocco, L. *Rend. Mat. Univ. Roma*, 1941, **2**, 138.  
 Crocco, L. *L' Aerotecnica*, 1932, **12**, 181—197.  
 Falkner, V. M., Skan, S. W. *Phil. Mag.*, 1931, **12**, 865—896.  
 Fage, A., Falkner, V. M. *ARC RM.* **1408**, 1931.  
 Goldstein, S. *Modern Developments in Fluid Dynamics*, 1965.  
 Hantzsche, W., Wendt, H. *Jb. dt. Luftfahrtforsch.*, 1940, **1**, 517—521.  
 Hartree, D. R. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1937, **33**, pt. II, 223—239.  
 Hiementz, K. *Dingl. Polytechn. J.*, 1911, **326**, 321.  
 Holstein, H., Böhlen, T. *Lilienthal — Bericht*, 1940, **S10**, 5—16.  
 Howarth, L. *ARC RM.* **1632**, 1935.  
 Howarth, L. *Proc. Roy. Soc. London*, 1938, Ser. A, **164**, 547—579.  
 Kármán, Th. *ZAMM*, 1921, **1**, 233—235.  
 Levy, JAS, 1952, **19**, N 5, 341—348.  
 Lock, R. C. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1951, **4**, 42—63.  
 Mangler, W. *ZAMM*, 1948, **28**, 97—103.  
 Ostrach, S. *NACA Rep.* 1111, 1953.  
 Pohlhausen, K. *ZAMM*, 1921, **1**, 252—268.  
 Pohlhausen, E. *ZAMM*, 1921, **1**, 115.  
 Rayleigh, L. *Phys. Z.*, **33**, 1932.  
 Riley, N. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **19**, **461**, 1966.  
 Schlichting, H. *ZAMM*, 1933, **13**, 260—263.  
 Schlichting, H. *Phys. Z.*, **33**, 1932.  
 Schönauer, W. *Ing. — Arch.*, 1964, **33**, 173—189.  
 Stewartson, K., Williams, P. G. *Proc. Roy. Soc. London*. 1969, Ser. A, **312**, 181—206.



Табакoва, С., Запрыанoв, З. ZAMP, 1982, vol. 33, 344—357, 437—502.  
 Tollmien, W. Handh. Exper. Physik, 1931, IV, N 1, 241—283.  
 Walz, A. Lilientahl Ges. Luftfahrtforsch., 141, 8—12, 1941.  
 Wang, C. J. Math. Phys., 46, 195—202, 1967.

## ГЛАВА V

- Бетчoв, Р., Криминале, В. Вопросы гидродинамической устойчивости, М. Мир, 1971.  
 Гoльдштик, М. Л., Штерн, В. И. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, Наука, 1977.  
 Джозеф, Д. Устойчивость движений жидкости. М., Мир, 1981.  
 Дорoдницын, А. А., Лoйцянский, Л. Г. Прикл. мат. и мех., 1945, 9 №4, 269—285.  
 Линь Цзя-цзяo. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.  
 Петров, Г. И. О распространении колебаний в вязкой жидкости и возникновении турбулентности, Труды ЦАГИ, 1938, 345.  
 Петров, Г. И. Прикл. мат. и мех. 1940, 4, № 3, 3—12.  
 Хинце, И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.  
 Шкадов, В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости, М. Изд. Моск. ун-та, 1973.  
 Blasius, H. Forsch. Arb. Ing. — Wes., Berlin, 1913, N 131.  
 Boussinesq, J. Mémoires présentées par divers savants à l'Acad. Sci. Paris, 1877, 23, 46.  
 Gaster, M. J. Eluid Mech., 1953, 14, 222—224.  
 Görtler, H. ZAMM, 1942, 22, 244—254.  
 Heisenberg, W. Ann. Phys., 1924, 74, 577—627.  
 Howard, L. N. J. Fluid Mech., 1961, 10, 577—627.  
 Kármán, Th. ZAMM, 1921, 1, 233—252.  
 Kármán, Th. Collected Works II, 1930, 337—346.  
 Lin, C. Quart. Appl. Math., 1945, 1946, III, N 2, 117—142, N 3, 213—234, N 4, 277—301.  
 Nikuradse, J. VDI-Forschungsheft, 356, 1932.  
 Orr, W. M. F. Proc. Roy. Irish Acad., 1907, 27, 9—68, 69—138.  
 Orszag, S. A. J. Fluid Mech., 1971, 5, 689—703.  
 Prandtl, L. Gesammelte Abhdlg., II, 620—626 (1921), 736—751 (1925), 819—845 (1933), 869—873 (1942).  
 Rayleigh. Scientific Papers, I, 474—487 (1880); III, 17 (1887); VI, 197 (1913).  
 Reichardt, H. VDI-Forschungsheft, 414, 1942.  
 Reynolds, O. Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1883, 174, 935—892; 1895, 186, 123—164.  
 Sato, H., Kuriki, K. J. Fluid Mech., 1961, 11, 321—352.  
 Schubauer, G. B., Skramstad, H. K. JAS, 1947, 14, 69—78.  
 Sommerfeld, A. Proc. 4-th Int. Congress Math. Rome, 1908, III, 116—124.  
 Squire, H. B. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1933, 142, 621—628.  
 Tatsumi, T., Kakutani, T. J. Fluid Mech., 1958, 4, 261—275.  
 Tatsumi, T., Gotoh, K. J. Fluid Mech., 1960, 7, 433—441.  
 Tollmien, W. ZAMM, 1926, 6, 468—478.  
 Tollmien, W. Göttingen Nachrichten, 1, 24, 1929.  
 Thomas, L. H. The Phys. Rev., 1952, 86, 812.  
 Бабенко, К. И., Введенская, Н. Д., Орлова, Н. Г. ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 1, 183—196.

## ГЛАВА VI

Белоцерковский, О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М., Наука, 1984.

- Жовеня, В. М., Яненко, Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск, Наука, 1981.
- Кокошинская, Н. С., Павлов, Б. М., Пасконов, В. М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. М., Изд. МГУ, 1980.
- Мезингер, Ф., Аракава, А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Л., Гидрометеиздат, 1979.
- Пасконов, В., Полежаев, В., Чудов, Л. Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса. М., Наука, 1984.
- Петров, Г. И. Прикл. мат. и мех., 4, № 3, 1940.
- Полежаев, В. И., Грязнов, В. Л. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5, 8—15.
- Рихтмайер, Р., Мортон, К. Разностные методы решения краевых задач. М., Мир, 1972.
- Рожественский, Б. Л., Симакин, И. Н. ДАН СССР, 1982, 266, № 6, 1337—1340.
- Роуч, П. Вычислительная гидродинамика. М., Мир, 1980.
- Самарский, А. А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977.
- Шкадова, В. П. Изв. АН СССР, МЖГ, 1982, № 1, 16—21.
- Akawa, A. J. Comput. Phys., 1966, 1, 119—143.
- Benjamin, A. S., Denny, V. E. J. of Comput. Phys., 1979, 33, 340—358.
- Chuen-Jen-Chow. An introduction to computational fluid mechanics. N. J. John Wiley & Sons, 1979.
- Flügge—Lotz, J., Blottner, F. G. В кн. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М. Наука, 1974, 186—189.
- Fromm, J. E., Harlow, F. H. Phys. of Fluids, 1963, 6, N 7, 975—982.
- Kawaguti, J. Phys. Soc. Japan, 10, 694—699, 1955.
- Orszag, S. A. J. Fluid Mech., 5, 689—703, 1971.
- Thom, A. Roy. Soc. London, Ser. A, 1933, 141, 651—666.

# СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР . . . . .	3
ВЪВЕДЕНИЕ . . . . .	5
Глава I	
<b>МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА ТЕЧЕНИЯ НА ВИСКОЗНИ ФЛУИДИ</b>	<b>9</b>
§ 1.1. Основни уравнения . . . . .	9
1.1.1. Закони за запазване при непрекъснати среди . . . . .	11
1.1.2. Тензор на напреженията и тензор на скоростта на деформацията . . . . .	18
1.1.3. Уравнение на състоянието на средата . . . . .	25
1.1.4. Модели на флуидни среди . . . . .	27
§ 1.2. Общи свойства на флуидните течения . . . . .	30
1.2.1. Дисипация на механичната енергия . . . . .	31
1.2.2. Пренасяне на завихреността . . . . .	30
§ 1.3. Начално-гранични задачи . . . . .	34
1.3.1. Двумерни течения на хомогенен флуид . . . . .	37
1.3.2. Двумерно течение с междуфазова граница . . . . .	39
1.3.3. За съществуването и единствеността на решенията . . . . .	40
1.3.4. Подобие при вискозни течения . . . . .	43
Глава II	
<b>ТОЧНИ РЕШЕНИЯ НА УРАВНЕНИЯТА НА ВИСКОЗНИ ФЛУИДИ</b>	<b>45</b>
§ 2.1. Слоести течения . . . . .	45
2.1.1. Дифузия на завихреността . . . . .	45
2.1.2. Течения, породени от надлъжен градиент на налягането . . . . .	50
2.1.3. Течения, породени от действието на силата на тежестта . . . . .	59
§ 2.2. Течения с осова симетрия . . . . .	62
2.2.1. Дифузия на вихрова нишка . . . . .	63
2.2.2. Течение между въртящи се цилиндри . . . . .	64
2.2.3. Нестационарно въртене на цилиндър . . . . .	66
2.2.4. Нестационарно ротационно течение на Кует . . . . .	68
2.2.5. Нестационарно надлъжно течение между два концентрични кръгови цилиндъра . . . . .	70
2.2.6. Ротационни осцилации на кръгов цилиндър . . . . .	72
§ 2.3. Нелинейни автомоделни решения . . . . .	73
2.3.1. Разтичане на течност близо до твърда повърхност . . . . .	74
2.3.2. Течение в разширяващ се канал . . . . .	80
2.3.3. Течение близо до въртящ се диск . . . . .	83
2.3.4. Кръгова струя . . . . .	86
2.3.5. Течения с подаване и отнемане на флуид през твърда гранична повърхност . . . . .	89
2.3.6. Разширяващ се сферичен мехур . . . . .	90
§ 2.4. Слой на Екман . . . . .	93
2.4.1. Уравнения на движението на вискозни флуиди относно неинерциална координатна система . . . . .	94

2.4.2. Модел на водно течение, предизвикано от вятър . . . . .	96
2.4.3. Влияние на въртенето на Земята върху изменението на посоката на вятъра в атмосферата . . . . .	98
2.4.4. Периодичен слой на Екман . . . . .	100
§ 2.5. Права ударна вълна във вискозен газ . . . . .	101
§ 2.6. Точно решение на уравнението на Бюргерс . . . . .	104

### Глава III

## ТЕЧЕНИЯ ПРИ МАЛКИ ЧИСЛА НА РЕЙНОЛДС . . . . . 108

§ 3.1. Приближение на Стокс . . . . .	108
3.1.1. Бавно движение на сфера . . . . .	109
3.1.2. Парадокс на Стокс . . . . .	112
3.1.3. Бавно движение на две сфери . . . . .	113
3.1.4. Бавно движение на сфера перпендикулярно на равнина . . . . .	117
3.1.5. Бавно движение на сферична капка (мехур) във флуид . . . . .	121
3.1.6. Обтичане на сферична капка от осцилиращ вискозен флуид . . . . .	124
3.1.7. Ротационни осцилации на сфера . . . . .	126
3.1.8. Вискозно течение в биконичен вискозиметър . . . . .	128
3.1.9. Стационарно течение в смазочен слой . . . . .	131
3.1.10. Цилиндричен лагер . . . . .	134
§ 3.2. Приближение на Озеен . . . . .	138
3.2.1. Обтичане на сфера . . . . .	138
3.2.2. Обтичане на цилиндър . . . . .	142
§ 3.3. Приближения от по-висок ред при обтичане на твърда сфера . . . . .	145
3.3.1. Парадокс на Уайтхед . . . . .	145
3.3.2. Стоксово и озееново разлагане. Първо приближение . . . . .	149
3.3.3. Второ приближение . . . . .	152
§ 3.4. По-високи приближения при обтичане на капка (мехур) . . . . .	155
3.4.1. Уравнения и гранични условия при движение на слабо деформируема капка . . . . .	155
3.4.2. Първо приближение. Запазване на сферичната форма на капката . . . . .	158
3.4.3. Второ приближение. Деформация на капката . . . . .	159
§ 3.5. Вискозно течение между две бавно въртящи се сфери . . . . .	162

### Глава IV

## ГРАНИЧЕН СЛОЙ . . . . . 169

§ 4.1. Уравнения на граничния слой . . . . .	169
§ 4.2. Автомоделни решения на уравненията на граничния слой . . . . .	179
4.2.1. Степенен закон на външната скорост . . . . .	180
4.2.2. Открити течения . . . . .	185
4.2.3. Обобщение на понятието автомоделност . . . . .	193
§ 4.3. Граничен слой с градиент на налягането . . . . .	195
4.3.1. Разлагане в ред . . . . .	195
4.3.2. Метод на интегралните съотношения . . . . .	199
§ 4.4. Пренос на топлина в граничен слой . . . . .	203
4.4.1. Уравнения на топлинния граничен слой . . . . .	204
4.4.2. Топлинен граничен слой в несвиваема течност . . . . .	205
4.4.3. Течение и топлообмен в граничен слой на свиваем флуид . . . . .	209
§ 4.5. Стационарно течение в началния участък на права кръгова тръба . . . . .	214
4.5.1. Хидродинамичен разчет в първата част на началния участък . . . . .	216
4.5.2. Хидродинамичен разчет във втората част на началния участък . . . . .	218
§ 4.6. Нестационарен граничен слой . . . . .	222
4.6.1. Импулсивно и равноускорително движение. Решение на Блазиус . . . . .	222
4.6.2. Периодичен граничен слой. Хармонични осцилации на кръгов цилиндър във вискозен флуид . . . . .	237
§ 4.7. Вълнови течения със свободна граница . . . . .	248

§ 4.8. Температурен граничен слой при естествена конвекция . . . . .	253
§ 4.9. Дифузионен граничен слой . . . . .	256
4.9.1. Уравнение на дифузията в бинарна смес . . . . .	257
4.9.2. Уравнение на ламинарния дифузионен граничен слой . . . . .	260
4.9.3. Преобразуване на уравнението на дифузионния граничен слой в уравнение на топлопроводността . . . . .	260
4.9.4. Дифузия към твърда сферична частица . . . . .	262

## Глава V

### НЕУСТОЙЧИВОСТ И ТУРБУЛЕНТНОСТ . . . . . 265

§ 5.1. Основи на теорията на хидродинамичната устойчивост . . . . .	265
5.1.1. Баланс на енергията на смущенията . . . . .	266
5.1.2. Метод на малките смущения . . . . .	267
5.1.3. Устойчивост на течения близо до твърди повърхности . . . . .	271
5.1.4. Устойчивост на открити течения . . . . .	275
§ 5.2. Турбулентни течения . . . . .	278
5.2.1. Уравнения на Рейнолдс . . . . .	278
5.2.2. Турбулентни течения в тръби . . . . .	280
5.2.3. Турбулентен граничен слой върху гладка повърхност . . . . .	284
5.2.4. Свободна турбулентност . . . . .	286
5.2.5. Течение на струя върху твърда повърхност . . . . .	291

## Глава VI

### ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ . . . . . 297

§ 6.1. Начални и гранични задачи за обикновени диференциални уравне- ния . . . . .	297
6.1.1. Основни понятия при метода на крайните разлики . . . . .	298
6.1.2. Методи за решаване на гранични задачи . . . . .	300
6.1.3. Решаване на автомоделни задачи . . . . .	303
6.1.4. Линейни гранични задачи . . . . .	305
§ 6.2. Развитие на вискозни течения . . . . .	306
6.2.1. Свойства на апроксимиращите уравнения . . . . .	306
6.2.2. Числено решаване на уравненията на граничния слой . . . . .	310
6.2.3. Диференчни схеми за уравненията на Навие — Стокс . . . . .	312
§ 6.3. За правите методи . . . . .	319
6.3.1. Устойчивост на течението на Поазьой . . . . .	320
6.3.2. Обтичане на сфера . . . . .	322

## Приложение

### УРАВНЕНИЯ НА НАВИЕ — СТОКС В ОРТОГОНАЛНИ КРИВОЛИНЕЙНИ КООРДИНАТИ . . . . . 327

### ЛИТЕРАТУРА . . . . . 330

**Виктор Яковлевич Шкадов  
Запрян Димитров Запрян**

## **ДИНАМИКА НА ВИСКОЗНИ ФЛУИДИ**

**Първо издание**

**Рецензенти Стойчо Панчев, Стефан Радев  
Редактор Златка Петрова  
Художник Тания Николова  
Художествен редактор Кремена Филчева  
Технически редактор Правда Глогинска  
Коректор Теменужка Балабанова**

Дадена за набор на 19. VIII. 1985 г. Подписана за печат на 15. I. 1986 г.

Излязла от печат през м. февруари 1986 г. Формат 60/90/16

Печатни коли 21,25. Издателски коли 21,25. Усл. изд. коли 22,52

Издателски № 26732 Тираж 903. Цена 1,29 лв.

КОД 02/9534623511/4805-438-86

Държавно издателство „Наука и изкуство“ — София  
Държавна печатница „Георги Димитров“ — Ямбол