

7 Тензор напряжений

Темы семинара: Поверхностные силы. Тензор напряжений. Диаграмма Мора.

Задачи:

1. По заданному тензору напряжений определить вектор напряжений на заданной площадке
2. Выписать тензор напряжений, если известно, что вектор напряжений направлен по нормали к поверхности.

Для определения силы, действующей на протяженный объект, его поверхность разбивают на элементарные площадки и интегрируют вектор напряжений по поверхности.

Домашнее задание:

1. Поле напряжений в сплошной среде задано тензором

$$\begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & (1 - x_2^2) x_1 & 0 \\ (1 - x_2^2) x_1 & (x_2^3 - 3x_2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Определите вектор напряжения в точке $(1, 1, 1)$ на площадке с нормалью $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.
 - (b) Определите нормальное напряжение на этой площадке
 - (c) Определите силу, которая действует на квадратную пластину $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 1$, нормаль направлена вдоль оси x_3
2. В идеальной жидкости тензор напряжений в декартовой системе координат определяется соотношением $p^{ij} = -p\delta^{ij}$, где δ^{ij} — символ Кронеккера, а p — скалярная функция координат и времени, называемая давлением. При обтекании цилиндра радиуса R жидкостью плотности ρ , имеющей вдали от цилиндра скорость U_0 , распределение давлений по поверхности тела имеет вид

$$p(\theta) = \frac{\rho U_0^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta),$$

где θ — полярный угол в полярной системе координат с центром в центре цилиндра, направление $\theta = 0$ соответствует направлению набегающего потока. Определите силу, действующую на переднюю ($\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$) и верхнюю ($\theta \in [0, \pi]$) половины цилиндра, а также на весь цилиндр целиком.

3. При кручении кругового цилиндрического стержня радиуса R , ось которого совпадает в осью x_3 декартовой системы координат, в нем возникают напряжения, которые описываются тензором с компонентами:

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \mu x_2 \\ 0 & 0 & \alpha \mu x_1 \\ -\alpha \mu x_2 & \alpha \mu x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Определите максимальное нормальное и касательное напряжение в произвольной точке на границе стержня ($x_1^2 + x_2^2 = R^2$).
- Вычислите момент поверхностных сил относительно оси x_3 , действующих на произвольное сечение $x_3 = \text{const.}$