3 Тензоры второго ранга

Темы семинара: Тензоры. Тензорный закон преобразования. Главные оси и главные значения, инварианты.

Задачи:

1. Показать, что любой тензор второго ранга представляется в виде суммы симметричного и антисимметричного.

2. Показать, что свойство симметричности (антисимметричности) инвариантно относительно замены системы координат.

3. Показать, что для любого симметричного тензора второго ранга T, имеющего в некоторой декартовой системе компоненты t_{ij} следующие функции являются его инвариантами

$$J_1 = t_{ii}, \quad J_2 = t_{ij}t_{ij} \quad J_3 = t_{ij}t_{jk}t_{ki}$$

$$I_1 = t_{ii}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(t_{ii}t_{jj} - t_{ij}t_{ij}) \quad I_3 = \det(t_{ij})$$

4. Показать, что свертка по двум индексам симметричного и антисимметричного тензора равна нулю.

Домашнее задание:

1. Определите главные компоненты и главные оси тензора, который в некоторой декартовой системе координат имеет компоненты

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Числа

$$\epsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot [\vec{e}_j \times \vec{e}_k]$$

являются компонентами тензора Леви-Чивита. Докажите, что

   (a) для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \epsilon^{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

   (b) имеет место формула

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \epsilon^{ijk} \nabla_i v_j \vec{e}_k$$

3. Выпишите компоненты тензора Леви-Чивита в цилиндрической системе координат и запишите выражение для ротора в этих координатах.