2 Полная (индивидуальная) производная. Тензоры. Ковариантное дифференцирование

Темы семинара: Индивидуальная производная в лагранжевых и элеровых координатах. Ускорение. Тензоры. Тензорный закон преобразования. Производная от вектора. Символы Кристофеля.

Задачи:

1. Определите поле ускорений, если среда имеет следующее поле скоростей в эйлеровом описании:
$$v_1 = A(t)x_2, \quad v_2 = B(t)x_1, \quad v_3 = 0.$$

2. Пусть в предыдущей задаче $A = -B = \omega = \text{const}$. Выписать поле ускорений в цилиндрической СК.

   Решение: Известно, в цилиндрической системе координат $\mathbf{e}_1 = \cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_2 = -r\sin\varphi\mathbf{e}_x + r\cos\varphi\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$.

   Вычислим производные:
$$\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y = \frac{1}{r}\mathbf{e}_2 \quad \frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial r} = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y = \frac{1}{r}\mathbf{e}_2 \quad \frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial\varphi} = -r\cos\varphi\mathbf{e}_x + r\sin\varphi\mathbf{e}_y = -r\mathbf{e_1} \quad \frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial\varphi} = 0 \quad \frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial z} = 0$$

   Отсюда находим ненулевые символы Кристофеля:$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r$, $\Gamma^1_{22} = -r$.

   Вычислим компоненты вектора ускорения:
$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j\left(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + v^k\Gamma^i_{jk}\right).$$

   Так как производные от компопнент скорости по времени и по координатам нулевые, то в окончательном выражении останутся только слагаемые, содержащие символы Кристофеля, а именно: $i = 1,\ j = 2,\ k = 2$, $i = 2,\ j = 1,\ k = 2$, $i = 2,\ j = 2,\ k = 1$, то есть отличны от нуля первая и вторая компоненты ускорений:
$$a^1 = v^2v^2\Gamma^1_{22} = -\omega^2 r \quad a^2 = v^1v^2\Gamma^2_{12} + v^2v^1\Gamma^2_{21} = 2\frac{v^1v^2}{r} = 0.$$

   Обратите внимание на связь полученных выражений с известными формулами для центростремительного и кориолисова ускорения.

   То, что v^2 имеет размерность угловой скорости иногда не очень удобно. Как правило, пользуются т.н. «физическими» компонентами векторов: проекциями вектора на направления базисных векторов. Эти проекции уже имеют размерность длины. При этом уже нельзя пользоваться полученными выражениями для ковариантных производных ($\nabla_j v^i$), но задачи решать удобнее. Для основных криволинейных систем координат выражения для часто встречающихся векторов, дифференциальных операторов, тензоров через ковариантные, контрвариантные и физические компоненты выписаны в справочниках.

Домашнее задание:

1. При движении среды, происходящем с полем скорости

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_3 = 0, \quad \omega = \text{const},$$

в пространстве создается (при помощи подходящим образом распределенных источников тепла) поле температуры

$$T = T_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad T_0, \tau, a, b, c = \text{const}.$$

Найдите скорость изменения температуры в индивидуальной частице в момент $t = t_0$, если она находится в этот момент в точке пространства с координатами $x = a$, $y = b$, $z = c$.

2. Движение среды происходит с полем скорости

$$v_1 = kx_1, \quad v_2 = -kx_2, \quad v_3 = 0, \quad k = \text{const}$$

и полем плотности

$$\rho = \rho_0 + Ax_2 e^{kt}, \quad \rho, A = \text{const}.$$

Найдите скорость измения плотности в каждой частице.

3. Выпишите выражения для ускорения в цилиндрической системе координат для произвольного поля скоростей.