Олимпиада «Ломоносов 2010» по механике

Заочный тур

Задание 2 — Решения

1. Для того чтобы собака и мячик оказались в одной точке, собака должна бежать со скоростью v, равной горизонтальной составляющей скорости мяча u. Отсюда следует, что $v = u\cos\alpha \Rightarrow \frac{u}{2} = u\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\alpha = 60°$.

2. В тот момент времени, когда соперник догоняет Гаврилу, он пробегает расстояние на один круг больше, чем Гаврила. Сначала по условию задачи выполняются следующие условия $(v_1 - v_2)t = s_0$ и $v_2 t = 2s_0$, где s_0 — длина круга, v_1 — скорость соперника, v_2 — скорость Гаврилы, t - время движения спортсменов от старта до момента встречи. Затем, после интенсивных тренировок — $(v_1 - v_2^{'})t^{'} = s_0$ и $v_2^{'}t^{'} = 4s_0$, где $v_2^{'}$ — новая скорость Гаврилы, $t^{'}$ — новое время движения спортсменов от старта до момента встречи. Четыре приведенных уравнения содержат шесть неизвестных величин. Из такой системы уравнений нельзя найти все неизвестные величины, например, скорости движения спортсменов. Но отношение скоростей $\frac{v_2^{'}}{v_2}$ найти можно. Для этого выразим:

$v_1 t = 3s_0,\ v_1 t^{'} = 5s_0 \Rightarrow \frac{t}{t^{'}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{v_2 t}{(v_2)^{'} t^{'}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_2^{'}} = \frac{5}{6} \Rightarrow v_2^{'} = 1,2v_2$.

Это означает, что скорость надо увеличить на 20%.

Ответ: 20%

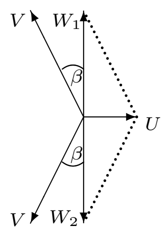
3. Обозначим v и u — скорости велосипедиста и поезда соответственно. Тогда условия задачи на языке математики можно записать следующим образом:

$(v-u)t_1 = h;\ (v+u)t_2 = h;\ u(t_1+t_2) = l;\ v(t_1+t_2) = L$

Здесь t_1 и t_2 — время движения велосипедиста по ходу поезда и навстречу соответственно. Откуда следует, что скорость велосипедиста в полтора раза больше скорости поезда, а длина поезда $h = 500$ м.

Ответ: $h = 500$ м

4. В том случае, если планерист летит сначала по ветру, а затем против ветра, то время в полете определится формулой: $t_1 = \frac{L}{V+U} + \frac{L}{V-U} = \frac{2LV}{V^2-U^2}$, где V — скорость дельтаплана относительно воздуха, U — скорость ветра. Если планерист летит в каком-то другом направлении, например, так, чтобы двигаться на север (как показано на рисунке),



то скорость дельтаплана относительно земли W_1 и W_2 в обоих направлениях будет одинакова

$W_1 = \sqrt{V^2 - U^2} = W_2$.

В этом случае время в полете: $t_2 = \frac{2L}{\sqrt{V^2-U^2}}$. Покажем, что $t_1 > t_2$. Верна следующая цепочка неравенств:

$\frac{2VL}{V^2-U^2} > \frac{2L}{\sqrt{V^2-U^2}} \Leftrightarrow V > \sqrt{V^2-U^2} \Leftrightarrow V^2 > V^2 - U^2 \Leftrightarrow 0 > -U^2$

Таким образом, получаем, что время в полете зависит от направления движения.

5. Так как все объекты движутся относительно воды и нет ни каких условий связи с объектами, находящимися на берегу, то единственную систему координат, относительно которой можно рассматривать эту задачу, выберем связанной с водой. Таким образом, у нас нет необходимости учитывать скорость течения. В стоячей воде трамвайчик имеет скорость v, а катер $k \cdot v$. Требуется найти коэффициент k. Отметим, что за время $4t_0$ трамвайчик пройдет путь $s_1 = 4t_0 v$, а катер должен пройти путь $s_2 = 6t_0 v$. Отсюда получим $4t_0 kv = 6t_0 v \Rightarrow k = 1,5$