Олимпиада «Ломоносов 2010» по механике

Заочный тур

Задание 1 — Решения

1. Введем обозначения: X — масса тающего льда, который Гаврила положил в стакан с водой; $M = 200$ г — масса воды в стакане; $t = 20°$C — температура воды в стакане; $T = 16°$C — предельная температура; $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ град) — удельная теплоемкость воды; $e = 2100$ Дж/(кг $\cdot$ град) — удельная теплоемкость льда; $l = 334$ кДж/кг — удельная теплота плавления льда. Понятно, что, исходя из условия задачи, температура воды не должна быть меньше, чем 16°C, а максимальное количество льда определяется, как раз, условием, что температура достигнет предельной величины 16°C. Составим уравнение баланса тепла: $cM(t - T) = cX(T - 0) + Xl$ (вода отдает тепло льду, за счет которого сначала лед тает и затем вода, полученная из льда нагревается до конечной температуры). Отсюда получим $X = \frac{cM(t-T)}{cT+l} \approx 8,4$ г

2. Ответ на поставленный вопрос получим из двух важных физических законов. Во-первых, закон сохранения массы: масса льда равна массе воды, которая получится из этого льда, когда он растает. На языке математики это можно записать следующим образом: $\rho_1 V_1 = \rho V_2$ (1), где ρ_1 — плотность льда, V_1 — объем льда, ρ — плотность воды, V_2 — объем полученной воды. Во-вторых, закон Архимеда, в виде условия плавания льда в воде, до того как лед начал таять: $\rho V^{'} = \rho_1 V_1$ (2), где $V^{'}$ — объем погруженной в воду части льда. Уровень воды в стакане с плавающим льдом определяется формулой $h_1 = \frac{V_0+V^{'}}{S}$, где V_0 — начальный объем воды в стакане безо льда, S — площадь поперечного сечения стакана. Уровень воды в стакане, после того как лед растаял, определяется формулой $h_2 = \frac{V_0+V_2}{S}$. Из сравнения (1) и (2) следует $V_2 = V^{'}$, а значит, $h_1 = h_2$, т.е. уровень воды в стакане не изменится, когда лед растает.

3. Введем обозначения: ρ_0 — плотность льда, воды и масла соответственно. Из условия задачи следует, что: $\rho_0 = \rho\left(1 - \frac{17}{100}\right) = \frac{83}{100}\rho$ (3). Составим уравнение равновесия кубика льда: $\rho_1 g 2h = \rho_0 gh + \rho gh$ (4). Здесь введены обозначения: $2h$ — высота кубика льда, g — ускорение свободного падения. Подставляя (3) в (4), получим $\rho_1 = 0,915\rho = 915$ кг/м^3.

4. Понятно, что чем большую часть тела погрузить в жидкость, тем выше будет уровень жидкости. Исходя из решения предыдущей задачи уровень воды не изменится, если лед, погружен в воду на 92,5% в соответствии со значением плотности (см. предыдущую задачу), а так как в условиях задачи известно, что в воду погружена только половина объема льда, то понятно, что после таяния льда уровень воды повысится. Повышение уровня воды можно оценить следующим образом. Из закона сохранения массы следует: $\rho_1 V = \rho V_2$ (5), где V — объем льда, ρ — плотность воды, V_2 — объем полученной из льда воды. При этом, исходя из условия задачи, объем воды после таяния льда уменьшится на объем льда, погруженной в воду $\frac{V}{2}$. В результате итоговое изменение объема воды ΔV определяется разностью двух величин $\Delta V = V_2 - \frac{V}{2} = V\left(\frac{\rho_1}{\rho} - \frac{1}{2}\right) > 0$ (6). Для оценки изменения уровня масла после таяния льда также надо сравнить два процесса. Во-первых, уровень масла понизится на объем половины объема куска льда $\frac{V}{2}$. Во-вторых, уровень повысится на ΔV за счет повышения уровня воды от таяния второй половины объема льда. Изменение уровня масла определяется знаком разности $\Delta V - \frac{V}{2}$, которая, исходя из (6), оказывается отрицательной. Это значит, что уровень масла понизится.

5. Условия плавания бруска в первой и второй жидкости из условия задачи будут выглядеть следующим образом: $V\rho^0 = \frac{3}{4}V\rho^1; V\rho^0 = \frac{1}{2}V\rho^2$ (7) Здесь ρ^0, ρ^1, ρ^2 — плотности бруска, первой и второй жидкостей соответственно; V — объем бруска. При смешивании равных масс двух жидкостей плотность смеси ρ^3 — равна среднему гармоническому плотностей компонент смеси (докажите самостоятельно) $\rho^3 = \frac{2\rho^1\rho^2}{\rho^1\rho^2}$ (8). Тогда из условия плавания бруска в смеси $V\rho^0 = V^{'}\rho^3$, выражая плотности из (7) и (8), для объема погруженной части бруска $V^{'}$ получим $V^{'} = \frac{5}{8}V$. Значит, ответ на поставленный вопрос: $\frac{3}{8}$ или 37,5%.