Заочная школа-олимпиада по механике, 3-й тур

Одной из важных составляющих физико-математического образования является умение делать численные оценки в уме, вычислять приближенно, оценивать погрешности вычислений, чувствовать числовые порядки результатов вычислений. Во всех практических задачах исследователь не может ограничиться замысловатой математической формой записи результата. Если в ответе получаются числа типа: $\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\log_2 3$, то задача еще не решена. Надо уметь дать приближенную оценку результата, выраженную рациональной или десятичной дробью. Кто-то может подумать, что на этот случай существуют калькуляторы и, вообще, многие вычислительные процедуры можно выполнять с помощью компьютера. Но любой полученный с помощью электронной техники результат требует анализа и проверки, потому что любые вычисления могут содержать ошибки, которые как раз тренированный на устном счете ум исследователя легко заметит.

Умение проводить многие арифметические действия в уме, знание основных приемов устного счета во-первых многократно ускоряют все расчетные процедуры, во-вторых, являются совершенно необходимой гимнастикой ума для молодых людей, выбравших точные науки в качестве будущей сферы деятельности.

Для начала освоим несколько таблиц.

$11^2 = 121$	$15^2 = 225$	$..1^2 = ...1$	$..1^3 = ...1$
$12^2 = 144$	$25^2 = 625$	$..2^2 = ...4$	$..2^3 = ...8$
$13^2 = 169$	$35^2 = 1225$	$..3^2 = ...9$	$..3^3 = ...7$
$14^2 = 196$	$45^2 = 2025$	$..4^2 = ...6$	$..4^3 = ...4$
$15^2 = 225$	$55^2 = 3025$	$..5^2 = ...5$	$..5^3 = ...5$
$16^2 = 256$	$65^2 = 4225$	$..6^2 = ...6$	$..6^3 = ...6$
$17^2 = 289$	$75^2 = 5625$	$..7^2 = ...9$	$..7^3 = ...3$
$18^2 = 324$	$85^2 = 7225$	$..8^2 = ...4$	$..8^3 = ...2$
$19^2 = 361$	$95^2 = 9025$	$..9^2 = ...1$	$..9^3 = ...9$

Первая таблица — это то, что надо знать наизусть — квадраты натуральных чисел второго десятка.

1. Упражнение. Вычислить в уме: $1{,}1^2$, $1{,}3^2$, $1{,}7^2$, $1{,}9^2$, $0{,}12^2$, $0{,}14^2$, $\sqrt{3{,}61}$, $\sqrt{2{,}89}$, $\sqrt{0{,}0256}$

Вторая таблица — это квадраты чисел оканчивающихся на 5 и для их вычисления надо запомнить правило: количество десятков данного числа надо умножить на число равное количеству десятков $+1$. Затем приписать к результату справа 25. Например: 45^2. У этого числа 4 десятка. Тогда умножаем $4 \cdot (4+1) = 20$ и приписываем $25 \Rightarrow 45^2 = 2025$. Еще пример: 105^2. У этого числа 10 десятков. Тогда умножаем $10 \cdot (10+1) = 110$ и добавляем $25 \Rightarrow 105^2 = 11025$.

2. Упражнение. Вычислить в уме: 115^2, 125^2, $1{,}5^2$, $3{,}5^2$, $7{,}5^2$, $9{,}5^2$, $\sqrt{20{,}25}$, $\sqrt{42{,}25}$, $\sqrt{72{,}25}$, $\sqrt{0{,}0625}$.

Третья и четвертая таблицы — указывают количество единиц в числе, которое является квадратом и кубом числа, оканчивающегося на соответствующую цифру.

Эти таблицы помогают вычислять квадратный и кубический корни. Рассмотрим $\sqrt{676}$. Сначала определим значение этого корня с точностью до десятков: т.к. $400 < 676 < 900$, то $20 < \sqrt{676} < 30$ Затем проверим что $25 < \sqrt{676}$ $(25^2 = 625 < 676)$. Теперь из третьей таблицы видно, что только одно число может претендовать на значение корня: 26. Проверим $26^2 = (25+1)^2 = 676$. Ответ: $\sqrt{676} = 26$.

Корень кубический вычисляется по такой же процедуре. Пример $\sqrt[3]{12167}$. Вычислим корень с точностью до десятков. Т.к. $20^3 = 8000 < 12167 < 27000 = 30^3$, то $20 < \sqrt[3]{12167} < 30$. Из четвертой таблицы следует, что претендовать на значение корня может только число 23. Проверим $23^3 = 23^2 \times 23 = (20+3)^2(20+3) = 529(20+3) = 10580 + 1500 + 60 + 27 = 12167$.

3. Упражнение. Вычислить в уме: $\sqrt{1369}$, $\sqrt{1936}$, $\sqrt{2809}$, $\sqrt{5929}$, $\sqrt{7921}$, $\sqrt[3]{4913}$, $\sqrt[3]{24389}$, $\sqrt[3]{50653}$, $\sqrt[3]{970299}$

Кроме этого, полезно использовать некоторые правила умножения.

Умножение на 11. При умножении двузначного числа на 11 возникает правило: между цифрами десятков и единиц надо вставить сумму этих цифр. Если сумма окажется больше 10, то в разряд сотен добавляется единица. Примеры: $14 \times 11 = 154$, $23 \times 11 = 253$, $87 \times 11 = 957$. Если речь идет об умножении, больших чисел, то удобнее представить $11 = 10 + 1$ и умножать число на десять, а затем к результату добавлять само исходное число. Примеры: $125 \times 11 = 125 \times (10 + 1) = 1250 + 125 = 1375$, $223 \times 11 = 223 \times (10 + 1) = 2230 + 223 = 2453$.

4. Упражнение. Вычислить в уме: 27×11, 34×11, 55×11, 69×11, 73×11, 120×11, 157×11, 3274×11.

Умножение на 9. При умножении на 9 удобно представить $9 = 10 - 1$, т.е. умножать данное число на 10 и вычитать само число. Примеры: $125 \times 9 = 125 \times (10 - 1) = 1250 - 125 = 1125$, $223 \times 9 = 223 \times (10 - 1) = 2230 - 223 = 2007$.

5. Упражнение. Вычислить в уме: 26×9, 37×9, 55×9, 89×9, 93×9, 122×9, 247×9, 4357×11.

Умножение на 15. При умножении на 15 сначала умножаем на 10, а затем к полученному результату добавляем половину от этого результата, что соответствует представлению $15 = 10 + 5$. Примеры: $125 \times 15 = 125 \times (10 + 5) = 1250 + \frac{1250}{2} = 1250 + 625 = 1875$, $223 \times 15 = 223 \times (10 + 5) = 2230 + \frac{2230}{2} = 2230 + 1115 = 3345$.

6. Упражнение. Вычислить в уме: 29×15, 37×15, 58×15, 63×15, 79×15, 121×15, 177×15, 3171×15.

Умножение с использованием среднего значения. Если среднее арифметическое двух целых множителей тоже целое число, то для вычисления произведения удобно воспользоваться этим средним значением и формулой сокращенного умножения. Примеры: $12 \times 14 = (13-1) \cdot (13+1) = 13^2 - 1 = 169 - 1 = 168$; $17 \times 27 = (22 - 5) \cdot (22 + 5) = 22^2 - 25 = (20 + 2)^2 - 25 = 484 - 25 = 439$; $47 \times 53 = (50 - 3) \cdot (50 + 3) = 50^2 - 9 = 2500 - 9 = 2491$.

7. Упражнение. Вычислить в уме: 29×19, 34×36, 55×59, 69×71, 73×77, 120×130, 157×161, 3274×3326.

Возведение в квадрат двузначных (иногда и трехзначных) чисел удобно проводить по формулам сокращенного умножения:

$21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$

$32^2 = (30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1024$

$43^2 = (40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$

$54^2 = (55 - 1)^2 = 55^2 - 2 \cdot 55 \cdot 1 + 1^2 = 3025 - 110 + 1 = 2916$

$56^2 = (55 + 1)^2 = 55^2 + 2 \cdot 55 \cdot 1 + 1^2 = 3025 + 110 + 1 = 3136$

$67^2 = (65 + 2)^2 = 65^2 + 2 \cdot 65 \cdot 2 + 2^2 = 4225 + 260 + 4 = 4489$

$78^2 = (75 + 3)^2 = 75^2 + 2 \cdot 75 \cdot 3 + 3^2 = 5625 + 450 + 9 = 6084$

$89^2 = (90 - 1)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 1 + 1^2 = 8100 - 180 + 1 = 7921$

Упражнение. Вычислить в уме: 29^2, 34^2, 55^2, 69^2, 73^2, 121^2, 157^2, 3274^2.

Приближенные вычисления

Как оценить число $\sqrt{17}$? Легко вычислить $\sqrt{16}$, значит первая оценка $\sqrt{17} \approx 4$. Следующая, более точная оценка, может быть сделана с помощью производной функции $y = \sqrt{x}$. В общем случае, значение функции в точке x, «близкой» к точке x_0, в которой значение функции известно, определяется формулой:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ (1)

Эта формула в приведенном примере дает следующий результат:

$\sqrt{17} \approx \sqrt{16} + \frac{17-16}{2\sqrt{16}} = 4 + \frac{1}{8} = 4,125$

Задания 3-го тура школы-олимпиады по механике:

1. Используя формулу (1) при $\alpha \ll 1$ Получите простые оценки для значений следующих функций:
$\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \approx 1-2\alpha$, $(1+\alpha)^n \approx 1+n\alpha$

2. Получите,используя табличные значения тригонометрических функций и формулы тригонометрии, числовые оценки для следующих значений тригонометрических функций: $\sin\frac{\pi}{18}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$

3. Вдоль окружности цирковой арены (которая, как известно, имеет диаметр 13 метров) против часовой стрелки бегают болонка и пудель. Болонка делает полный круг на 10 секунд медленней пуделя и поэтому совершает в минуту на 3 круга меньше. В начальный момент собаки находятся в одной точке. а) Чему равно расстояние между ними через 6 секунд? б) Если в начальный момент времени собачек "связать"резинкой длиной 11,5 метров, натянется ли резинка через 6 секунд? в) А если длина резинки равна 10,5 метров?

4. Сухогруз вышел из порта А и двинулся строго на запад со скоростью 10 узлов (1 узел = 1 морская миля в час). Через 10 часов он сменил направление на северное и прибыл в порт Б еще через 10 часов. На следующий день он вышел из порта Б с той же скоростью в юго-восточном направлении, одновременно с ним из порта А на юго-запад вышел катер со скоростью 20 узлов. Найти минимальное расстояние между сухогрузом и катером. Ответ записать в милях, округлив до ближайшего целого.

5. По реке с постоянными скоростями плывут два катера, каждый строго по своей прямой линии. В некоторый момент времени первый из них оказался в точке A, а второй — в точке B. Причем направление течения реки в этот момент времени составило угол 60° к направлению $\overrightarrow{AB}$. Через некоторое время катера встретились в точке C. Оказалось, что треугольник ABC равнобедненный прямоугольный с вершиной в точке A. Найдите минимальное отношение собственной скорости второго катера к скорости реки, при котором это осуществимо. Ответ выразите виде дестятичной дроби и округлите до сотых долей.