Вступительный экзамен для поступающих в магистратуру механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям “Математика”, “Математика и компьютерные науки”

Вариант 1 (12.07.2012)

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2-x-2}$.

2. Вычислите интеграл $\int \sin x \cdot \ln|\cos x|\,dx$.

3. Найдите определитель матрицы $A = (a_{ij})$ размером $n \times n$, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } i = j, \\ 1, & \text{если } |i-j| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   В случае затруднения решите задачу хотя бы при $n = 7$.

4. Уравнение $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x = 1$ задает кривую на плоскости с декартовыми координатами (x, y). Найдите угол между двумя различными касательными, проведенными к этой кривой из точки с координатами $(-1, 2)$.

5. Функции $y_1(t) = e^{-2t} \cdot \cos t$ и $y_2(t) = t^3 + 2$ — решения уравнения

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = f(t), \quad a, b, f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}).$$

   Найдите решение y, удовлетворяющее условию $y(0) = 3$. Сколько существует решений, удовлетворяющих этому условию и определенных на всей числовой прямой?

Вступительный экзамен для поступающих в магистратуру механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям “Математика”, “Математика и компьютерные науки”

Вариант 2 (12.07.2012)

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2-5x+6}$.

2. Вычислите интеграл $\int \cos x \cdot \ln|\sin x|\,dx$.

3. Найдите определитель матрицы $A = (a_{ij})$ размером $2n \times 2n$, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } i = j, \\ 1, & \text{если } i+j = 2n+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   В случае затруднения решите задачу хотя бы при $n = 3$.

4. Уравнение $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x = 3$ задает кривую на плоскости с декартовыми координатами (x, y). Найдите угол между двумя различными касательными, проведенными к этой кривой из точки с координатами $(0, 1)$.

5. Функции $y_1(t) = 2e^{-3t}$ и $y_2(t) = t^2 \cdot \sin t + 1$ — решения уравнения

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = f(t), \quad a, b, f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}).$$

   Найдите решение y, удовлетворяющее условию $y(0) = 3$. Сколько существует решений, удовлетворяющих этому условию и определенных на всей числовой прямой?

Вариант 1 (решения)

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2-x-2}$.

   Решение. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x-1}=\frac{2\cdot 2}{(2^2-3)(2\cdot 2-1)}=\frac{4}{3}.$$

   Ответ: 4/3.

2. Вычислите интеграл $\int \sin x\ln|\cos x|\,dx$.

   Решение. Интегрируя по частям, находим

$$-\int \ln|\cos x|\,d\cos x=-\cos x\ln|\cos x|+\int \cos x\frac{1}{\cos x}\,d\cos x=-\cos x\ln|\cos x|+\cos x+c.$$

   Ответ: $-\cos x\ln|\cos x|+\cos x+c$.

3. Найдите определитель матрицы $A=(a_{ij})$ размером $n\times n$, у которой

$$a_{ij}=\begin{cases}2, & i=j,\\ 1, & |i-j|=1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

   Решение.

   Разлагая по первой строке, получим

$$d(n)=\begin{vmatrix}2&1&\dots&0&0&0\\ 1&2&\dots&0&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&\dots&2&1&0\\ 0&0&\dots&1&2&1\\ 0&0&\dots&0&1&2\end{vmatrix}=2d(n-1)-d(n-2).$$

   В результате имеем: $d(1)=2, d(2)=3, ..., d(n)=n+1$. Из рекуррентного соотношения доказываем, что $d(n)=n+1$ индукцией по n. В частности, $d(7)=8$.

   Ответ: $n+1$.

4. Уравнение $4x^2+4xy+y^2-2x=1$ задает кривую на плоскости с декартовыми координатами (x,y). Найдите угол между двумя различными касательными, проведенными к этой кривой из точки с координатами $(-1,2)$.

   Решение.

   Для кривой, заданной уравнением $F(x,y)=0$, вектор $\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)\big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$ перпендикулярен касательной в точке (x_0,y_0). Поэтому точка касания (x_0,y_0) для касательной, проведенной из точки $(-1,2)$, удовлетворяет следующему условию: вектор $(x_0,y_0)-(-1,2)$ перпендикулярен вектору $\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)\big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$, где $F(x,y)=4x^2+4xy+y^2-2x-1$. Записывая это условие через скалярное произведение, получаем

$$\begin{aligned}&(x_0+1)\tfrac{\partial F}{\partial x}\big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}+(y_0-2)\tfrac{\partial F}{\partial y}\big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}=0 \iff\\ \iff\ &(x_0+1)(8x_0+4y_0-2)+(y_0-2)(4x_0+2y_0)=0 \iff\\ \iff\ &8x_0^2+8x_0y_0+2y_0^2-2x_0-2=0\end{aligned}$$

   Добавляя к полученному уравнению условие $F(x_0,y_0)=0$, получаем систему

$$\begin{cases}8x_0^2+8x_0y_0+2y_0^2-2x_0-2=0\\ 4x_0^2+4x_0y_0+y_0^2-2x_0-1=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_0=0\\ 4x_0^2+4x_0y_0+y_0^2-2x_0-1=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_0=0\\ y_0^2=1\end{cases}$$

Таким образом, из точки $(-1, 2)$ можно провести ровно две касательные к рассматриваемой кривой, причем соответствующие точки касания — это $(0, -1)$ и $(0, 1)$. Угол α между этими касательными равен углу между векторами $\mathbf{a} = (0, -1) - (-1, 2) = (1, -3)$ и $\mathbf{b} = (0, 1) - (-1, 2) = (1, -1)$. Вычисляем его косинус через скалярные произведения:

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

5. Функции $y_1(t) = e^{-2t} \cdot \cos t$ и $y_2(t) = t^3 + 2$ — решения уравнения

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = f(t), \quad a, b, f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}).$$

Найдите решение y, удовлетворяющее условию $y(0) = 3$. Сколько существует решений, удовлетворяющих этому условию и определенных на всей числовой прямой?

Решение. Искомое решение может быть найдено в виде $y = y_1 + c(y_2 - y_1)$ из условия

$$3 = y(0) = y_1(0) + c(y_2(0) - y_1(0)) = 1 + c(2 - 1) \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow y = 2y_2 - y_1.$$

Таких решений бесконечно много (по теореме существования и единственности, поскольку для полного определения решения достаточно еще произвольно задать $\dot{y}(0)$), причем все они определены на всей прямой (решения линейного уравнения продолжаются на весь интервал непрерывности его коэффициентов).

Ответ: $y = 2t^3 + 4 - e^{-2t} \cdot \cos t$. Бесконечно много.

Вариант 2 (решения)

1. Найдите предел $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2-5x+6}$.

Решение. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x - 5} = \frac{2 \cdot 2}{(2^2 - 3)(2 \cdot 2 - 5)} = -4.$$

Ответ: -4.

2. Вычислите интеграл $\int \cos x \cdot \ln|\sin x| \, dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\int \ln|\sin x| \, d\sin x = \sin x \ln|\sin x| - \int \sin x \frac{1}{\sin x} \, d\sin x = \sin x \ln|\sin x| - \sin x + c.$$

Ответ: $\sin x \ln|\sin x| - \sin x + c$.

3. Найдите определитель матрицы $A = (a_{ij})$ размером $2n \times 2n$, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ 1, & i + j = 2n + 1, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Решение. Вычитая для каждого $i = 1, \ldots, n$ строку с номером i, умноженную на $1/2$, из строки с номером $2n - i + 1$, мы получим верхнюю треугольную матрицу, у которой на диагонали будут стоят сначала n чисел 2, а в конце — n чисел $1,5$. Таким образом, определитель искомой матрицы есть произведение всех чисел на диагонали, т. е. 3^n.

Ответ: 3^n.

4. Уравнение $x^2+4xy+4y^2-2x=3$ задает кривую на плоскости с декартовыми координатами (x,y). Найдите угол между двумя различными касательными, проведенными к этой кривой из точки с координатами $(0,1)$.

Решение.

Для кривой, заданной уравнением $F(x,y)=0$, вектор $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$ перпендикулярен касательной в точке (x_0,y_0). Поэтому точка касания (x_0,y_0) для касательной, проведенной из точки $(-1,2)$, удовлетворяет следующему условию: вектор $(x_0,y_0)-(0,1)$ перпендикулярен вектору $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$, где $F(x,y)=x^2+4xy+4y^2-2x-3$. Записывая это условие через скалярное произведение, получаем

$$\begin{aligned}
&x_0\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}+(y_0-1)\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}=0 \iff\\
\iff\ & x_0(2x_0+4y_0-2)+(y_0-1)(4x_0+8y_0)=0 \iff\\
\iff\ & 2x_0^2+8x_0y_0+8y_0^2-6x_0-8y_0=0
\end{aligned}$$

Добавляя к полученному уравнению условие $F(x_0,y_0)=0$, получаем систему

$$\begin{cases} 2x_0^2+8x_0y_0+8y_0^2-6x_0-8y_0=0\\ x_0^2+4x_0y_0+4y_0^2-2x_0-3=0\end{cases} \iff \begin{cases} -2x_0-8y_0+6=0\\ x_0^2+4x_0y_0+4y_0^2-2x_0-3=0\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x_0=3;\ y_0=0\\ x_0=-1;\ y_0=1\end{array}\right.$$

Таким образом, из точки $(0,1)$ можно провести ровно две касательные к рассматриваемой кривой, причем соответствующие точки касания — это $(3,0)$ и $(-1,1)$. Угол α между этими касательными равен углу между векторами $\mathbf{a}=(3,0)-(0,1)=(3,-1)$ и $\mathbf{b}=(-1,1)-(0,1)=(-1,0)$. Вычисляем его косинус через скалярные произведения:

$$\cos\alpha=\frac{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{3\cdot(-1)+(-1)\cdot 0}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+0^2}}=\frac{-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{1}}=\frac{-3}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{-3}{\sqrt{10}}$.

5. Функции $y_1(t)=2e^{-3t}$ и $y_2(t)=t^2\cdot\sin t+1$ — решения уравнения

$$\ddot{y}+a(t)\dot{y}+b(t)y=f(t),\quad a,b,f\in \mathrm{C}(\mathbb{R}).$$

Найдите решение y, удовлетворяющее условию $y(0)=3$. Сколько существует решений, удовлетворяющих этому условию и определенных на всей числовой прямой?

Решение. Искомое решение может быть найдено в виде $y=y_1+c(y_2-y_1)$ из условия

$$3=y(0)=y_1(0)+c(y_2(0)-y_1(0))=1+c(2-1)\Longrightarrow c=2\Longrightarrow y=2y_2-y_1.$$

Таких решений бесконечно много (по теореме существования и единственности, поскольку для полного определения решения достаточно еще произвольно задать $\dot{y}(0)$), причем все они определены на всей прямой (решения линейного уравнения продолжаются на весь интервал непрерывности его коэффициентов).

Ответ: $y=2t^3+4-e^{-2t}\cdot\cos t$. Бесконечно много.