

Вариант 911

1. Вдоль окружности цирковой арены (которая, как известно, имеет диаметр 13 метров) против часовой стрелки бегают болонка и пудель. Болонка делает полный круг на 10 секунд медленней пуделя и поэтому совершает в минуту на 3 круга меньше. В начальный момент собаки находятся в одной точке. а) Чему равно расстояние между ними через 6 секунд? б) Если в начальный момент времени собачек "связать" резинкой длиной 11,5 метров, натянется ли резинка через 6 секунд? в) А если длина резинки равна 10,5 метров?

2. Шарик массой $m = 10$ г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой $|F| = 10^{-3}v^2$, где v — значение модуля скорости точки в метрах в секунду. Вычислите приближенно, за какое время точка пройдет первый сантиметр и первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

3. Планета радиуса R с расстояния h от ее поверхности видна под некоторым плоским углом. На какое расстояние надо приблизиться наблюдателю к планете, чтобы этот угол увеличился вдвое? Имеет ли задача решение, если $h/R = \log_2 6$?

4. Прямая призма, изготовленная из однородного материала, основанием которой является неравносторонняя трапеция, лежит одной из своих боковых граней на гладкой поверхности. Объясните, как с помощью циркуля и линейки найти такую точку основания призмы, чтобы под действием силы, приложенной в этой точке перпендикулярно основанию, призма двигалась поступательно.

5. По реке с постоянными скоростями плывут два катера, каждый строго по своей прямой линии. В некоторый момент времени первый из них оказался в точке A , а второй — в точке B . Причем направление течения реки в этот момент времени составило угол 60° к направлению \overrightarrow{AB} . Через некоторое время катера встретились в точке C . Оказалось, что треугольник ABC равнобедренный прямоугольный с вершиной в точке A . Найдите минимальное отношение собственной скорости второго катера к скорости реки, при котором это осуществимо. Ответ выразите в виде десятичной дроби и округлите до сотых долей.

6. Две точки движутся по одной окружности без трения по инерции, сталкиваясь друг с другом и испытывая при столкновении абсолютно упругий удар. Найдите все возможные значения отношений масс этих точек, если их скорости относятся как $4 : 3$ и известно, что сталкиваются они в одной и той же точке на окружности. При каких значениях отношения скоростей задача определения отношения масс имеет хотя бы одно решение?

11 апреля 2009 года

1. Гаврила решил взвесить баскетбольный мяч, однако у него в распоряжении были только гири массой 400 г, длинная легкая линейка, на концах которой стерлись деления, карандаш и много невесомых ниток. Он подвесил к одному концу линейки мяч, а к другому — гирю, и уравновесил линейку на карандаше. Далее он прикрепил вторую гирю вместе с первой и для восстановления равновесия ему пришлось сдвинуть карандаш на 9 см. Когда к первым двум гирям была прикреплена третья, а карандаш передвинут еще на 5 см, опять возникло равновесие. Найдите массу мяча, как это сделал Гаврила.

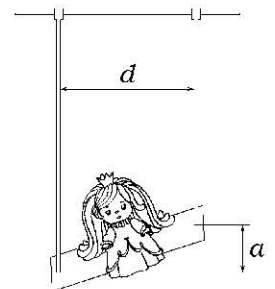
2. Крышка вертикального колодца глубиной 10 м периодически мгновенно открывается и закрывается так, что колодец находится в открытом состоянии одну секунду и в закрытом состоянии тоже одну секунду. Камень подброшен со дна колодца вертикально вверх с начальной скоростью V ровно за 0,5 секунды до очередного открытия крышки. При каких значениях начальной скорости V камень свободно вылетит из колодца и упадет обратно на крышку колодца? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 .

3. При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны названия осей координат на этих диаграммах. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_1 = 16^\circ\text{C}$, $t_2 = 51^\circ\text{C}$. Ученые смогли восстановить названия осей и значения температуры газа во всех вершинах четырехугольников. Изобразите этот процесс на PV диаграмме и укажите значения температуры газа во всех вершинах.

4. Астроном обнаружил, что длины интервалов времени в годах между моментами появления кометы 2011Y в окрестности планеты 12IV1961 являются последовательными членами убывающей геометрической прогрессии. При этом три последних интервала являются корнями кубического уравнения $t^3 - ct^2 + 350t - 1000 = 0$, где c — некоторая константа. Какова будет продолжительность интервала до следующего появления кометы?

5. Маленький шарик массы m висит на пружине жесткости K над глубоким аквариумом, касаясь поверхности воды. Шарик толкают в сторону поверхности воды с небольшой скоростью v . Определите период колебаний шарика. Сопротивлением воды и потерями энергии при ударе пренебречь. Плотности воды и шарика равны ρ_0 и ρ соответственно.

6. Младшая сестра попросила студента мехмата Гаврилу починить качели во дворе. После ремонта они стали представлять собой плоскую доску (сиденье), жестко приделанную к двум параллельным стержням, расстояние между которыми равно d . Стержни закреплены на горизонтальной оси в цилиндрическом шарнире, то есть могут вращаться относительно этой оси. Один из стержней оказался короче другого на a . При этом нормаль к сиденью лежит в одной плоскости со стержнями. Сестра посадила на качели свою любимую куклу, которая держаться за стержни не может, а удерживается на сиденье только силой сухого трения с коэффициентом μ . На какой угол можно отклонить качели от вертикали, чтобы кукла не соскользнула с сиденья?



Олимпиада школьников Ломоносов–2012 по механике

Вариант 121

1. Мотоциклист и велосипедист равномерно передвигаются по двум находящимся на плоскости пересекающимся прямолинейным трассам: каждый по своей. В 12:00 мотоциклист, велосипедист и точка пересечения трасс находились в различных вершинах правильного треугольника. В 13:00 мотоциклист, движущийся со скоростью 70 км/ч, пересёк вторую трассу. Велосипедист пересёк первую трассу в 14:00. Найдите все моменты времени от 07:00 до 18:00, когда расстояние между спортсменами равно 245 км.

2. Наблюдения, проводимые с МКС за движением системы двух шарообразных различного радиуса астероидов, показали следующие результаты. В системе координат, связанной с большим астероидом, малый вращается по круговой орбите на расстоянии от поверхности большого астероида, равном его (большого астероида) радиусу. Кроме этого выяснилось, что за земные сутки было совершено 6 полных оборотов малого астероида. Используя эти данные, приближенно вычислите плотность большого астероида. Считайте гравитационную постоянную приблизительно равной $2\pi \cdot 10^{-11} \text{ кг}^{-1} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$. Влиянием малого астероида на движение большого пренебречь.

3. Тепловая машина «Ломоносов», рабочим телом в которой является идеальный газ, работает по следующему циклу. Из состояния 1 газ изохорически нагревается до состояния 2, адиабатически расширяется до состояния 3, в котором давление такое же, как и в состоянии 1. После этого происходит изохорическое понижение давления до состояния 4, из которого цикл замыкается адиабатическим сжатием. КПД этой машины η_0 . КПД машины «Авогадро», работающей по циклу 1-2-3-1, отличается от КПД машины «Ломоносов» на $\alpha\%$. Определите КПД машины «Больцман», работающей по циклу 1-3-4-1. При каких допустимых значениях α машина «Ломоносов» имеет наибольший КПД среди перечисленных машин?

4. К шарниру, жестко закрепленному в начале системы координат OXY , привязаны три троса. В 11:00 все они были направлены вдоль оси OX , а затем их направления изменяются со временем t и составляют с положительным направлением оси OX углы $3\pi t/8$, $5\pi t/8$ и $7\pi t/8$ соответственно, откладываемые против часовой стрелки (t — время, которое измеряется в часах и отсчитывается от 11:00). К каждому из тросов приложена растягивающая сила величиной 1 Н. Через какое-то время ученый измерил значения проекций этих трех сил на ось OY . Этот набор из трех чисел оказался таким же, как у другого ученого, который в этот же момент измерял проекции сил на ось OX . Определите все моменты времени с 12:00 до 14:00 того же дня, когда это могло произойти.

5. Материальная точка начинает тормозить, двигаясь по прямой, и останавливается, пройдя некоторое расстояние. При этом скорость является линейной функцией координаты. Половина тормозного пути была пройдена за время τ . За какое время пройдено $3/4$ тормозного пути?

6. Точечная цель движется по прямой по закону $x(t) = 1,2t - 0,064t^3$, где t — время в секундах ($t \geq 0$), $x(t)$ — координата цели, ось x направлена вправо. Снайпер видит цель, только когда она находится правее точки $x = 1$. Успеет ли он её поразить, если на прицеливание и выстрел у него уходит 2,5 секунды?