КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ К ЭКЗАМЕНУ[1]

1. Вычислите значения приведенных ниже форм ω в $\mathbb{R}^n$ на указанных наборах векторов:

a) $\omega = x^2 dx^1$ на векторе $\xi = (1,2,3) \in T\mathbb{R}^3_{(1,2,3)}$;

b) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^4$ на упорядоченной паре векторов $\xi_1, \xi_2 \in T\mathbb{R}^4_{(1,0,0,0)}$. (Полагаем $\xi_1 = (\xi_1^1, ..., \xi_1^4)$, $\xi_2 = (\xi_2^1, ..., \xi_2^4)$.)

2. Пусть $f^1, ..., f^n$ — гладкие функции аргумента $x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$. Выразите форму $df^1 \wedge ... \wedge df^n$ в терминах форм $dx^1, ..., dx^n$.

3. В области $D \subset \mathbb{R}^3$ действует векторное поле сил F. Рассчитываем работу, необходимую для перемещения в этом поле из точки $a \in D$ в точку $b \in D$ вдоль гладкого пути $\gamma \subset D$.

a) Напишите формулу для подсчета этой работы в виде интеграла первого и второго рода (т.е. в терминах ds и dx, dy, dz соответственно).

b) Проверьте, что в гравитационном поле F эта работа не зависит от пути и равна ...?

4. a) В области $D \subset \mathbb{R}^3$ имеется векторное поле V (например, поле скорости некоторого течения). Напишите формулу для подсчета потока векторного поля V через ориентированную поверхность $S = S^2_+ \subset D$ в виде интеграла первого и второго рода (т.е. в терминах $d\sigma$ и $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ соответственно).

b) Взят выпуклый многогранник $D \subset \mathbb{R}^3$. На каждой его грани построен вектор, направленный вдоль внешней нормали и по величине равный площади соответствующей грани. Физика говорит, что сумма этих векторов равна нулю (иначе построим вечный двигатель). Математика дает то же. Покажите это.

c) Прямым расчетом выведите закон Архимеда (подсчитайте выталкивающую силу, действующую на тело, погруженное, например, в наполненную водой ванну, как результирующую давления на поверхность тела).

[1] Взамен отсутствующего в четвертом семестре коллоквиума по математическому анализу и для контроля-самоконтроля уровня освоения начальных представлений о дифференциальных формах, их интегрировании и применении.