V ОЛИМПИАДА
по "экстремальным задачам"
21 апреля 2014 г.

РЕЗУЛЬТАТЫ

ДИПЛОМ I СТЕПЕНИ

Мокин В. Б. 410 гр. 40 (10 10 10 10)
Почеревин Р. В. 301 гр. 35 (10 5 10 10)

ДИПЛОМ II СТЕПЕНИ

—

ДИПЛОМ III СТЕПЕНИ

Киселев К. А. 206 гр. 17 (2 5 0 10)

РЕШЕНИЯ

1. Задача. (Протасов) Найти наименьшее положительное решение уравнения $\sin x = \{\operatorname{tg} x\}$, где $\{t\} = t - [t]$ – дробная часть числа t.

Решение. $\operatorname{tg} x > \sin x$ на $(0, \frac{\pi}{2})$. $\sin x + 1 = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \sin x \cos x = \sin x - \cos x \Leftrightarrow \sin^2 2x + 4 \sin 2x - 4 = 0$

2.Задача. (Локуциевский) На плоскости $\mathbb{R}^2$ даны $n \geq 1$ различных прямых $l_1, ..., l_n$ и две различные точки A иB, не принадлежащие этим прямым. Выберем n точек $x_k \in l_k$ по одной на каждой прямой и определим $f(x_1, ..., x_n)$, как длину ломаной $Ax_1x_2...x_nB$. Доказать что функция f достигает своего инфимума. Верно ли, что f имеет ровно один локальный минимум? Если нет, то как их искать (с помощью циркуля и линейки)?

Решение. f - непрерывна и неограничено возрастает при $\|x_i\| \to \infty$. f достигает своего инфимума. Точка минимума не единственна. Пусть A_1 и B_1 - отражение A и B относительно l_1 и l_3 соответственно. $A_1, B_1 \in l_2$. Точка x_2 не единственна.

3.Задача. (Протасов) На единичном квадрате $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ задана функция $f(x, y) = xy$. Среди всех аффинных функций $\varphi(x, y) = ax + by + c$ найти ближайшую к f в метрике $C(I)$ (т.е., найти функцию φ, для которой расстояние $\|f - \varphi\|_{C(I)} = \max_{(x,y) \in I} |f(x, y) - \varphi(x, y)|$ наименьшее).

Решение. $\|f-\varphi\|_{C(I)} = \|(x-a)(y-b)+ab-c|_{C(I)} = \frac{1}{4}$ при $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}$

4. Задача. (Осипенко) При всех $\delta > 0$ найти

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k \to \max, \quad 0 \le x_k \le \delta, \quad k=1,2,\ldots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^4 x_k \le 1.$$

Решение. Максимум досигается при $x_k = \delta$ для $k < i$ и $x_i = \alpha$ удовлетворяющие условию : $\quad \sum_{k=1}^{i} k^4 x_k = 1.$