

ОПЕРАТОРЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

(Основные штрихи)

Математический анализ, четвертый семестр, 2012/13 уч. год

Лектор профессор В.А.Зорич

СОДЕРЖАНИЕ

I. Напоминания из алгебры и геометрии

1. Билинейная форма и её координатное представление.
 - a. Скалярное произведение и общая билинейная форма.
 - b. Невырожденность билинейной формы.
2. Соответствие вектор — форма.
 - a. Соответствие вектор — 1-форма в присутствии 2-формы.
 - b. Соответствие вектор — $(n - 1)$ -форма.
3. Криволинейные координаты и метрика.
 - a. Криволинейные координаты, метрика и форма объёма.
 - b. Ортогональные системы криволинейных координат и орты.
 - c. Декартовы, цилиндрические и сферические координаты.

II. Операторы grad, rot, div в криволинейных координатах

0. Дифференциал формы и операторы grad, rot, div.
1. Градиент функции и его координатное представление.
 - a. Координатная запись соответствия вектор — 1-форма.
 - b. Дифференциал функции и градиент.
 - c. Градиент в цилиндрических и сферических координатах.
2. Дивергенция и её координатное представление.
 - a. Координатная запись соответствия вектор — $(n - 1)$ -форма.
 - b. Дифференциал формы потока и дивергенция поля скорости.
 - c. Дивергенция в цилиндрических и сферических координатах.
3. Ротор векторного поля и его координатное представление.
 - a. Соответствие векторное поле A — векторное поле $B = \text{rot } A$.
 - b. Координатная запись соответствия A и $B = \text{rot } A$.
 - c. Ротор в цилиндрических и сферических координатах.

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Почти в любом задачнике и даже учебнике математического анализа попросту говорится примерно следующее. "Запомните, дети":
Градиентом функции $U(x, y, z)$ называется вектор

$$\text{grad } U := \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

Ротором векторного поля $A = (P, Q, R)(x, y, z)$ называется вектор

$$\text{rot } A := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Дивергенцией векторного поля $B = (P, Q, R)(x, y, z)$ называется функция

$$\text{div } B := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

То, что это верно только в декартовых координатах, а также, как и что надо делать, если система координат иная, обычно не обсуждается. Это и понятно, потому что сама постановка такого вопроса уже требует какого-то адекватного определения этих объектов.

I. Напоминания из алгебры и геометрии

1. Билинейная форма и её координатное представление.

а. Скалярное произведение и общая билинейная форма.

Нам предстоит рассматривать векторное пространство со скалярным произведением \langle, \rangle . Пока можно считать, что \langle, \rangle — обозначение произвольной билинейной формы на n -мерном векторном пространстве X . Если в пространстве выбран базис ξ_1, \dots, ξ_n , то объекты пространства (в частности, векторы и формы) приобретают координатное представление. Напомним это применительно к билинейной форме \langle, \rangle .

Взяв два вектора $x = x^i \xi_i$, $y = y^j \xi_j$ в их разложении по выбранному базису, имеем $\langle x, y \rangle = \langle x^i \xi_i, y^j \xi_j \rangle = \langle \xi_i, \xi_j \rangle x^i y^j = g_{ij} x^i y^j$. Здесь, как обычно, всюду подразумевается суммирование по повторяющемуся сверху и снизу индексу. Итак, при заданном базисе пространства набор величин $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = g_{ij}$ полностью определяет билинейную форму.

Если форма — скалярное произведение, то базис считается ортогональным, если $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Конечно, тут обычно предполагается невырожденность формы.

в. Невырожденность билинейной формы.

Билинейная форма \langle, \rangle называется невырожденной, если она тождественно равна нулю относительно одного из аргументов при фиксированном значении другого лишь в том случае, когда фиксированный аргумент равен нулю (является нулевым вектором).

Невырожденность формы равносильна тому, что определитель матрицы (g_{ij}) отличен от нуля. Действительно, если фиксированный вектор $x = x^i \xi_i$ таков, что $\langle x, y \rangle \equiv 0$ относительно y , то $\langle \xi_i, \xi_j \rangle x^i = 0$ и $g_{ij} x^i = 0$ при любом значении $j \in \{1, \dots, n\}$. Эта однородная система уравнений имеет единственное (нулевое) решение в точности тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы (g_{ij}) системы.

2. Соответствие вектор — форма.

а. Соответствие вектор — 1-форма в присутствии 2-формы.

В присутствии 2-формы \langle, \rangle каждому вектору A можно сопоставить 1-форму — линейную функцию $\langle A, x \rangle$. Если форма \langle, \rangle невырождена, то такое соответствие взаимно однозначно. Действительно, если дана какая-то линейная функция $a(x) = a_j x^j$ (где $a_j = a(\xi_j)$) и мы хотим её представить в виде $\langle A, x \rangle$, где $A = A^i \xi_i$, то на координаты вектора A возникает система уравнений $a(\xi_j) = \langle \xi_i, \xi_j \rangle A^i$, $j \in \{1, \dots, n\}$, которая однозначно разрешима, если определитель матрицы (g_{ij}) отличен от нуля.

Итак, координаты вектора $A = A^i \xi_i$ и коэффициенты 1-формы a в том же базисе $\{\xi_i\}$ связаны взаимно обратными соотношениями

$$a_j = g_{ij} A^i \quad A^i = g^{ij} a_j .$$

б. Соответствие вектор — $(n - 1)$ -форма.

Аналогично, в присутствии невырожденной n -формы Ω каждому вектору B можно сопоставить $(n - 1)$ -форму $\Omega(B, \dots)$.

Ниже мы будем иметь дело с векторными полями A , B и осуществлять описанные процедуры в касательном пространстве, например, применительно к форме работы $\omega_A^1 = \langle A, \cdot \rangle$ и форме потока $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, \dots)$, в присутствии скалярного произведения \langle, \rangle и формы объёма Ω^n соответственно.

3. Криволинейные координаты и метрика.

а. Криволинейные координаты, метрика и форма объёма.

Пусть на n -мерной поверхности (многообразии) имеется метрика, которая в каких-то локальных координатах (t^1, \dots, t^n) (в локальной карте) задаётся формой $g_{ij}(t)dt^i dt^j$, определяющей скалярное произведение $\langle, \rangle(t)$ в соответствующей параметру t касательной плоскости (касательном пространстве) к поверхности.

Например, если заданная в параметрическом виде поверхность (или кривая) вложена в евклидово пространство, то скалярное произведение в касательных плоскостях (пространствах) к поверхности естественным образом индуцируется из объемлющего пространства.

Мы даже знаем, как находить площадь (n -меру) такой поверхности, — надо интегрировать форму объёма

$$\Omega^n = \sqrt{\det g_{ij}(t)} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n.$$

б. Ортогональные системы криволинейных координат и орты.

Напомним, что система криволинейных координат (t^1, \dots, t^n) называется ортогональной, если $g_{ij}(t) \equiv 0$ при $i \neq j$.

Элемент длины в ортогональных системах криволинейных координат записывается особенно просто

$$ds^2 = g_{11}(t)(dt^1)^2 + \dots + g_{nn}(t)(dt^n)^2,$$

что часто переписывают в более компактных обозначениях

$$ds^2 = E_1(t)(dt^1)^2 + \dots + E_n(t)(dt^n)^2.$$

Векторы $\xi_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \xi_n = (0, \dots, 0, 1)$ координатных направлений образуют базис касательного пространства, соответствующего значению параметра t . Но нормы (длины) этих векторов, вообще говоря, не равны единице. Независимо от того, ортогональна ли система координат или нет, всегда $\langle \xi_i, \xi_i \rangle(t) = g_{ii}(t)$, т.е. $|\xi_i| = \sqrt{g_{ii}(t)}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Значит, орты (e_1, \dots, e_n) (векторы единичной длины) координатных направлений имеют следующие координатные представления

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, \dots, 0 \right), \quad \dots, \quad e_n = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{nn}}} \right).$$

В частности, если система криволинейных координат ортогональная, то ортонормированным базисом в соответствующем касательном пространстве будет следующая система векторов координатных направлений

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}, 0, \dots, 0 \right), \quad \dots, \quad e_n = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{E_n}} \right).$$

с. Декартовы, цилиндрические и сферические координаты.

Примерами ортогональных систем координат могут служить стандартные декартовы, цилиндрические и сферические координаты в \mathbb{R}^3 .

Задача. Запишите метрику $g_{ij}(t)dt^i dt^j$ в каждой из этих систем координат и выпишите ортонормированный базис (e_1, e_2, e_3) .

Ответ: В декартовых (x, y, z) , цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 квадратичная форма $g_{ij}(t)dt^i dt^j$ имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = \\ &= dR^2 + R^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

Для декартовых, цилиндрических и сферических координат тройки ортов координатных направлений имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} e_x &= (1, 0, 0), & e_y &= (0, 1, 0), & e_z &= (0, 0, 1); \\ e_r &= (1, 0, 0), & e_\varphi &= \left(0, \frac{1}{r}, 0 \right), & e_z &= (0, 0, 1); \\ e_R &= (1, 0, 0), & e_\varphi &= \left(0, \frac{1}{R \cos \theta}, 0 \right), & e_\theta &= \left(0, 0, \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

II. Операторы grad, rot, div в криволинейных координатах

0. Дифференциал формы и операторы grad, rot, div.

Дифференциал dU функции U является 1-формой. При наличии скалярного произведения \langle, \rangle , как мы знаем, 1-форме dU соответствует определённый вектор A , такой что $dU = \langle A, \cdot \rangle$. Этот вектор называется *градиентом функции U* и обозначается $\text{grad } U$.

Итак $dU = \langle \text{grad } U, \cdot \rangle$.

Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 (или на любом трёхмерном римановом многообразии) взята 1-форма $\omega_A^1 = \langle A, \cdot \rangle$, отвечающая векторному полю A . Дифференциал $d\omega_A^1$ этой формы есть 2-форма ω_B^2 , отвечающая, ввиду наличия формы объёма Ω^3 , некоторому векторному полю B (т.е. $\omega_B^2 = \Omega^3(B, \cdot, \cdot)$). Тогда поле B называется *ротором векторного поля A* и обозначается $\text{rot } A$.

Итак, $d\omega_A^1 = \omega_{\text{rot } A}^2$.

Если на n -мерной поверхности (например, на \mathbb{R}^n) имеется форма объёма Ω^n , то определена $(n-1)$ -форма потока векторного поля B , а именно, форма $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, \cdot, \dots)$. Дифференциал $d\omega_B^{n-1}$ этой функции $(n-1)$ -формы является n -формой, которая, следовательно, имеет вид $\rho\Omega^n$. Коэффициент пропорциональности — функция ρ называется *дивергенцией векторного поля B* и обозначается $\text{div } B$.

Итак, $d\omega_B^{n-1} = (\text{div } B) \Omega^n$.

1. Градиент функции и его координатное представление.

а. *Координатная запись соответствия вектор — 1-форма.*

В разделе II, 2, а мы вывели связь коэффициентов 1-формы $\omega_A^1 = \langle A, \cdot \rangle$ и координат вектора $A = A^i \xi_i$. Если вместо векторов ξ_i взять одноименные векторы e_i единичной длины, то, поскольку $\xi_i = \sqrt{g_{ii}} e_i$, координаты вектора $A = A_e^i e_i$ в базисе $\{e_i\}$ и его прежние координаты будут связаны соотношениями $A_e^i = A^i \sqrt{g_{ii}}$ при $i \in \{1, \dots, n\}$.

Значит новые формулы связи будут иметь вид

$$a_j = g_{ij} \frac{A_e^i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad \frac{A_e^i}{\sqrt{g_{ii}}} = g^{ij} a_j .$$

Эти формулы позволяют по вектору $A = A_e^i e_i$ написать соответствующую форму $\omega_A^1 = \langle A, \cdot \rangle = a_j dt^j$ и, наоборот, по 1-форме $\omega^1 = a_j dt^j$ найти отвечающий ей вектор $A = A_e^i e_i$.

Задача. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 укажите явный вид 1-формы $\omega_A^1 = \langle A, \cdot \rangle$, отвечающей вектору $A = A_e^i e_i$.

Ответ: В декартовых (x, y, z) , цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 форма ω_A^1 имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} \omega_A^1 &= A_x dx + A_y dy + A_z dz = \\ &= A_r dr + A_\varphi r d\varphi + A_z dz = \\ &= A_R dR + A_\varphi R \cos \varphi d\varphi + A_\theta R d\theta. \end{aligned}$$

б. Дифференциал функции и градиент.

Применим общие соотношения связи вектора A и формы ω_A^1 к случаю формы $dU = \langle \text{grad } U, \cdot \rangle$, чтобы найти разложение $\text{grad } U = A_e^i e_i$. Поскольку $dU = \frac{\partial U}{\partial t^j} dt^j$, т.е. $a_j = \frac{\partial U}{\partial t^j}$, то $A_e^i = g^{ij} \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial U}{\partial t^j}$.

В случае ортогональной системы криволинейных координат матрица (g_{ij}) диагональна, как и обратная к ней матрица (g^{ij}) , причём $g^{ii} = 1/g_{ii}$. Значит, в этом случае

$$\text{grad } U = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial U}{\partial t^1} e_1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{g_{nn}}} \frac{\partial U}{\partial t^n} e_n.$$

с. Градиент в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Задача. Запишите вектор $\text{grad } U = A_e^i e_i$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 .

Ответ: В декартовых (x, y, z) , цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 вектор $\text{grad } U = A_e^i e_i$ имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \frac{\partial U}{\partial x} e_x + \frac{\partial U}{\partial y} e_y + \frac{\partial U}{\partial z} e_z = \\ &= \frac{\partial U}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} e_z = \\ &= \frac{\partial U}{\partial R} e_R + \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{1}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} e_\theta. \end{aligned}$$

2. Дивергенция и её координатное представление.

а. Координатная запись соответствия вектор — $(n-1)$ -форма.

Мы знаем, что если в n -мерном векторном пространстве присутствует невырожденная n -форма Ω^n , то каждому вектору B можно взаимно однозначно сопоставить $(n-1)$ -форму $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, \dots)$. Мы хотим написать явные формулы связи координат вектора $B = B^i \xi_i$ и коэффициентов формы $\omega_B^{n-1} = b_i x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x^i} \wedge \dots \wedge x^n$, считая, что оба объекта записаны в одном базисе $\{\xi_i\}$ пространства. Здесь, как всегда, x^i — линейная функция, действие которой состоит в выделении i координаты вектора, т.е. $x^i(v) := v^i$; символ $\widehat{x^i}$ показывает, что соответствующий множитель опущен; а n -форма Ω^n в n -мерном векторном пространстве есть $x^1 \wedge \dots \wedge x^n$ или пропорциональна этой стандартной форме объёма, равной единице на наборе (ξ_1, \dots, ξ_n) базисных векторов.

Вообще, значение формы $\Omega^n = x^1 \wedge \dots \wedge x^n$ на любом наборе (v_1, \dots, v_n) векторов равно определителю матрицы (v_i^j) , составленной из координат этих векторов, поэтому, учитывая правило разложения определителя по строке, можем написать, что

$$\Omega^n(B, \dots) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} B^i x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x^i} \wedge \dots \wedge x^n.$$

Но $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, \dots)$, значит,

$$\sum_{i=1}^n b_i x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x^i} \wedge \dots \wedge x^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} B^i x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x^i} \wedge \dots \wedge x^n.$$

Следовательно, $b_i = (-1)^{i-1} B^i$ при любом значении $i \in \{1, \dots, n\}$.

Если бы в качестве Ω^n фигурировала форма $c \Omega^n = c x^1 \wedge \dots \wedge x^n$, то мы, очевидно, имели бы соотношения $b_i = (-1)^{i-1} c B^i$ при любом значении $i \in \{1, \dots, n\}$.

Напомним ещё, что при наличии в векторном пространстве скалярного произведения \langle, \rangle и фиксированного базиса $\{\xi_i\}$ возникает естественная форма объёма $\sqrt{\det g_{ij}} x^1 \wedge \dots \wedge x^n$, определяемая, как и само скалярное произведение, в данном базисе величинами $g_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$.

Наконец, напомним, что при этом векторами единичной длины (нормы) являются, вообще говоря, не векторы базиса $\{\xi_i\}$, а векторы $e_i = \xi_i / \sqrt{g_{ii}}$. Поскольку $\xi_i = \sqrt{g_{ii}} e_i$, исходное разложение вектора $B = B^i \xi_i$ в базисе $\{e_i\}$ превратится в $B = B_e^i e_i$, где $B_e^i = \sqrt{g_{ii}} B^i$.

Итак, если в пространстве есть скалярное произведение, то имеется естественная форма объёма $\Omega_g^n = \sqrt{\det g_{ij}} x^1 \wedge \dots \wedge x^n$ и если $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, \dots)$, то коэффициенты формы $\omega_B^{n-1} = b_i x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x^i} \wedge \dots \wedge x^n$ и координаты вектора B в разложении $B = B_e^i e_i$ по базисным ортам $e_i = \xi_i / \sqrt{g_{ii}}$ связаны соотношениями

$$b_i = (-1)^{i-1} \sqrt{\det g_{ij}} \frac{B_e^i}{\sqrt{g_{ii}}}.$$

В ортогональном базисе $\det g_{ij} = g_{11} \cdot \dots \cdot g_{nn}$. В этом случае

$$b_i = (-1)^{i-1} \sqrt{g_{11} \cdot \dots \cdot \widehat{g_{ii}} \cdot \dots \cdot g_{nn}} B_e^i.$$

Всё изложенное, разумеется, остаётся в силе применительно к случаю связи векторного поля $B(t)$ и дифференциальной формы $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, \dots)$, порождаемой полем посредством формы объёма.

Значит, если $\Omega_g^n = \sqrt{\det g_{ij}(t)} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n$,

$$\omega_B^{n-1} = b_i(t) dt^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \dots \wedge dt^n,$$

а $B(t) = B_e^i(t) e_i(t)$ — разложение по ортам системы криволинейных координат (t^1, \dots, t^n) , то

$$b_i = (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}} B_e^i \quad B_e^i = (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{\det g_{ij}}} b_i .$$

Если система криволинейных координат ортогональная, действует прежнее соотношение $b_i = (-1)^{i-1} \sqrt{g_{11} \cdot \dots \cdot \widehat{g_{ii}} \cdot \dots \cdot g_{nn}} B_e^i$.

В частности, для триортогональной системы криволинейных координат (t^1, t^2, t^3) , используя упоминавшиеся в самом начале обозначения $E_i = g_{ii}$, можно написать следующее координатное представление формы ω_B^2 , отвечающей вектору $B = B_e^1 e_1 + B_e^2 e_2 + B_e^3 e_3$

$$\begin{aligned} \omega_B^2 &= B_e^1 \sqrt{E_2 E_3} dt^2 \wedge dt^3 + B_e^2 \sqrt{E_3 E_1} dt^3 \wedge dt^1 + B_e^3 \sqrt{E_1 E_2} dt^1 \wedge dt^2 = \\ &= \sqrt{E_1 E_2 E_3} \left(\frac{B_e^1}{\sqrt{E_1}} dt^2 \wedge dt^3 + \frac{B_e^2}{\sqrt{E_2}} dt^3 \wedge dt^1 + \frac{B_e^3}{\sqrt{E_3}} dt^1 \wedge dt^2 \right) \end{aligned}$$

(Примите во внимание, что в трёхмерном случае 2-форму ω^2 обычно записывают не как $b_1 dt^2 \wedge dt^3 + b_2 dt^1 \wedge dt^3 + b_3 dt^1 \wedge dt^2$, а как $a_1 dt^2 \wedge dt^3 + a_2 dt^3 \wedge dt^1 + a_3 dt^1 \wedge dt^2$, например, $P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$.)

Задача. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 укажите явный вид 2-формы $\omega_B^2 = \Omega_g^3(B, \dots)$, отвечающей векторному полю $B = B_e^i e_i$.

Ответ: В декартовых (x, y, z) , цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 форма ω_B^2 имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} \omega_B^2 &= B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy = \\ &= B_r r d\varphi \wedge dz + B_\varphi dz \wedge dr + B_z r dr \wedge d\varphi = \\ &= B_R R^2 \cos \theta d\varphi \wedge d\theta + B_\varphi R d\theta \wedge dR + B_\theta R \cos \theta dR \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

б. Дифференциал формы потока и дивергенция поля скорости.

Форму $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, \dots)$ часто называют формой потока, поскольку в случае, когда B — поле скорости потока, именно эту форму приходится интегрировать (по крайней мере при $n = 3$), чтобы найти расход (поток) через поверхность.

Дифференциал формы потока ω_B^{n-1} есть n -форма, пропорциональная форме объёма. Коэффициент пропорциональности, как мы знаем, называется дивергенцией поля B .

Итак $d\omega_B^{n-1} = \operatorname{div} B \Omega_g^n$.

Мы хотим научиться по самому полю $B = B_e^i e_i$ находить его дивергенцию $\operatorname{div} B$.

Нам уже известно, как по полю $B = B_e^i e_i$ находится форма потока ω_B^{n-1} . Найдём её, вычислим её дифференциал, получим n -форму, пропорциональную форме объёма, коэффициент пропорциональности и будет дивергенцией поля B .

Реализуем это. Запишем $(n-1)$ -форму ω_B^{n-1} в общем виде

$$\omega_B^{n-1} = b_i(t) dt^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \dots \wedge dt^n,$$

найдем её дифференциал

$$d\omega_B^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial t^i} (-1)^{i-1} \right) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n,$$

выразим коэффициенты b_i формы ω_B^{n-1} через координаты B_e^i вектора $B = B_e^i e_i$

$$d\omega_B^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t^i} \left(\frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}} B_e^i \right) \right) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n,$$

сравним полученную форму с формой объёма

$$\Omega_g^n = \sqrt{\det g_{ij}}(t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n,$$

и найдём

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t^i} \left(\frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}} B_e^i \right) \right).$$

В ортогональной системе криволинейных координат эта формула принимает вид

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{\sqrt{g_{11} \dots g_{nn}}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t^i} \left(\frac{\sqrt{g_{11} \dots g_{nn}}}{\sqrt{g_{ii}}} B_e^i \right) \right).$$

с. Дивергенция в цилиндрических и сферических координатах.

Задача. Напишите формулы для вычисления дивергенции векторного поля $B = B_e^i e_i$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 .

Ответ: В декартовых (x, y, z) , цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 дивергенция $\operatorname{div} B$ векторного поля $B = B_e^i e_i$ вычисляется соответственно по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{R^2 \cos \theta} \left(\frac{\partial R^2 \cos \theta B_R}{\partial R} + \frac{\partial R B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R \cos \theta B_\theta}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

3. Ротор векторного поля и его координатное представление.

а. Соответствие векторное поле A — векторное поле $B = \operatorname{rot} A$.

Рассмотрим теперь особо трехмерный случай. Будем, как и выше, считать, что в криволинейных координатах (t^1, t^2, t^3) нам задана метрика $g_{ij}(t)dt^i dt^j$, порождающая, заодно, форму объема $\Omega_g^3 = \sqrt{\det g_{ij}(t)} dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3$.

В этом случае векторному полю $A = A_e^i e_i$ сопоставляется 1-форма ω_A^1 , а дифференциалу $d\omega_A^1$ этой формы, как 2-форме (как $(n-1)$ -форме), соответствует некоторое векторное поле $B = B_e^i e_i$, такое, что $d\omega_A^1 = \omega_B^2$. Это поле B , как мы знаем, называется ротором исходного поля A и обозначается $\text{rot } A$.

б. Координатная запись соответствия A и $B = \text{rot } A$.

Мы хотим научиться вычислять координаты поля $B = \text{rot } A$ по координатам поля A . В соответствии с описанной выше процедурой по полю $A = A_e^i e_i$ строим отвечающую ему 1-форму $\omega_A^1 = \langle A, \cdot \rangle$

$$\omega_A^1 = a_i dt^i = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j dt^i,$$

берем её дифференциал

$$\begin{aligned} d\omega_A^1 &= \frac{\partial}{\partial t^k} \left(\frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j \right) dt^k \wedge dt^i = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{g_{3j}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j \right) - \frac{\partial}{\partial t^3} \left(\frac{g_{2j}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j \right) \right) dt^2 \wedge dt^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^3} \left(\frac{g_{1j}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j \right) - \frac{\partial}{\partial t^1} \left(\frac{g_{3j}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j \right) \right) dt^3 \wedge dt^1 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^1} \left(\frac{g_{2j}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j \right) - \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{g_{1j}}{\sqrt{g_{jj}}} A_e^j \right) \right) dt^1 \wedge dt^2, \end{aligned}$$

рассматривая эту форму как форму вида ω_B^2 , по коэффициентам формы $\omega_B^2 = d\omega_A^1 = b_1 dt^2 \wedge dt^3 - b_2 dt^3 \wedge dt^1 + b_3 dt^1 \wedge dt^2$ находим координаты $B_e^i = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{\det(g_{ij})}} b_i$ вектора $B = \text{rot } A$.

В случае триортогональной системы криволинейных координат (t_1, t_2, t_3) формулы упрощаются. В этом случае

$$\begin{aligned} d\omega_A^1 &= \frac{\partial}{\partial t^k} (\sqrt{g_{ii}} A_e^i) dt^k \wedge dt^i = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t^2} (\sqrt{g_{33}} A_e^3) - \frac{\partial}{\partial t^3} (\sqrt{g_{22}} A_e^2) \right) dt^2 \wedge dt^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^3} (\sqrt{g_{11}} A_e^1) - \frac{\partial}{\partial t^1} (\sqrt{g_{33}} A_e^3) \right) dt^3 \wedge dt^1 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^1} (\sqrt{g_{22}} A_e^2) - \frac{\partial}{\partial t^2} (\sqrt{g_{11}} A_e^1) \right) dt^1 \wedge dt^2, \end{aligned}$$

и, используя обозначения $E_i := g_{ii}$ можно написать координаты вектора $\text{rot } A = B = B_e^1 e_1 + B_e^2 e_2 + B_e^3 e_3$

$$\begin{aligned} B_e^1 &= \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}} \left(\frac{\partial A_e^3 \sqrt{E_3}}{\partial t^2} - \frac{\partial A_e^2 \sqrt{E_2}}{\partial t^3} \right), \\ B_e^2 &= \frac{1}{\sqrt{E_3 E_1}} \left(\frac{\partial A_e^1 \sqrt{E_1}}{\partial t^3} - \frac{\partial A_e^3 \sqrt{E_3}}{\partial t^1} \right), \\ B_e^3 &= \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial A_e^2 \sqrt{E_2}}{\partial t^1} - \frac{\partial A_e^1 \sqrt{E_1}}{\partial t^2} \right), \end{aligned}$$

то есть

$$\text{rot } A = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \begin{vmatrix} \sqrt{E_1} e_1 & \sqrt{E_2} e_2 & \sqrt{E_3} e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \sqrt{E_1} A_e^1 & \sqrt{E_2} A_e^2 & \sqrt{E_3} A_e^3 \end{vmatrix}.$$

с. Ротор в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Задача. Напишите формулы для вычисления ротора векторного поля $A = A_e^1 e_1 + A_e^2 e_2 + A_e^3 e_3$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 .

Ответ: В декартовых (x, y, z) , цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства \mathbb{R}^3 ротор $\text{rot } A$ векторного поля $A = A_e^1 e_1 + A_e^2 e_2 + A_e^3 e_3$ вычисляется соответственно по формулам

$$\begin{aligned} \text{rot } A &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) e_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) e_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) e_z = \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial r A_\varphi}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) e_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) e_z = \\ &= \frac{1}{R \cos \theta} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi \cos \theta}{\partial \theta} \right) e_R + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial R A_\theta}{\partial R} \right) e_\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R A_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right) e_\theta. \end{aligned}$$