III ОЛИМПИАДА
по "экстремальным задачам"
09 апреля 2012 г.

РЕЗУЛЬТАТЫ

ПЕРВЫЙ ДИПЛОМ

Мокин Василий 201 гр.
Пешнин Александр 406 гр.

ВТОРОЙ ДИПЛОМ

Волобуев А. 206 гр.
Воробьев Илья 409 гр.

Третий ДИПЛОМ

Гремяков Александр 107 гр.
Семилетов Игорь 206 гр.

Награждение 13.04.2012 в 18-00 ауд. 13-14.

ЗАДАЧИ

1. При каких значениях действительных параметров a, b выражение

$$\int\limits_{-1}^{1} (x^2 + ax + b - |x|)^2 dx$$

принимает наименьшее значение?

2. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ для любых x и y из $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle = 0,$$

где $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Описать все такие функции f.

3. Мальчику подарили на день рождения торт, который называется "Лебединое озеро". Торт имеет форму прямоугольника со сторонами 1 и 2, а озеро сделано в виде эллипса, касающегося сторон прямоугольника в их серединах. Мальчик последовательно отрезал от торта 5 кусочков и ни разу не залез внутрь озера. Каждый раз он делал один прямолинейный разрез. Какую наибольшую суммарную площадь он при этом сможет отрезать?

4. Найти $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} (\max\{|\cos x|, |\cos(2x)|, \ldots, |\cos(10x)|\})$.

5. Найти пирамиду с минимальной площадью боковой поверхности среди всех пирамид с фиксированными высотой H и площадью основания S, у которых основание есть выпуклый n-угольник, длины сторон которого заданы, но порядок их сочленения никак не фиксирован.

6. На множестве бесконечных действительных последовательностей $\{(x_1, \dots, x_k, \dots)\}$ для всех $\delta > 0$ найти максимум величины

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \delta; \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^4 x_k \leq 1; \quad x_k \geq 0, \; k = 1, 2, \dots$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1.

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + ax + b - |x|)^2 dx = \frac{2}{3}a^2 + 2(b - \frac{1}{6})^2 + \frac{1}{90}$$

Ответ: $(0, \frac{1}{6})$.

2. Очевидно, что сдвигом f на постоянный вектор $-f(0)$ можно добиться, что $f(0) = 0$. В этом случае $\langle f(x), x \rangle = 0$ для любого x. Следовательно для любых x и y имеем: $\langle f(x) - f(y), x - y \rangle = -\langle f(x), y \rangle - \langle f(y), x \rangle = 0$. То есть $\langle f(x), y \rangle = -\langle f(y), x \rangle$.

Рассмотрим теперь базис $(e_1, \dots, e_n)$ в $\mathbb{R}^n$ и положим $\langle f(e_i), e_j \rangle = a_{ij}$. Тогда для любого $x = (x_1, \dots, x_n)$ имеем

$$f(x) = \sum_i \langle f(x), e_i \rangle e_i = -\sum_i \langle f(e_i), x \rangle e_i = -\sum_i \Big(\sum_j a_{ij} x_j\Big) e_i$$

Другими словами, $f(x) = Ax$, где $A = (a_{ij})$. Однако не любая матрица A подойдет. Поскольку равенство

$$\langle Ax, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle = -\langle x, Ay \rangle = -\langle A^T x, y \rangle,$$

выполнено для любых x и y, немедленно получаем, что $A = -A^T$.

Таким образом необходимо, чтобы $f(x) = Ax + b$, где A – кососимметрическая матрица. Очевидно, что любое отображение такого вида подойдет.

3. Ответ: мальчик должен провести три касательные ко вписанной окружности в серединах трех дуг между точками ее касания со сторонами квадрата, и еще две касательные в точках, которые делят четвертую дугу на 3 равные части. Наибольшая отрезаемая площадь равна $(4 - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{3})/4 = 0.1777...$

Пользуемся следующим утверждением: если в угол вписана окружность, то среди всех треугольников, отрезаемых от этого угла касательными к окружности, отделяющими ее от вершины угла, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник. Для доказательства заметим, что все такие треугольники имеют один и тот же периметр (равный удвоенному расстоянию от вершины угла до точки касания со стороной угла). Поэтому треугольник наибольшей площади имеет наибольшую вписанную окружность. Вписанная окружность наибольшая, когда она касается исходной окружности, т.е., когда треугольник равнобедренный.

Фиксируем радиус окружности и обозначим через $S(\alpha)$ наибольшую площадь отрезаемого треугольника, где α – угловая мера дуги между точками касания. Очевидно, функция $S(\alpha)$ возрастает при $\alpha \in (0, \pi)$. Также ясно, что для того, чтобы отрезать максимальную площадь, мальчику надо проводить касательные ко вписанной окружности квадрата. Рассмотрим 5 точек касания, соответствующих наибольшей отрезаемой площади (наибольшая площадь достигается в силу компактности). Рассмотрим 4 дуги между точками касания со сторонами квадрата. Внутри одной из дуг лежит не менее двух точек касания, назовем одну из них M. Если есть дуга, на которой точек нет, то проведем касательную в ее середине N. Она отрезает большую площадь, чем касательная в точке M, поскольку она лежит на большей дуге, и ей соответствует большая величина $S(\alpha)$. Поэтому, заменив точку M точкой N, мы увеличиваем отрезаемую площадь.Итак, на трех дугах лежит по одной точке, а на четвертой – две. В силу доказанного утверждения, каждая из трех точек является серединой соответствующей дуги, а последние две точки делят четвертую дуги на 3 равные части.

P.S. Задача иллюстрирует тот факт, что жадный алгоритм не всегда является оптимальным.

4.Используем теорему Дирихле. Через $N(u)$ обозначим расстояние от u до ближайшего целого. Рассматривая расположение дробных частей чисел $u, 2u, \ldots, 10u$, мы получаем по принципу Дирихле, что для некоторого $k \leq 10$ выполнено $N(ku) \leq 1/11$. Равенство достигается, например, если $u = 1/11$. Заметим, что $|\cos(kx)| = |\cos(\pi k N(x/\pi))|$. Отсюда следует, что ответ в задаче $\cos(\pi/11)$ и достигается, например, для $x = \pi/11$.

5.Пусть O — проекция вершины пирамиды на плоскость основания, а L_j — прямая, содержащая j-ую сторону основания, длину которой обозначим через l_j. Пусть $h = (h_1, \dots, h_n)$, где $|h_j|$ — расстояние от O до L_j, причем знак h_j положителен, если основание и точка O находятся по одну сторону от прямой L_j, и отрицателен в противном случае. Удвоенная площадь боковой поверхности пирамиды равна $\sum\limits_{1\le j\le n} l_j\sqrt{H^2+h_j^2}$, где H – высота пирамиды, а площадь основания выражается формулой $S = \frac{1}{2}\sum\limits_{1\le j\le n} h_j l_j$, которая при $n = 3$ очевидным образом проверяется, а при $n > 3$ легко доказывается по индукции (если учесть, что величина h_0, соответствующая хорде l_0, отсекающей треугольник от n-угольника, входит с разным знаком в формулы для площади этого треугольника и площади отсеченного $(n-1)$-угольника). Тем самым, приходим к такой формализации:
$f_0(h) = \sum\limits_{1\le j\le n} l_j\sqrt{H^2+h_j^2} \;\to \min$ при условии $f_1(h) = 0$, где $f_1(h) = \sum\limits_{1\le j\le n} h_j l_j - 2S$.
Это гладкая задача с функциональным ограничением. Ее решение $\widehat{h}$ существует. Условие стационарности для функции Лагранжа, т.е. $\widehat{h}$ – решение системы $\frac{\partial\mathcal{L}(h)}{\partial h_j} = 0$, где $j = 1, \dots, n$, $\mathcal{L}(h) = \lambda_0\sum\limits_{1\le j\le n} l_j\sqrt{H^2+h_j^2} + \lambda_1\sum\limits_{1\le j\le n} h_j l_j$, а $(\lambda_0, \lambda_1) \in R^2 \setminus 0$. Отсюда следует, что $\frac{h_j}{\sqrt{H^2+h_j^2}} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ для любого $j = 1, \dots, n$, т.е. $h_j = \mathrm{const}$ для любого j.

Ответ: в основание искомой пирамиды вписывается (касающаяся всех сторон основания) окружность с центром в точке O. При этом $r = 2S(\sum_j l_j)^{-1}$, где r – радиус окружности, а S – площадь основания.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Волобуев 206 гр. 10 0 4 10 0 0

Воробьев 409 гр. 10 4 0 10 0 0

Гремяков 107 гр. 10 3 0 0 0 0

Кушнарева 212 гр. 7 0 4 0 0 0

Мокин 201 гр. 10 3 10 10 0 0

Пешнин 406 гр. 3 0 4 10 8 0

Почеревин 107 гр. 7 0 0 0 0 0