З А Д А Ч И

к коллоквиуму по математическому анализу
в группах 107 — 112 первого курса второго потока
2011-2012 учебный год
Лектор профессор В.А.Зорич

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Зная неравенства Гёльдера, Минковского и Иенсена для сумм, получите соответствующие неравенства для интегралов.

2. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с относительной погрешностью в пределах 10 %.

3. Функция $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2}dt$, называемая *интегралом вероятности ошибок*, имеет пределом 1 при $x \to +\infty$. Изобразите график этой функции и найдите ее производную. Покажите, что при $x \to +\infty$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right)\right).$$

Как продолжить эту асимптотическую формулу до ряда? Сходится ли этот ряд хотя бы при каком-то значении $x \in \mathbb{R}$?

4. Зависит ли длина пути от закона движения (от параметризации)?

5. Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете резинку на 1 км. Доползет ли жук до вашей руки? Если да, то приблизительно сколько ему на это потребуется времени? (Задача Л. Б. Окуня, предложенная им А. Д. Сахарову.)

6. Подсчитайте работу по перемещению массы в гравитационном поле Земли и покажите, что эта работа зависит только от уровней высот исходного и конечного положений. Найдите для Земли работу выхода из ее гравитационного поля и соответствующую (вторую) космическую скорость.

7. На примере маятника и двойного маятника поясните, как на множестве соответствующих конфигураций можно ввести локальные координаты и окрестности и как при этом возникает естественная топология, превращающая его в конфигурационное пространство механической системы. Можно ли метризовать это пространство в рассмотренных случаях?

8. Является ли компактом единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, в $\mathbb{R}_0^\infty$, в $C[a,b]$?

9. Подмножество данного множества называется его *ε-сетью*, если любая точка множества находится на расстоянии меньшем чем ε от какой-либо точки этого подмножества. Обозначим через $N(\varepsilon)$ наименьшее возможное число точек в ε-сети данного множества. Оцените *ε-энтропию* $\log_2 N(\varepsilon)$ отрезка, квадрата, куба и ограниченной области в пространстве $\mathbb{R}^n$. Дает ли величина $\frac{\log_2 N(\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}$ при $\varepsilon \to 0$ представление о размерности рассматриваемого множества? Проверьте, что эта *энтропийная* размерность стандартного канторова подмножества отрезка $[0,1]$ равна $\log_3 2$.

10. На поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^3$ температура T как функция точки меняется непрерывно. Обязаны ли на сфере быть точки минимума и максимума температуры? При наличии точек с двумя фиксированными значениями температуры, должны ли быть точки и с промежуточными ее значениями? Что из этого верно в случае, когда единичная сфера S берется в пространстве $C[a,b]$, а температура в точке $f \in S$ выражается в виде

$$T(f) = \left(\int\limits_a^b |f|(x)\, dx \right)^{-1} ?$$

11. a) Взяв 1,5 в качестве исходного приближения для $\sqrt{2}$, проведите две итерации по методу Ньютона и посмотрите, сколько верных знаков получилось на каждом из двух шагов.

b) Найдите итерационным процессом функцию f, удовлетворяющую уравнению

$$f(x) = x + \int\limits_0^x f(t)\, dt.$$

12. Локальная линеаризация; рассмотрите и продемонстрируйте ее на следующих примерах: мгновенная скорость и перемещение; упрощение уравнения движения при малых колебаниях маятника; вычисление линейных поправок к значениям величин A^{-1}, $\exp(E)$,

$\det(E)$, $< a, b >$ при малом изменении аргументов (здесь A — обратимая, E — единичная матрицы; a, b — векторы; $< \cdot, \cdot >$ — скалярное произведение).

13. a) Какова относительная погрешность $\delta = \frac{|\Delta f|}{|f|}$ при вычислении значения функции $f(x, y, z)$ в точке (x, y, z), координаты которой даны с абсолютными погрешностями Δx, Δy, Δz соответственно?

b) Какова относительная ошибка в вычислении объема комнаты, размеры которой таковы: длина $x = 5 \pm 0{,}05$ м, ширина $y = 4 \pm 0{,}04$ м, высота $z = 3 \pm 0{,}03$ м?

c) Верно ли, что относительная погрешность значения линейной функции совпадает с относительной погрешностью значения ее аргумента?

d) Верно ли, что дифференциал линейной функции совпадает с ней самой?

e) Верно ли, что для линейной функции f справедливо соотношение $f' = f$?

14. a) Одна из частных производных функции двух переменных, заданной в круге, равна нулю во всех точках круга. Значит ли это, что функция не зависит от соответствующей переменной в этом круге?

b) Изменится ли ответ, если вместо круга взять произвольную выпуклую область?

c) А если взять вообще произвольную область?

d) Пусть $x = x(t)$ — закон движения точки в плоскости (или в $\mathbb{R}^n$) в промежутке времени $t \in [a, b]$; $\mathbf{v}(t)$ — ее скорость как функция времени, а $C = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}(t) \mid t \in [a, b]\}$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее все векторы $\mathbf{v}(t)$ (называемое обычно *выпуклой оболочкой* того множества, на которое оболочка натягивается). Покажите, что в C найдется такой вектор $\mathbf{v}$, что $x(b) - x(a) = \mathbf{v} \cdot (b - a)$.

15. a) Пусть $F(x, y, z) = 0$. Верно ли, что $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -1$? Проверьте это на зависимости $\frac{xy}{z} - 1 = 0$ (соответствующей уравнению Клапейрона $\frac{PV}{T} = R$ состояния идеального газа).

b) Пусть теперь $F(x, y) = 0$. Верно ли, что $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = 1$?

c) Что можно утверждать в общем случае зависимости $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$?

d) Как, зная первые несколько членов тейлоровского разложения функции $F(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), где $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0)$ обратима, найти первые несколько членов тейлоровского разложения неявной функции $y = f(x)$, определяемой в окрестности (x_0, y_0) уравнением $F(x, y) = 0$?

16. a) Проверьте, что плоскость, касательная к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке (x_0, y_0, z_0), может быть задана уравнением $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

b) Точка $P(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) \cdot t$ в момент времени $t = 1$ стартовала с эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Пусть $p(t)$ — точка того же эллипсоида, ближайшая к $P(t)$ в момент времени t. Найдите предельное положение точки $p(t)$ при $t \to +\infty$.

17. a) В плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y) постройте линии уровня функции $f(x, y) = xy$ и кривую $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Используя полученную картинку, проведите полное исследование задачи об экстремуме функции $f|_S$ — ограничения f на окружность S.

b) Какой физический смысл имеют множители Лагранжа в методе Лагранжа отыскания условного экстремума, когда ищется положение равновесия материальной точки в поле тяжести, если движение точки стеснено идеальными связями (вида $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$)?

18. Если в векторном пространстве V имеется невырожденная билинейная форма $B(x, y)$, то каждой линейной функции $g^* \in V^*$ на этом пространстве отвечает единственный вектор g, такой, что $g^*(v) = B(g, v)$ для любого вектора $v \in V$.

a) Проверьте, что если $V = \mathbb{R}^n$, $B(x, y) = b_{ij}x^i x^j$, $g^* v = g_i v^i$, то вектор g имеет координаты $g^j = b^{ij} g_i$, где (b^{ij}) — матрица, обратная матрице (b_{ij}).

Чаще всего в качестве билинейной формы $B(\cdot, \cdot)$ выступает стандартное симметричное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в евклидовой геометрии или кососкалярное произведение $\omega(\cdot, \cdot)$ (когда форма B кососимметрична) в симплектической геометрии.

b) Пусть $B(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{vmatrix}$ — ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Найдите вектор $g = (g^1, g^2)$, отвечающий относительно B линейной функции $g^* = (g_1, g_2)$.

c) Вектор, соответствующий дифференциалу функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x относительно скалярного произведения $\langle , \rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, как известно, называется градиентом функции f в этой точке и обозначается $\operatorname{grad} f(x)$. Итак, $df(x)v =: \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle$ для любого приложенного к x вектора $v \in T_x\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^n$.

Значит,

$$f'(x)v = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)v^n = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle = |\operatorname{grad} f(x)||v|\cos\varphi.$$

• Убедитесь, что в стандартном ортонормированном базисе, т.е. в декартовых координатах, $\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x)$

• Убедитесь, что скорость роста функции f при движении из точки x с единичной скоростью максимальна, когда направление движения совпадает с направлением градиента функции в этой точке, и равна $|\operatorname{grad} f(x)|$. При движении в направлении, перпендикулярном вектору $\operatorname{grad} f(x)$, функция не меняется.

• Как изменятся координаты вектора $\operatorname{grad} f(x)$, если в $\mathbb{R}^2$ вместо ортонормированного базиса (e_1, e_2), взять ортогональный базис $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2)$?

• Как вычислять $\operatorname{grad} f$ в полярных координатах? Ответ $\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$.

d) Выше в упражнении b) была рассмотрена кососимметрическая форма $B(v_1, v_2)$ ориентированной площади параллелограмма в $\mathbb{R}^2$.

Если вектор, отвечающий $df(x)$ относительно симметричной формы $\langle , \rangle$ называют градиентом $\operatorname{grad} f(x)$, то вектор, отвечающий $df(x)$ относительно кососимметричной формы B называют косым градиентом и обозначают $\operatorname{sgrad} f(x)$ (от английского “skew” — косой). Запишите $\operatorname{grad} f(x)$ и $\operatorname{sgrad} f(x)$ в декартовых координатах $\mathbb{R}^2$.

19. a) Покажите, что в $\mathbb{R}^3$ (и вообще в $\mathbb{R}^{2n+1}$) нет невырожденной кососимметрической билинейной формы.

b) В ориентированном $\mathbb{R}^2$, как мы видели, есть невырожденная кососимметрическая билинейная форма (ориентированная площадь параллелограмма). В $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(x^1, \dots, x^n, \dots, x^{2n}) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$ такая билинейная форма ω тоже есть: если $v_i = (p_i^1, \dots, p_i^n, q_i^1, \dots, q_i^n)$ $(i = 1, 2)$, то

$$\omega(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} p_1^1 & q_1^1 \\ p_2^1 & q_2^1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} p_1^n & q_1^n \\ p_2^n & q_2^n \end{vmatrix}.$$

Т.е. $\omega(v_1, v_2)$ — это сумма ориентированных площадей проекций натянутого на v_1, v_2 параллелограмма в координатные плоскости (p^j, q^j) $\quad (j = 1, \dots, n)$.

• Пусть g^* — линейная функция в $\mathbb{R}^{2n}$, заданная своими коэффициентами $g^* = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. Найдите координаты вектора g, сопоставляемого функции g^* посредством формы ω.

• Дифференциалу функции $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^{2n}$ посредством кососимметрической формы ω сопоставляется вектор, называемый, как уже было сказано, косым градиентом функции f в этой точке и обозначаемый $\operatorname{sgrad} f(x)$. Найдите выражение $\operatorname{sgrad} f(x)$ в канонических декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^{2n}$.

• Найдите скалярное произведение $\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{sgrad} f(x) \rangle$.

• Покажите, что вектор $\operatorname{sgrad} f(x)$ направлен вдоль поверхности уровня функции f.

• Закон движения $x = x(t)$ точки в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ таков, что $\dot{x}(t) = \operatorname{sgrad} f(x(t))$. Покажите, что $f(x(t)) = \mathrm{const}$.

• Запишите уравнение $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f(x)$ в канонических обозначениях $(p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$ для координат и $H = H(p, q)$ для функции f. Полученная система, называемая системой уравнений Гамильтона, является одним из центральных объектов механики.

20. Канонические переменные и система уравнений Гамильтона.

a) В вариационном исчислении и фундаментальных вариационных принципах классической механики важную роль играет следующая система уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\right)(t, x, v) = 0, \\ v = \dot{x}(t), \end{cases}$$

где $L(t, x, v)$ — заданная функция переменных t, x, v, среди которых t обычно является временем, x — координатой, а v — скоростью. Это система двух уравнений на три переменные. Из нее обычно желают найти зависимости $x = x(t)$ и $v = v(t)$, что по существу сводится к отысканию закона движения $x = x(t)$, ибо $v = \dot{x}(t)$.

Запишите подробно первое уравнение системы, раскрыв производную $\frac{d}{dt}$, с учетом того, что $x = x(t)$ и $v = v(t)$.

b) Покажите, что если от переменных t, x, v, L перейти к так называемым *каноническим* переменным t, x, p, H, сделав преобразование Лежандра

$$\begin{cases} p = \frac{\partial L}{\partial v}, \\ H = pv - L \end{cases}$$

по переменным v, L, заменяя их на переменные p, H, то система Эйлера-Лагранжа приобретет симметричный вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \ .$$

c) В механике чаще всего вместо x и $v = \dot{x}$ используют обозначения q и $\dot{q}$.

В многомерном случае, когда $L(t, q, \dot{q}) = L(t, q^1, \dots, q^m, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)$ система уравнений Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)(t, q, \dot{q}) = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \ .$$

Сделав преобразование Лежандра по переменным $\dot{q}, L$, перейдите от переменных $t, q, \dot{q}, L$ к каноническим переменным t, q, p, H и покажите, что при этом система уравнений Эйлера-Лагранжа перейдет в следующую систему уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, \ldots, m) \ .$$