ВОПРОСЫ

к коллоквиуму по математическому анализу
в группах 107 — 112 первого курса второго потока
2011-2012 учебный год
Лектор профессор В.А.Зорич

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Интеграл Римана на отрезке. Нижние и верхние суммы, их геометрический смысл, поведение при измельчении разбиения и взаимные оценки. Теорема Дарбу, верхний и нижний интегралы Дарбу и критерий интегрируемости по Риману вещественнозначной функции на отрезке(в терминах сумм колебаний). Примеры классов интегрируемых функций.

2. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (формулировка). Множества меры нуль, их общие свойства, примеры. Пространство интегрируемых функций и допустимые операции над интегрируемыми функциями.

3. Линейность, аддитивность и общая оценка интеграла.

4. Оценки интеграла от вещественнозначной функции. Теорема о среднем (первая).

5. Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства. Существование первообразной у непрерывной функции. Обобщенная первообразная и ее общий вид.

6. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в интеграле.

7. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с интегральным остатком. Вторая теорема о среднем.

8. Аддитивная функция ориентированного промежутка и интеграл. Общая схема появления интеграла в приложениях, примеры: длина пути (и ее независимость от параметризации), площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, работа, энергия.

9. Интеграл Римана-Стилтьеса. Условия сведения к интегралу Римана. Дельта-функция Дирака и понятие обобщенной функции. Дифференцирование обобщенных функций и производная функции Хевисайда.

10. Понятие несобственного интеграла. Канонические интегралы. Критерий Коши и теорема сравнения для исследования сходимости несобственного интеграла. Интегральный признак сходимости ряда.

11. Метрическое пространство, примеры. Открытые и замкнутые подмножества. Окрестность точки. Индуцированная метрика, подпространство. Топологическое пространство. Окрестность точки, отделимость (аксиома Хаусдорфа). Топология, индуцируемая на подмножествах. Замыкание множества и описание относительно замкнутых подмножеств.

12. Компакт, его абсолютность. Замкнутость компакта и компактность замкнутого подмножества компакта. Вложенные компакты. Метрические компакты, ε-сеть. Критерий метрического компакта и его конкретизация в пространстве $\mathbb{R}^n$.

13. Полное метрическое пространство. Полнота $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}_0^\infty$ и пространства $C[a, b]$ непрерывных функций относительно равномерной сходимости.

14. Критерий непрерывности отображения топологических пространств. Сохранение компактности и связности при непрерывном отображении. Классические теоремы об ограниченности, максимуме и промежуточном значении для непрерывных функций. Равномерная непрерывность на метрическом компакте.

15. Норма (длина, модуль) вектора в векторном пространстве; важнейшие примеры. Пространство $L(X, Y)$ линейных непрерывных операторов и норма в нем. Непрерывность линейного оператора и конечность его нормы.

16. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал, его область определения и область значений. Координатная запись дифференциала отображения $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Соотношения между дифференцируемостью, непрерывностью и наличием частных производных.

17. Дифференцирование композиции функций и обратной функции. Координатная запись полученных законов применительно к различным случаям отображений $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

18. Производная по вектору и градиент. Геометрические и физические примеры использования градиента (уровни функций, градиентный спуск, касательная плоскость; потенциальные поля; уравнение Эйлера динамики идеальной жидкости, закон Бернулли, работа крыла).

19. Однородные функции и соотношение Эйлера. Метод размерностей.

20. Теорема о конечном приращении. Ее геометрический и физический смысл. Примеры приложений (достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных; условие постоянства функции в области).

21. Высшие производные и их симметричность.

22. Формула Тейлора.

23. Экстремумы функций (необходимые и достаточные условия внутреннего экстремума).

24. Сжимающие отображения. Принцип Пикара-Банаха неподвижной точки.

25. Теорема о неявной функции.

26. Теорема об обратной функции. Криволинейные координаты и выпрямления. Гладкая поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$ и касательная плоскость к ней. Способы задания поверхности и соответствующие им уравнения касательного пространства.

27. Теорема о ранге и зависимость функций.

28. Разложение диффеоморфизма в композицию простейших.

29. Условный экстремум (необходимый признак). Геометрическая, алгебраическая и физическая интерпретации метода Лагранжа.

30. Достаточный признак условного экстремума.

ПРИМЕЧАНИЕ.

Здесь представлена практически вся программа анализа второго семестра, записанная в форме экзаменационных билетов. В коллоквиум войдут только те вопросы, которые будут изложены к моменту проведения коллоквиума в соответствующей группе потока.