

ПРОГРАММА СПЕЦИАЛЬНОЙ ЧАСТИ (ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ)
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА В АСПИРАНТУРУ
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.06 - МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА
И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя. Решение линейных уравнений в целых числах.
2. Простые числа. Основная теорема арифметики. Разложение НОД и НОК на простые множители. Разложение $n!$ и $\text{НОК}(1, 2, \dots, n)$ в произведение простых множителей. Расходимость ряда $\sum_p \frac{1}{p}$.
3. Мультипликативные функции. Функция Мёбиуса. Формулы для числа и для суммы делителей. Функция Эйлера.
4. Сравнения и их простейшие свойства. Кольцо вычетов. Полная и приведенная системы вычетов. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Сравнения первой степени с одним неизвестным. Китайская теорема об остатках. Число решений полиномиальных сравнений по простому модулю.
5. Символы Лежандра и Якоби, их свойства. Квадратичный закон взаимности.
6. Первообразные корни и индексы. Существование первообразных корней по модулям p^α , $2p^\alpha$, $\alpha \geq 1$. Структура и порядок группы \mathbb{Z}_m^* для произвольного m .
7. Характеры Дирихле и их свойства.
8. Представление чисел непрерывными дробями. Свойства подходящих дробей. Квадратичные иррациональности. Теорема Эйлера-Лагранжа.
9. Оценки Чебышева для функции $\pi(x)$.
10. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ и ее простейшие свойства. Тожество Эйлера. Аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в область $\text{Re } s > 0$. Отсутствие нулей на прямой $\text{Re } s = 1$. Оценки сверху модулей дзета-функции, ее производной и логарифмической производной в области $\text{Re } s \geq 1$, $|\text{Im } s| \geq 3$.
11. Асимптотический закон распределения простых чисел.
12. L -функции Дирихле и их простейшие свойства. Тожество Эйлера для L -функций, аналитическое продолжение L -функций в область $\text{Re } s > 0$. Доказательство утверждения $L(1, \chi) \neq 0$ для неглавных характеров χ .
13. Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях.
14. Поля алгебраических чисел. Кольцо целых алгебраических чисел. Алгебраическая замкнутость поля всех алгебраических чисел.
15. Теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными. Теорема Лиувилля о приближении рациональными числами действительных алгебраических чисел. Оценка снизу абсолютной величины многочленов в алгебраической точке. Иррациональность и трансцендентность числа $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$.
16. Иррациональность и трансцендентность чисел e и π .

Список литературы

- [1] Виноградов И.М., Основы теории чисел, Любое издание.
- [2] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б., Введение в теорию чисел, М., Изд. МГУ, 1984.
- [3] Шидловский А.Б., Диофантовы приближения и трансцендентные числа, М., Физматлит, 2007